Evolutes

Agustí Reventós
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Resum

Aquest article és un resum dels resultats sobre la cicloide que van aparèixer en el famós treball de Huygens *Horologium oscillatorium*. En particular, veiem com va construir la tangent en un punt qualsevol d'aquesta corba i com, utilitzant el concepte d'evoluta d'una corba (envolupant de les normals), calculà la seva longitud. Manipulant derivades segones geomètricament (abans del càlcul diferencial de Newton i Leibniz) va trobar també els radis de curvatura de la cicloide i d'altres corbes com ara la paràbola.

Abstract

In this paper we summarize the results on the cycloid appearing in Huygens' famous work Horologium oscillatorium. In particular, we look at how he constructed a tangent at an arbitrary point on this curve and how, using the evolute of a curve (envelope of normals), he could calculate its length. In this way, geometrically manipulating second derivatives (before the differential calculus of Newton and Leibniz), he obtained the curvature radius at every point of the cycloid and of other curves, such as the parabola.

1. Definició i propietats més importants

En aquest text veurem[1] que una idea simple, desenrotllar un fil situat en una corba, ha estat el fil conductor, mai millor dit, de resultats matemàtics interessants. En particular, aquesta idea va ser central per calcular la longitud de la cicloide.[2] Avui dia calculem longituds de corbes fent una integral. Guanyem molt, però també perdem el coneixement profund de la corba en qüestió. Potser és cert que les matemàtiques no es poden explicar seguint el desenvolupament històric, però, independentment de si s'ha de fer així o no, hi ha coses que els matemàtics no podem ignorar.

Recordem primerament la definició d'evoluta d'una corba plana.

1. Notes basades en la conferència pronunciada el 6 d'abril de 2018 en el marc de la IX Jornada «Les matemàtiques entre la secundària i la universitat», organitzada per l'ICE i el Departament de Matemàtiques de la UAB i que versava sobre el paper de la història en l'ensenyament de les matemàtiques.

2. L'interès per aquest càlcul durant el segle XVII era essencialment teòric. Tot matemàtic que volgués ser apreciat havia de contribuir al problema. Vegeu *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*, de P. M. González Urbaneja [1].

Definició 1.1. *L'evoluta d'una corba plana és l'envolupant de les seves rectes normals.*

La família de rectes perpendiculars a una corba donada constitueix una família *uniparamètrica* de rectes, ja que n'hi ha una per a cada valor del paràmetre de la corba. L'envolvent d'una família uniparamètrica de rectes és, per definició, una corba tal que les seves tangents són les rectes de la família. Aquesta corba és la que l'ull humà detecta en mirar les infinites rectes d'una família.

Així doncs, tenim dues corbes, la inicial i la seva evoluta, i unes rectes que són a la vegada tangents a una i normals a l'altra.

L'evoluta d'un cercle és el seu centre. L'evoluta d'una el·lipse és una corba amb quatre vèrtexs, com indica la figura 1. Les quatre punxes corresponen als quatre extrems de la curvatura de l'el·lipse.

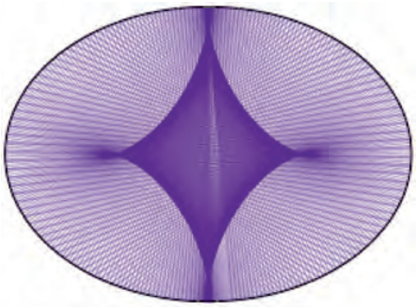


Figura 1. Normals a l'el·lipse.

Però en general les evolutes poden ser molt complicades, com mostren les dues figures següents.[3] Cada punxa correspon a extrems locals de curvatura.

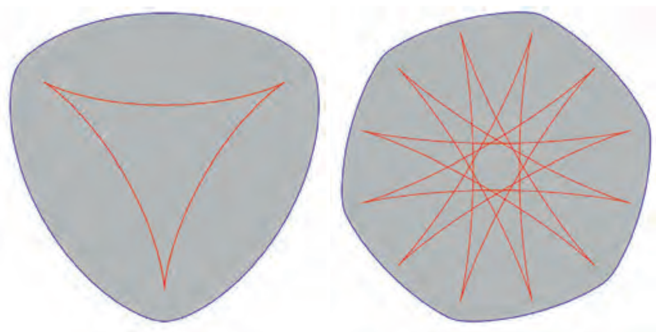


Figura 2. Evolutes.

La primera corba té la funció de suport $p(t) = 5 + \sin(2t)$ i la segona, $p(t) = 40 + \sin(6t)$. Recordem que la funció de suport $p(t)$ és la distància fins a l'origen de la recta tangent a la corba $(x(t), y(t))$ en el punt de coordenada t. La relació entre $(x(t), y(t))$ i $p(t)$ ve donada per

3. Fetes per Eduard Gallego.

$$x(t) = p(t)\cos(t) - p'(t)\sin(t)$$

$$y(t) = p(t)\sin(t) + p'(t)\cos(t)$$

En lloc de considerar una corba i les seves normals per construir l'evoluta, podem procedir al revés: començar per una corba sobre la qual hi ha embolicat un cordill i anar-lo desplegant mantenint-lo sempre tangent a la corba inicial. L'extrem d'aquest cordill descriu una corba que que s'anomena *desenvolupada* o involuta de la primera. Es veu fàcilment[4] que el cordill és automàticament perpendicular a la desenvolupada. Per tant, la corba inicial és l'evoluta de la desenvolupada.

La figura següent mostra la figura que s'obté en desplegar un fil inicialment enrotllat al cercle mantenint-lo sempre tangent.

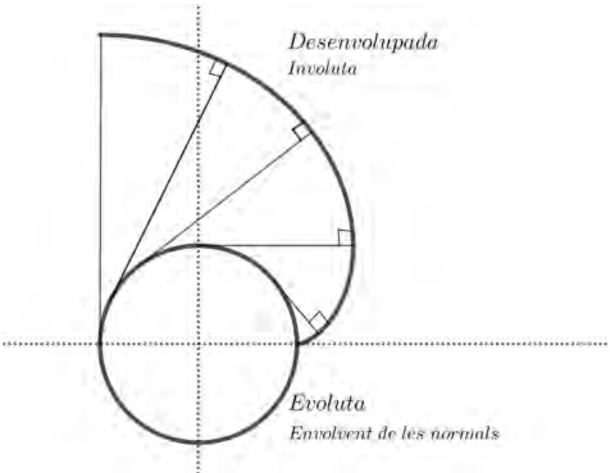


Figura 3. Corba desenvolupada del cercle.

Recordem que una manera d'introduir el *radi de curvatura* d'una corba en un punt és considerar el cercle que passa per aquest punt i per dos punts més de la corba pròxims a aquest i fer el límit quan aquests dos punts s'acosten al primer. Es diu, de manera imprecisa, que el *cercle osculador* és el cercle que passa per tres punts «consecutius» de la corba. El seu radi és el radi de curvatura i el centre és el *centre de curvatura* de la corba en el punt de contacte.

Si ara pensem que les normals a la corba en aquests tres punts, comuns a la corba i al cercle osculador, són aproximadament normals també a aquest cercle, és clar que podem dir que tres normals «consecutives» es tallen en el centre del cercle osculador. I tenim, doncs, el resultat següent.

Teorema 1. *La longitud del tros de cordill desplegat és el radi de curvatura de la desenvolupada. Equivalentment, l'evoluta d'una corba és el lloc geomètric dels seus centres de curvatura.*

4. Huygens ho prova en la proposició I, part III de l'*Horologium*, [4].

2. Huygens i l'*Horologium Oscillatorium*

Christiaan Huygens (1629-1695) va ser un matemàtic, físic i astrònom neerlandès (va néixer a la Haia) del segle XVII i un dels científics més influents en la seva època. El seu pare va tenir un paper important en la revolta dels neerlandesos contra Lluís XIV i va mantenir correspondència amb Descartes, Mersenne i Galileu, tots tres implicats en la història de la cicloide.

Figura 4. Christiaan Huygens.

El 1645 va anar a la Universitat de Leiden. Va millorar les lents dels telescopis, cosa que li va permetre descobrir els anells de Saturn. En el treball del 1651 *Theoremata de quadratura hyperboles* [2], publicat a Leiden, refuta la quadratura del cercle donada per Grégoire de Saint-Vincent. En aquesta època es dedica a problemes de rectificació, quadratura, curvatura, determinació de centres de gravetat, tangents a corbes, valors extrems, etc. Però no disposa de les eines adequades del càlcul diferencial.

El 1657 publica el que es considera com el primer text de probabilitat, *De Rationiis in Ludo Aleae* [3]. El 1673 publica el seu famós treball *Horologium oscillatorium* [4].

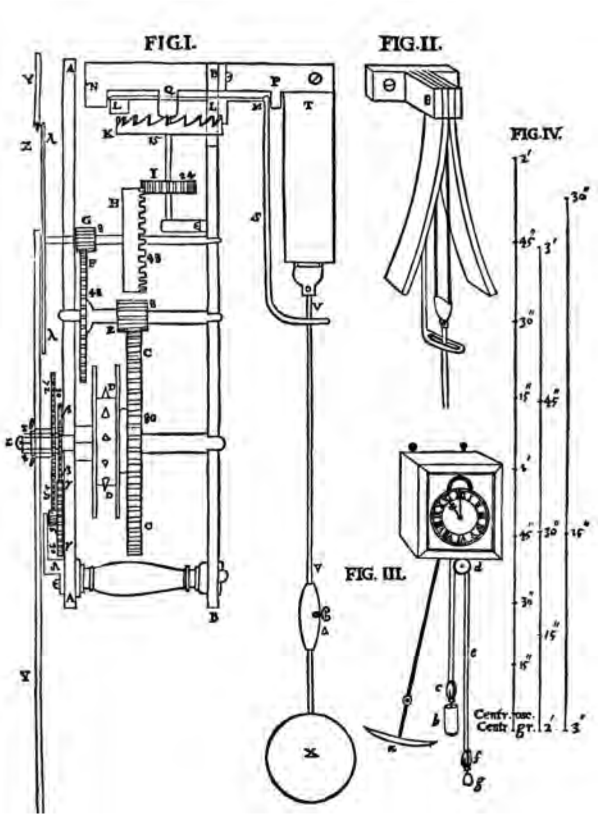


Figura 5. Figures de l'*Horologium*.

Buscant un rellotge de pèndol precís, s'adona que l'ha de construir de manera que el període sigui independent de les variacions d'amplitud en les oscil·lacions. Busca una corba (la descrita per l'extrem del pèndol) que sigui tautòcrona.[5] S'adona que això vol dir que el pes al final del pèndol ha de descriure una cicloide. Com que l'evoluta d'una cicloide és una cicloide (vegeu la secció 4.3), només hem de penjar el pèndol al vèrtex de dues cicloides invertides. Defineix evoluta com la corba sobre la qual inicialment hi ha un cordill que es va desplegant; concretament, en la definició IV de la tercera part de l'*Horologium* diu: «Illa vero cui filum circumplicatum erat, dicatur Evoluta».

D'aquesta manera, desenvolupa una teoria general d'evolutes i involutes i dona una expressió geomètrica del radi de curvatura molt abans del càlcul diferencial de Newton i Leibniz. És a dir, manipula derivades segones geomètricament.

L'*Horologium* consta de les cinc parts següents:[6]

1. Descripció del rellotge oscil·latori.
2. Caiguda de pesos. Cicloide.
3. Evolutes i longitud de corbes.
4. Centre d'oscil·lació.
5. Construcció d'altres tipus de rellotge.

El 1693 estudia la superfície de revolució generada per la tractiu, posteriorment anomenada pseudoesfera per Beltrami, i veu que te la mateixa àrea i la meitat del volum que l'esfera del mateix radi.

2. La cicloide abans de Huygens

La cicloide és la corba descrita per un punt d'una circumferència quan aquesta gira sobre una línia recta. Sembla que la primera menció d'aquesta corba la va fer Charles Bouvelles el 1501, quan tractava de quadrar el cercle per procediments mecànics. Vegeu *The Helen of Geometry*, de John Martin [6].

Pascal, a *Histoire de la Roulette* [7], diu que qui primer es va preocupar d'aquesta corba i li va donar aquest nom de *roulette* va ser Mersenne, però no la va estudiar. Es va limitar a proposar el seu estudi als savis de l'època, en especial a Galileu. Era aproximadament el 1615. No obstant això, en una carta a Cavalieri del 1640, Galileu diu que ell va començar a estudiar aquesta corba fa cinquanta anys.

L'any 1634, aproximadament, Gilles de Roberval va demostrar que l'àrea sota un arc de cicloide és igual a tres vegades l'àrea del cercle generador. Aquest resultat havia estat intuït anys abans per Galileu, quan va pesar l'arc de cicloide i va comparar-lo amb el pes del disc generador. La demostració de Roberval és molt simple i es basa en el principi de Cavalieri i la corba *companya* de la cicloide. Vegeu [6].

5. Una corba tautòcrona és aquella per a la qual el temps que triga un objecte que llisca sobre ella a arribar al seu punt més baix (suposem que sense fregament i sotmès només a l'acció de la gravetat), és independent del punt de partida.

6. En aquestes notes només ens interessarem per la cicloide i les evolutes.

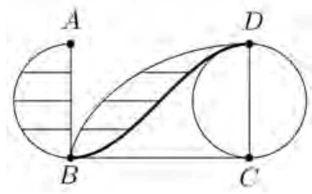


Figura 6. La cicloide i la seva *companya*.

La *companya* es construeix traslladant cada punt de la cicloide cap a la dreta una distància igual a la determinada per la recta paral·lela a la base que passa per aquest punt amb el semidisc generatriu. Així és clar, pel principi de Cavalieri, que l'àrea entre la cicloide i la seva companya és igual a $(1/2)\pi R^2$. Per simetria i novament pel principi de Cavalieri, es veu que la *companya* divideix el rectangle *ABCD* en dues regions d'àrea igual. L'àrea sota la companya és, doncs, πR^2. Per tant, l'àrea sota mitja cicloide és $(1/2)\pi R^2 + \pi R^2 = (3/2)\pi R^2$, que és el resultat de Roberval.

El primer que va demostrar que la longitud d'un arc complet de cicloide és igual a quatre vegades el diàmetre del cercle generador, va ser Christoffer Wren, el 1658.[7] A *Horologium*, després, de la proposició VII, part III, Huygens fa uns comentaris històrics i diu:

> Aquest excel·lent geòmetra anglès, Christopher Wren, va descobrir per primera vegada aquesta propietat de la cicloide [longitud] per un altre camí llarg, i després va confirmar el seu resultat per una elegant demostració, que ha estat publicada en un llibre sobre la cicloide pel més destacat dels homes, John Wallis.
>
> [Parla, a continuació, de la contribució de Pascal que hem comentat a la pàgina 12 i li dona prioritat sobre el càlcul dels centres de gravetat, i acaba reivindicant un dels seus resultats tot dient:]
>
> [...] També he estat el primer a trobar la mesura [àrea] d'una porció de la cicloide, limitada per una línia paral·lela a la base, a través d'un punt de l'eix, que es pren a una quarta part de la distància del vèrtex, la qual cosa, òbviament,[8] és igual a la meitat de l'àrea de l'hexàgon equilàter inscrit al cercle generador [es quadra l'àrea perquè és igual a l'àrea d'una figura rectilínia].

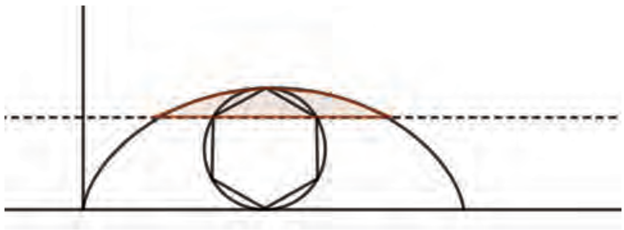


Figura 7. Àrea sota la cicloide a 1/4 del vèrtex.

7. En donem una prova més endavant, en la secció 4.4.
8. Si la cicloide és $x = R(t - \sin(t)), y = R(1 - \cos(t))$, llavors l'àrea demanada és

$$\int_{t_0}^{t_1} x dy = \int_{t_0}^{t_1} (t \sin(t) - \sin^2(t)) dt,$$

amb $t_0 = 2\pi/3 = -t_1$. El resultat d'aquesta integral no em sembla obvi, però els càlculs donen $3\sqrt{3}R^2/4$, com diu Huygens.

4. La cicloide a l'*Horologium*

Donem en aquesta secció els càlculs de la tangent, la normal, l'evoluta i la longitud de la cicloide tal com apareixen en l'*Horologium*.

4.1. Tangent a la cicloide

El traçat de la tangent en un punt de la cicloide es basa en el lema tècnic següent.[9]

Lema 2 (lema previ). *Per a qualsevol punt E de la cicloide tracem la paral·lela a la base que talla la circumferència generatriu corresponent al punt màxim B en un punt G. Llavors EG* $=$ arc *GB.*

Demostració. Per tal com es construeix la cicloide, es compleix que $AK = \text{arc}\, EK$. Però, clarament, $\text{arc}\, EK = \text{arc}\, GD$. Anàlogament, $AD = \text{arc}\, DGB$. Per tant,

$$KD = AD - AK = \text{arc}\, DGB - \text{arc}\, GD = \text{arc}\, GB$$

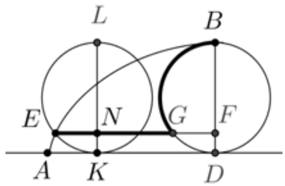


Figura 8. Proposició XIV de l'*Horologium*.

Com que $KD = EG$, hem acabat. □

Ara ja estem en condicions de construir la tangent. Ens basarem en la figura de la proposició XV de l'*Horologium*.

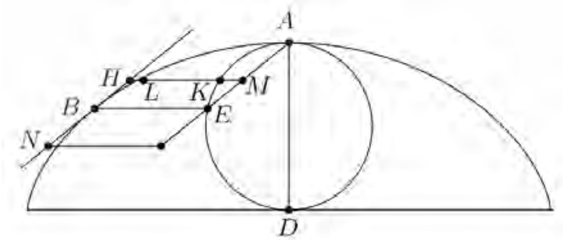


Figura 9. Proposició XV de l'*Horologium*.

Teorema 3. *Amb la notació de la figura, la tangent a la cicloide en el punt B és la recta pel punt B paral·lela a la recta AE.*

9. En aquesta secció mantenim la notació de Huygens. La construcció de la tangent que dona Huygens és gairebé la mateixa que la de Descartes, que potser coneixia a través del seu pare, no ho sé; tot i que Descartes construeix primer la normal i després la tangent. No obstant això, la justificació del resultat és totalment diferent. Huygens utilitza el lema 2 i Descartes imagina que el que gira no és una roda, sinó un polígon (i després imagina que el polígon té cent mil milions de costats!).

Demostració. La paral·lela a la base pel punt B (figura 9) talla la circumferència generatriu en el punt E. Prenem un punt H sobre la recta per B paral·lela a la recta AE. La paral·lela a la base per H talla la cicloide en L, a la circumferència generatriu en K i al segment AE en M. Sabem que $KL = \text{arc}\,AK$. Es compleix també que $MK < \text{arc}\,KE$.[10] Per tant,

$$ML = MK + KL < \text{arc}\,KE + \text{arc}\,AK = \text{arc}\,AE = BE = HM.$$

Com que $ML < MH$, el punt H és exterior a la cicloide. Fem un argument semblant per al punt N de la figura. Per tant, la recta per B paral·lela a AE només té un punt en comú amb la cicloide i és, doncs, la seva tangent. □

4.2. Normal a la cicloide

Com que l'angle inscrit que abraça un diàmetre és recte, per traçar la normal a l'evoluta per B només hem d'unir B amb el punt de contacte K de la circumferència generatriu per B amb l'eix horitzontal.

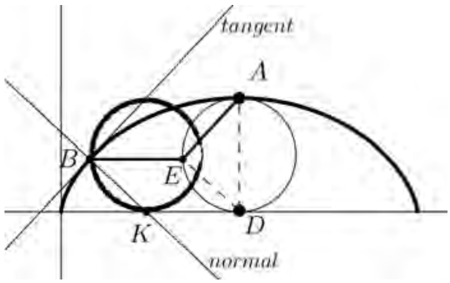


Figura 10. Construcció de la normal.

4.3. L'evoluta de la cicloide

Les construccions que acabem de comentar de la tangent i la normal permeten ara a Huygens veure que l'*evoluta d'una cicloide és la mateixa cicloide* traslladada. En efecte, si posem una cicloide sobra una altra, simplement traslladant-la, de tal manera que la base de la segona sigui la tangent al vèrtex de la primera, amb la circumferència generatriu desplaçada mig arc, llavors les tangents de la primera són perpendiculars a la segona (prop V, part III).

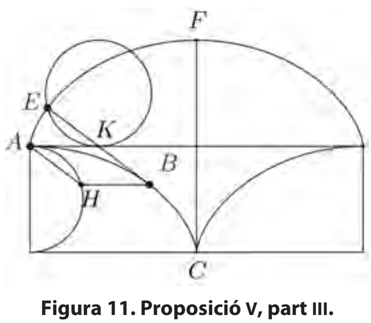


Figura 11. Proposició V, part III.

10. Huygens no en fa cap comentari, però aquesta desigualtat es dedueix del fet que $\angle MEK < \angle EMK$ (en tot triangle, al major costat s'hi oposa el major angle i, per tant, $MK < KE$). Per veure que $\angle MEK < \angle EMK$ observem que $\angle EMK = \angle ADE$ perquè tenen costats perpendiculars i que $\angle MEK$ és menor que l'angle que forma AE amb la tangent a la circumferència en E; però aquest angle és igual a $\angle OED = \angle ADE$, on O és el centre de la circumferència.

En efecte, amb la notació de la figura i seguint Huygens, només hem de veure que la tangent BK (paral·lela per B a HA) talla perpendicularment la cicloide de dalt. Això és degut a que si es considera la circumferència tangent a AK per K, amb el mateix radi que la circumferència generatriu, se sap, pel lema 2, que $AK = HB = \text{arc}\, AH$. Com que $\angle EKA = \angle KAH$, es compleix que $\text{arc}\, AH = \text{arc}\, KE$.

Per tant, $AK = \text{arc}\, KE$, la qual cosa implica que E pertany a la cicloide i per la propietat de com es traça la normal, secció 4.2, la recta EK és normal a la cicloide superior (i tangent a la inferior). La cicloide superior és, doncs, la involuta de la inferior, com es volia veure.

4.4. Longitud de la cicloide

El dibuix següent (figura 12), d'una cicloide i la seva desenvolupada, o d'una cicloide i la seva evoluta, depèn de com es miri, demostra directament que la longitud d'un arc complet de cicloide és vuit vegades el radi del cercle generador.

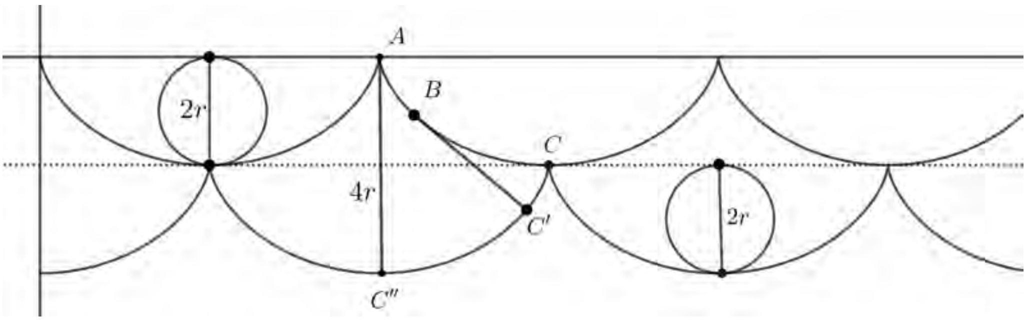


Figura 12. Evoluta de la cicloide.

En efecte, la mitja cicloide ABC es desenvolupa des de A passant per ABC' fins a arribar a AC''. Com que el moviment de C genera la cicloide inferior, ha de ser $AC'' = 4r$ i, per tant, $ABC = 4r$.

Longitud d'un segment de cicloide

En una carta del 1659 Huygens diu que el resultat de Wren és un gran invent perquè potser la cicloide és l'única corba que es pot rectificar, és a dir, que se'n pot calcular la longitud (trobar un segment amb la mateixa longitud que la corba), i a la mateixa carta diu que ha generalitzat el mètode de Wren. L'ha generalitzat en el sentit que sap calcular la longitud d'un segment arbitrari de cicloide, no necessàriament tot l'arc de cicloide.

Aquesta construcció l'explica molt bé Flemming Sloth a [9]. Huygens demostra, no a l'*Horologium*,[11] amb la notació de la figura, que l*a longitud de l'arc d'evoluta AG és el doble de la longitud de la corda AB* (que implica que la longitud de mitja cicloide AH és dues vegades el diàmetre).

11. Vegeu [5], vol. XIV, p. 363-367.

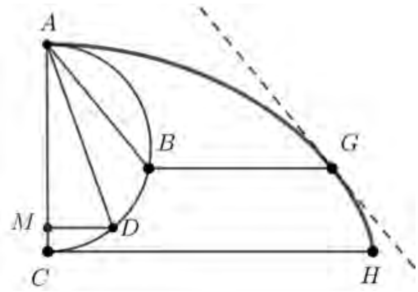


Figura 13. Longitud de la cicloide.

Per a això traça la bisectriu *AD* de $\angle BAC$ i considera el punt *M* projecció de *D* sobre l'eix.

Llavors demostra, fent una aproximació tipus Arquimedes, que podeu trobar a l'article de Sloth abans esmentat, que l'arc de cicloide *GH* és igual a quatre vegades *MC*.

Com que

$$MC = 1 - \frac{AB}{2},$$

com provem a la nota següent, tenim que

$$\text{arc}\, AG = \text{arc}\, AH - \text{arc}\, GH = 4 - \text{arc}\, GH = 4 - 4(1 - \frac{AB}{2}) = 2AB.$$

Nota. [*Propietat de cordes i bisectrius en un cercle*] Huygens utilitza la igualtat

$$MC = 1 - \frac{AB}{2},$$

on *B* és un punt qualsevol del cercle de diàmetre *AC*, *D* és la intersecció amb el cercle de la bisectriu de l'angle $\angle BAC$ i *M* és la projecció ortogonal de *D* sobre el diàmetre *AC*. Suposarem que el radi del cercle és 1.

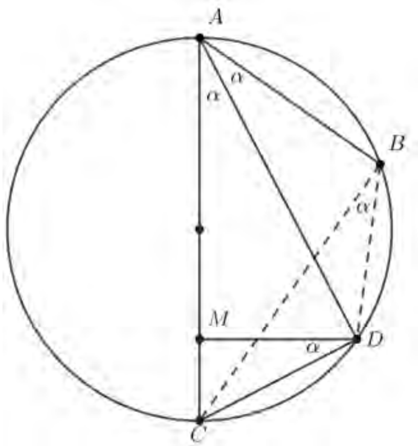


Figura 14. Cordes i bisectrius.

Això es pot veure així per la propietat dels angles inscrits, el triangle CDB és isòsceles amb angle α a la base. Pel teorema del sinus

$$\frac{CD}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin(\pi - 2\alpha)} = \frac{BC}{\sin(2\alpha)} = 2.$$

Com que també $\angle CDM = \alpha$, tenim que $\sin\alpha = MC/CD$. Per tant, $MC = 2\sin^2(\alpha)$, i així

$$1 - \frac{AB}{2} = 1 - \cos(2\alpha) = 2\sin^2(\alpha) = MC. \qquad \square$$

5. Evoluta de la paràbola (*Horologium*)

Huygens, per calcular l'evoluta de la paràbola,[12] demostra que el centre de curvatura D de la paràbola en un punt B d'aquesta és el punt sobre la normal a la paràbola en B, la qual és fàcil de construir, a distància

$$\rho = BD = BM + 2BZ, \tag{1}$$

on Z i M són els punts d'intersecció de la normal amb els eixos de coordenades, com indica la figura.

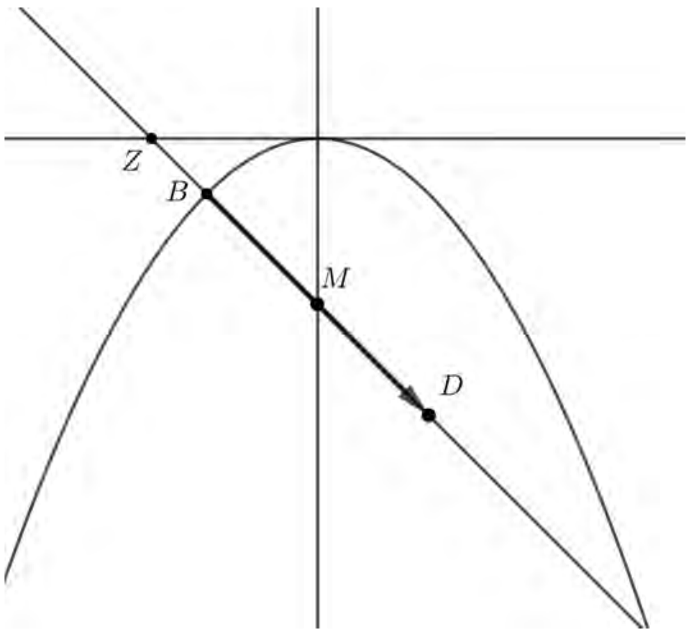


Figura 15. Centre de curvatura en un punt d'una paràbola.

12. A la proposició XI de la part III de l'*Horologium* calcula evolutes en general i posa la paràbola com exemple.

Per demostrar la igualtat (1), Huygens procedeix de la manera següent.

1. Primer traça la tangent a la paràbola per *B*. Per a això construeix *K* com la intersecció amb l'eix de la paràbola amb la recta horitzontal per *B* i a continuació determina *H* sobre l'eix amb la condició $AH = AK$ (vegeu la figura següent).
2. Ara utilitza una propietat coneguda de les paràboles que diu que les paràboles de *latus rectum a* ($y = ax^2$) compleixen que $KM = \frac{1}{2}a$, on *M* és la intersecció amb l'eix de la normal a la paràbola per *B*. Com que això és cert per a qualsevol punt de la paràbola, tenim també que $LN = \frac{1}{2}a$, on *N* és la intersecció amb l'eix de la normal a la paràbola per un punt arbitrari *F* de la paràbola i *L* és la intersecció amb l'eix de la recta horitzontal per *F*. Això implica que $MN = KL$. Observem que, amb la notació de la figura, també $MN = KL = BP$.

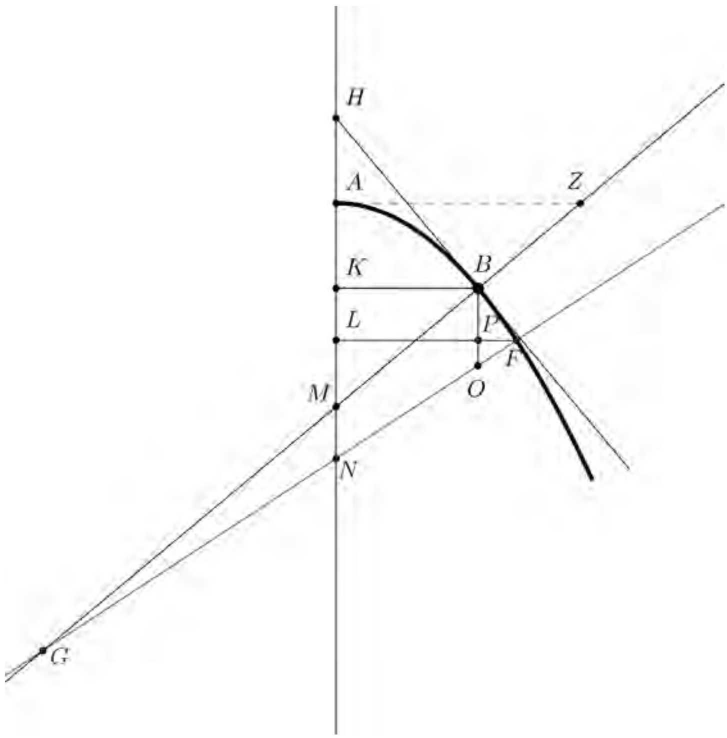


Figura 16. Reproducció de la figura de l'*Horologium*, proposició XI, llibre III.

3. Pel teorema de Tales des de *G*, intersecció de les dues normals, tenim que

$$\frac{GB}{GM} = \frac{BO}{MN},$$

amb *O* intersecció de la normal per *F* amb la paral·lela a l'eix per *B*.

4. Com que farem tendir el punt *F* a *B*, podem suposar que *F* pertany a la tangent per *B*. Això està d'acord amb la definició de tangent com a límit de les secants. Apliquem ara el teorema de Tales al «triangle» *HNF* i tenim

$$\frac{HN}{HL} = \frac{BO}{BP} = \frac{BO}{MN},$$

i, per tant,

$$\frac{HN}{HL} = \frac{GB}{GM} \tag{2}$$

5. Novament pel teorema de Tales, tenim que

$$\frac{BZ}{AK} = \frac{MB}{MK}.$$

Posant $B = (b, ab^2)$, tenim:

$$\frac{BZ}{ab^2} = \frac{MB}{a/2}$$

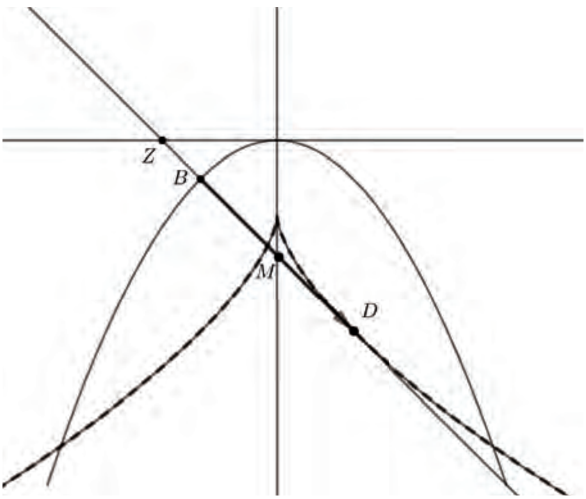
Per tant, utilitzant (2) i com que $HK = 2AK = 2ab^2$, tenim

$$BZ = 2b^2(GB - GM) = 2b^2MG\left(\frac{HN}{HL} - 1\right)$$
$$= 2b^2\,MG\,\frac{LN}{HL} = 2b^2\,MG\,\frac{a/2}{KL + 2ab^2}.$$

Si ara fem tendir F a B, la qual cosa implica que $KL \to 0$ i $G \to D$, aquesta fórmula ens diu que

$$BZ = \frac{1}{2}MD.$$

I, per tant, $BD = BM + 2BZ$, com volíem.



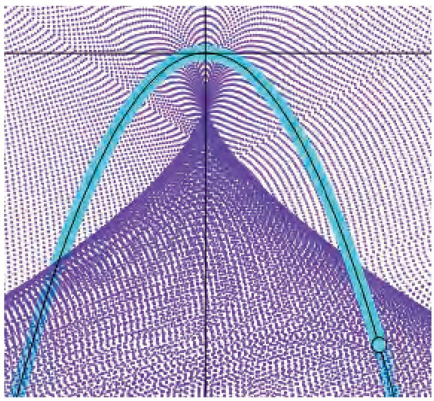


Figura 17. Evoluta de la paràbola.

Per acabar aquesta nota, comentem sense gaire detalls alguns resultats més relacionats amb evolutes.

A. Càustiques

Les càustiques també es poden considerar com evolutes, ja que *tota càustica és evoluta de l'ortotòmica.*

Recordem que la càustica d'una corba *C* respecte d'un punt *O* és l'envolupant dels rajos lluminosos provinents de *O* (focus), reflectits per *C*.

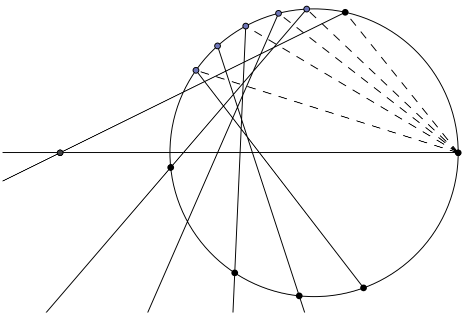
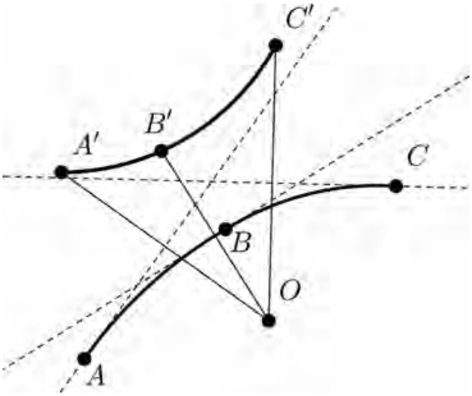


Figura 18. Càustica.

L'ortotòmica d'una corba *C* respecte d'un punt *O* és el lloc geomètric dels simètrics d'*O* respecte de les tangents a *C*.

Es pot veure que aquesta definició és equivalent a la següent: l'ortotòmica d'una corba *C* respecte d'un punt *O* és l'envolupant de les circumferències amb centre sobre *C* i que passen per *O*.



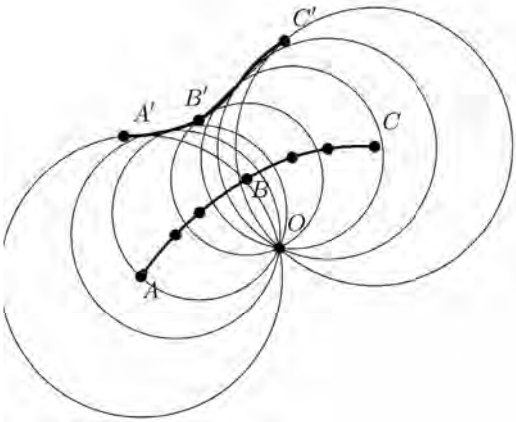


Figura 19. Ortotòmica.

La figura mostra de manera intuïtiva que, en construir la càustica, el raig *OP* surt reflectit en la direcció de la recta $O'P$. En el límit, quan O' descriu l'ortotòmica, el diàmetre $O'P$, per tant, ortogonal al cercle, és també ortogonal a l'ortotòmica.

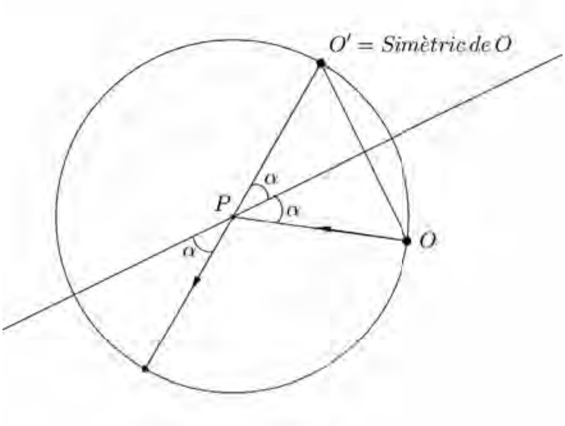


Figura 20. Càustica i ortotòmica.

Per exemple, si la corba *C* inicial és un cercle i el punt *O* pertany a aquest cercle, la càustica és la cardioide.

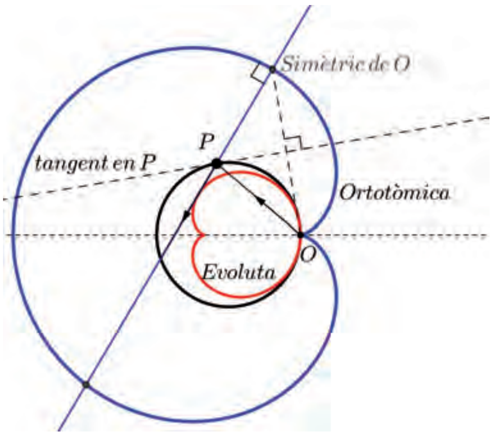


Figura 21. Cardioide.

B. Evolutes de corbes de doble curvatura

El primer article de Gaspard Monge (1746-1818) va estar dedicat a generalitzar el concepte d'evoluta de corbes planes al concepte d'evolutes de corbes a l'espai, corbes de doble curvatura amb la terminologia de l'època.

La definició de Monge és la següent: l'*evoluta* d'una corba $x(s)$ de l'espai és una altra corba $y(s)$ (la *involuta*) tal que $x(s)$ està continguda en la desenvolupable tangencial[13] de $y(s)$ i la

13. La *desenvolupable tangencial* d'una corba és la superfície reglada formada per les tangents a aquesta corba.

tangent a $y(s)$ pertany al pla normal a $x(s)$ en el punt corresponent. Si desenrotllem un cordill prèviament embolicat a $y(s)$, mantenint-lo en la superfície de les tangents, obtenim $x(s)$.

Podeu trobar aquest tema desenvolupat a [8].

C. Evolutes de superfícies

La generalització de la idea de considerar la família de rectes normals a una corba plana donada, la generalitza Monge al cas de superfícies. Veu que si considerem les normals a una superfície al llarg d'una línia de curvatura, obtenim una superfície desenvolupable, és a dir, una superfície reglada amb curvatura de Gauss zero, o, equivalentment, una superfície reglada tal que el pla tangent és constant al llarg de les generatrius. En aquest cas, totes les rectes són tangents a una corba, de doble curvatura, que es diu *eix de regressió*.

La distància al llarg de la normal entre la superfície i l'eix de regressió és el radi de curvatura principal.

Podeu trobar aquest tema desenvolupat a [8].

Bibliografia

[1] Pedro Miguel González Urbaneja (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid: Alianza Universidad.

[2] Christiaan Huygens (1651). Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro quibus subjuncta est exetatis cyclometriae Cl. viri Gregorii a St Vincentino. *Leiden*, p. 12-13. Dins *Oeuvres completes*, vol. XI, *Travaux mathematiques*. La Haia, 1645-1651.

[3] Christiaan Huygens (1657). De Ratiociniis in Ludo Aleae. Leiden, p. 50-91. *Oeuvres completes*, vol. XIV (neerladès i francès). https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k77862v.r=''22ratiociniis in ludo aleae''?

[4] Christiaan Huygens (1673). *Horologium oscillatorium, siue, de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. París: Apud F. Muguet.

[5] Christiaan Huygens (1889). *Oeuvres complètes*. La Haia: Société Hollandaise des Sciences.

[6] John Martin (2010). The Helen of Geometry. *College Mathematics Journal*, 41, n. 1: 17-27. Premi George Pólya 2011.

[7] Blaise Pascal (1658). Histoire de la Roulette, appellée autrement La Trochoïde ou la Cicloïde. Dins *Oeuvres de Blaise Pascal, Hachette 1914*, p. 195-209.

[8] Agustí Reventós, Gaspard Monge (2018). *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 33.

[9] Flemming Sloth. Chr. Huygens's Rectification of the Cycloid (1969). *Centaurus*, n. 3-4: 278-284.