La multidimensionalitat de l'àlgebra escolar. Una proposta d'itinerari didàctic

Abraham de la Fuente i Jordi Deulofeu
Universitat Autònoma de Barcelona

Resum

Si aconseguim que els nostres alumnes no ignorin el significat dels símbols que fan servir, aconseguirem també que puguin usar el llenguatge algebraic com una eina apta per a comprendre i expressar generalitzacions, captar connexions estructurals, argumentar en matemàtiques i, en definitiva, resoldre problemes. En aquest article volem presentar un itinerari d'aprenentatge de l'àlgebra que té per objectiu aconseguir un equilibri entre les diferents concepcions dels símbols que l'alumnat vagi assumint a través de situacions significatives variades que els ajudin a comprendre la pertinència del llenguatge algebraic, la seva estructura i el significat dels conceptes fonamentals, amb l'objectiu que siguin capaços de mobilitzar el raonament algebraic per resoldre problemes.
Les idees que expressem en aquest article són fruit de les reflexions i les conclusions que el primer autor va fer durant la seva tesi doctoral, tutoritzada pel segon autor de l'article. La tesi es titulava «Construcció del llenguatge algebraic en un entorn de resolució de problemes» i es va defensar el novembre de 2016 a la Universitat Autònoma de Barcelona.

Abstract

If we can help students understand the meaning of the algebraic symbols they use, we can teach them to use the language as a tool to understand and express general relationships, structural connections, mathematical arguments and, ultimately, to solve problems. Here we present a proposal for teaching algebra aimed at achieving a balance between the different conceptions of the symbols that students learn to work with, through situations with diverse meanings that help them understand the relevance of the algebraic language, its structure, and fundamental concepts. The final goal is to be able to employ algebraic reasoning to solve problems.
The ideas expressed in this paper come from reflections and conclusions that the first author made during his doctoral thesis, which was tutored by the second author of the article. This thesis was entitled, «Construction of algebraic language in a problem-solving environment», and was defended in November 2016 at the Autonomous University of Barcelona.

Introducció

Podríem intentar copsar en una sola frase què entenem per àlgebra escolar dient que l'àlgebra és aquella part de les matemàtiques que estudia les relacions entre objectes matemàtics (nombres, funcions, figures geomètriques...) i les expressa usant simbolismes. Tot i que aquesta sentència no deixa del tot clara la multidimensionalitat d'aquest llenguatge, sí que posa en relleu la importància que té el significat (versus la sintaxi) dins d'aquest llenguatge que volem que els nostres alumnes aprenguin a utilitzar. També hem de tenir en compte que el llenguatge algebraic haurà de jugar un paper crucial com a transmissor de les idees entre professor i alumne durant el procés de resolució de problemes (Vila i Callejo 2004, pàg. 34).

Molts autors han donat versions diferents sobre el que hauria de ser l'àlgebra escolar. Malgrat els diferents enfocaments i la diversitat de definicions, el que tenen en comú és que totes afirmen que hi ha diverses formes de raonament algebraic i que totes s'han de desenvolupar si volem que el nostre alumnat construieixi el llenguatge algebraic en un sentit ampli. És per això que diem que l'aprenentatge del llenguatge algebraic té un caràcter multidimensional.

L'objectiu d'aquest article és, per tant, fer una proposta de categories d'aquest llenguatge que ens ajudi a desenvolupar un itinerari d'aprenentatge. Com que el nostre enfocament de l'ensenyament és la construcció del llenguatge algebraic en un entorn de resolució de problemes, hem caracteritzat les dimensions d'aquest llenguatge en termes de capacitats, atenent així a un llenguatge que ens ajudi també a mostrar l'enfocament competencial d'aquest aprenentatge. La definició d'àlgebra, la basarem, doncs, en aquelles que millor s'adapten a aquestes necessitats: Kaput (2000) i NCTM (2000). A més, no podem deixar de tenir en compte la necessitat de desenvolupar en els nostres alumnes les habilitats implícites en l'Early Algebra (Kieran, 2004) a causa del nostre posicionament constructivista de l'aprenentatge.

Així doncs, a partir d'ara ens referirem a les dimensions de l'àlgebra escolar de la manera següent: l'àlgebra escolar serà un llenguatge simbòlic que ha de servir per a:

- Generalitzar i formalitzar.
- Representar estructures abstractes i fer càlculs amb elles.
- Estudiar relacions i funcions.
- Modelitzar.

La nostra elecció d'aquestes dimensions es basa en la idea que per poder construir el coneixement necessari per desenvolupar les habilitats de la següent dimensió serà necessària una certa habilitat en els processos implicats en les anteriors dimensions. Això quedarà clar i justificat amb els problemes d'exemple que anirem considerant en els següents apartats, en els quals veurem amb més detall a què fa referència cadascuna de les categories del llenguatge algebraic.

Early Algebra

Segons l'època i la tendència del moment, el llenguatge algebraic s'ensenyava als alumnes en diferents moments de la seva escolaritat. Va haver-hi un temps en què els símbols s'introduïen al més a l'inici possible i els últims anys s'ha tendit a fer-ne la introducció al més tard possible. El que ens diu l'experiència és que hi ha alumnes que estan preparats per fer servir el llenguatge algebraic molt d'hora i d'altres que fan servir els símbols de forma natural més tard. El que la recerca ens diu avui dia és que hi ha un conjunt d'habilitats de pensament algebraic que són necessàries per desenvolupar el llenguatge algebraic. Aquestes habilitats formen part del moviment que es coneix com a Early Algebra i estem d'acord que com abans es comencin a treballar millor.

D'acord amb Kieran (2004) i Kaput (2008), aquestes habilitats es podrien resumir dient que l'alumne ha de ser capaç de:

1. Identificar relacions aritmètiques.
2. Argumentar la solució d'un problema que sap solucionar.
3. Reconèixer les operacions inverses i saber usar-les per resoldre problemes.
4. Identificar els diferents significats del signe igual i, en general, de la resta de símbols.
5. Construir generalitzacions des raonaments aritmètics i quantitatius.
6. Descriure la variació (primeres idees sobre el concepte de funció).
7. Fer servir aquestes habilitats per expressar models.

És evident que un mateix alumne pot estar a diferents nivells en cadascuna de les habilitats esmentades, i també és veritat que no cal que l'alumne tingui desenvolupades totes les habilitats al mateix nivell abans de començar a treballar amb el llenguatge simbòlic. Però sobretot en l'inici de l'ús del llenguatge algebraic, els professors de secundària hauríem de tenir molt presents aquestes habilitats per estar atents a les oportunitats d'aprenentatge que es donin a l'aula i que ens portin en la direcció de millora.

Generalitzar i formalitzar

Creiem que el simbolisme del llenguatge algebraic s'ha de començar a construir fent servir tasques de generalització. El llenguatge algebraic necessari per generalitzar sorgeix en el moment en què es té la necessitat de comunicar patrons, ja siguin numèrics o geomètrics, o quan intentem expressar les lleis que governen les relacions numèriques.

És per això que creiem que les tasques que el professor proposa a classe han d'animar els alumnes a interaccionar entre ells, a exposar els resultats en petits grups i després amb tot el grup classe. D'aquesta manera podrem aconseguir que per comunicar-se tinguin la necessitat de posseir un llenguatge prealgebraic o algebraic comú. Aquesta emergència es donarà les primeres vegades en la fase sincopada d'aquest llenguatge.

Per exemple, considerem el problema següent (Mason, Burton i Stacey 1992, p. 77):

(SUMES CONSECUTIVES)

Alguns nombres es poden expressar com a suma d'una successió de nombres positius consecutius. Exactament quins números tenen aquesta propietat? Per exemple, s'observa que:

9 = 2 + 3 + 4
11 = 5 + 6
18 = 3 + 4 + 5 + 6

Aquest problema així proposat ja és de per si un problema ric que donarà molt de joc i que es podria proposar a molts nivells diferents. A nosaltres el que ens interessa és com el podem utilitzar per ajudar els nostres alumnes a construir el llenguatge algebraic necessari per generalitzar. Si proposem aquest problema a l'aula, els alumnes convencionalment voldran fer unes quantes proves que els serviran per a entendre l'enunciat. Si l'atenció sobre el problema es manté el temps suficient, és molt probable que algun alumne acabi fent la següent conjectura: «Amb els nombres senars sempre es pot». Aquest alumne està intentant generalitzar, ja que observa certs aspectes comuns en diferents casos particulars i ignora, en canvi, altres aspectes. Ara, un cop formulada, aquesta conjectura ha de ser investigada per veure si la podem confirmar o no (Mason, Burton i Stacey 1992, p. 35).

Per demostrar aquesta conjectura, l'alumne haurà de referir-se a tots els nombres imparells alhora d'alguna manera. I aquí serà on el professor haurà de jugar el seu paper i intentar que els alumnes arribin a escriure l'expressió $2n + 1$ com a generalització dels nombres imparells. Fins i tot es pot aprofitar per oferir una altra representació dels nombres parells i senars (figura 1), que al seu torn podria combinar el treball amb els alumnes de la segona dimensió de l'àlgebra escolar, la qual tractarem en l'apartat següent.

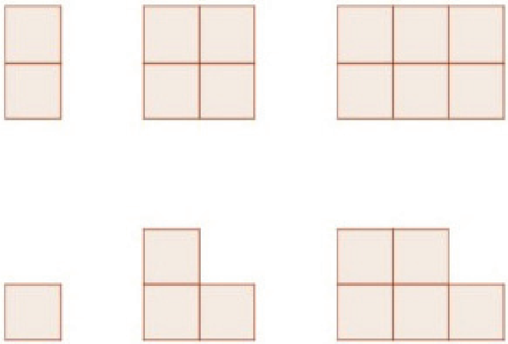

Figura 1. Representació geomètrica dels nombres parells i senars.

D'altra banda, si tenim posat el focus en les argumentacions dels alumnes, serà fàcil convèncer-los que el llenguatge algebraic també els ha de servir per a formalitzar les seves argumentacions. Per exemple, quan proposem als nostres alumnes que resolguin el següent problema de demostració (Azcárate i Deulofeu, 1998):

És clar que els rectangles ratllats de la figura no són iguals. Però, en canvi, tenen la mateixa àrea. Argumenta-ho!

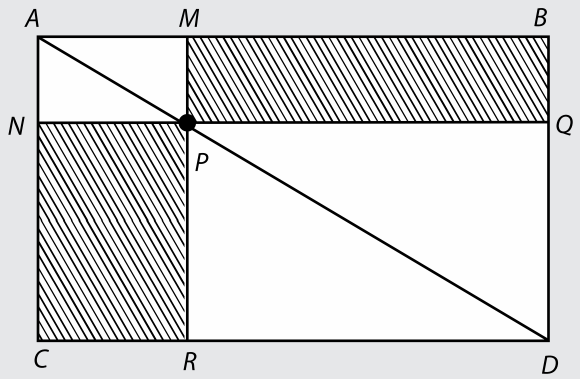

Figura 2. Rectangles diferents, però de la mateixa àrea.

Després de treballar una bona estona amb l'argumentació de forma oral, si volem fer la següent part de la tasca i així aprofitar per ajudar-los a construir el llenguatge necessari per a formalitzar, podríem demanar als alumnes que escriguin les seves argumentacions amb les seves pròpies paraules. Un cop ens hem assegurat que un alumne té la seva argumentació ben escrita, la segona part de la tasca consisteix a utilitzar les frases que tenim a continuació per tornar a escriure una argumentació que sigui correcta (ordenant-les, òbviament):

Area MBPQ = Area NPRC | Area ACD = Area ADB

La diagonal divide el rectángulo en dos partes iguales

ya que | Area MAP = Area ANP | porque

Area ABD = Area AMP + Area MPQB + Area PQD

Area ACD = Area ANP + Area NPCR + Area PRD

La diagonal divide el rectángulo en dos partes iguales

La diagonal divide el rectángulo en dos partes iguales

Por tanto | El mismo | Por tanto

y | Area PRD = Area PQD

Figura 3. Frases per ordenar i per construir una argumentació formal (Azcárate i Deulofeu, 1998).

D'aquesta manera, estem modelant i fent una aproximació als alumnes de quin és el tipus de llenguatge que fem servir els matemàtics per fer demostracions formals.

Representar estructures abstractes i fer càlculs amb elles

D'acord amb Schoenfeld i Arcavi (1988, p. 420), «el significat que tenen els objectes matemàtics es troba determinat més pels contextos en què es fan servir que no per les regles formals amb què s'usen». Si el que volem és aconseguir que l'àlgebra tingui un significat subjacent per als nostres alumnes, hem d'aconseguir que tinguin moltes experiències usant-la com un llenguatge que serveixi per a representar objectes matemàtics. És difícil que els alumnes s'apropiïn d'aquests objectes abstractes sense haver experimentat amb una diversitat de representacions dels mateixos. En termes de la teoria piagetiana, només en l'etapa de les operacions formals es pot esperar que per a l'alumne desaparegui la dependència dels referents concrets (Socas i Palarea, 1997, p. 11). Explicarem aquesta dimensió dividint-la en dos parts: canvis de representació i resolució d'equacions.

Canvis de representació

El nostre primer exemple de canvi de representació ja l'hem vist en la tasca suggerida per la figura 1.1; és a dir, l'àlgebra constitueix un llenguatge que, a més de servir per a formalitzar generalitzacions, ha d'ajudar els nostres alumnes a comprendre com relacionar patrons geomètrics amb expressions simbòliques. Un altre exemple de tasca podria ser proposar a les nostres alumnes que utilitzin la figura 1.4 per argumentar la següent igualtat algebraica:

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Per tant, necessitem que els nostres alumnes aprenguin a canviar la representació d'objectes matemàtics (en aquest cas una figura) i els símbols amb una certa fluïdesa.

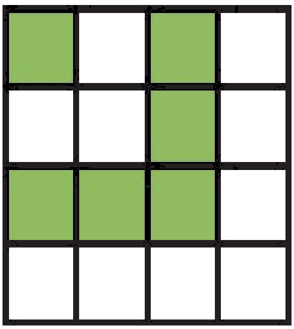

Figura 4. Demostració visual que $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$.

Però és clar que necessitem també que els alumnes aprenguin a fer càlculs amb aquests símbols, per exemple, per comprovar l'equivalència entre diferents expressions. El següent problema és un bon exemple de com a través de la resolució d'un problema es pot aconseguir crear la necessitat de construir aquesta dimensió del llenguatge algebraic.

Quants quadradets té la figura 5 sobre la seva zona perimetral?

Quants quadradets tindria sobre la seva zona perimetral la figura anàloga que té 37 quadradets de costat? Escriu en forma d'operació combinada els càlculs que has necessitat i argumenta la resposta.

Podries proposar una fórmula que serveixi per a calcular el nombre de quadradets de la zona perimetral de qualsevol figura com aquesta?

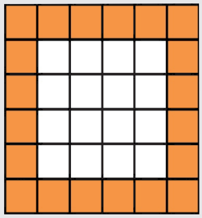

Figura 5. Comptem quadrats.

Aquest problema es podria desenvolupar a l'aula en diferents etapes. La primera i la segona, que corresponen a les primeres preguntes del problema, són dos casos particulars que serveixen per a assegurar que els alumnes entenen el problema i que són capaços de realitzar un càlcul concret i de particularitzar el problema en un cas més gran. És molt important demanar l'estratègia que han fet servir per fer el càlcul. Així és com fàcilment podrem demanar que generalitzin i que ens diguin com farien el càlcul per a un quadrat de qualsevol mida. És molt probable que, respecte del llenguatge algebraic, les argumentacions les facin usant l'àlgebra retòrica com a mitjà. És en aquests moments que hem de compartir els diferents mètodes de càlcul i així podrem escriure les diverses expressions algebraiques que hem anat obtenint. A la figura 6 tenim un exemple amb totes les generalitzacions que es van obtenir durant la resolució d'aquest problema amb una classe de 1r d'ESO.

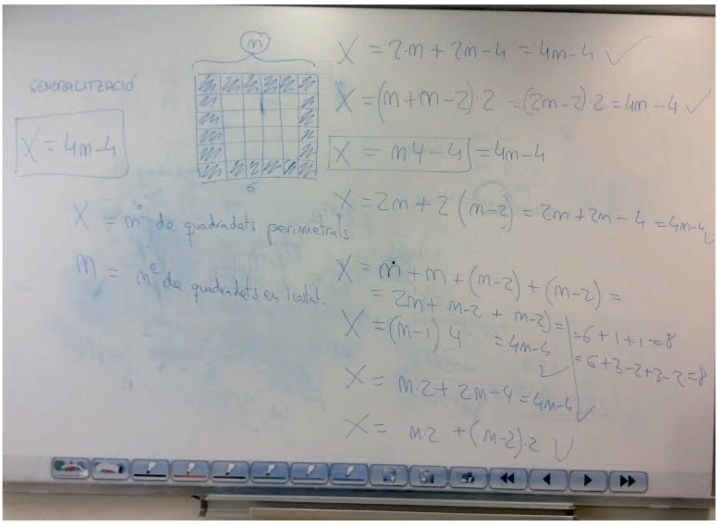

Figura 6. Generalitzacions del problema obtingudes per una classe de 1r d'ESO.

Un cop hem recollit totes les generalitzacions, serà el moment en què sortirem de la dimensió de generalització i podrem entrar en el càlcul usant estructures abstractes. Podem mantenir viu el significat de les lletres durant molta estona i, a més, podrem anar introduint els alumnes en la manipulació de les lletres i en les operacions amb lletres. Per exemple, aquest és un problema per començar a posar en comú diverses maneres d'expressar un producte en àlgebra: $2 \cdot n$, $2 \times n$ o $2n$.

Aquest problema té encara una contribució més al desenvolupament del llenguatge algebraic: la resposta al problema és una fórmula, una expressió algebraica no tancada, i no una quantitat concreta. També podrem aprofitar aquest problema per treballar el concepte de variable i evitar així acabar treballant les lletres sense tenir en compte els múltiples significats que tenen (Schoenfeld i Arcavi, 1988). Això ens permetrà connectar fàcilmentel problema amb la següent categoria del llenguatge algebraic: l'estudi de relacions i funcions.

Resolució d'equacions

Resoldre problemes mitjançant equacions no és només la forma històrica en què es va desenvolupar el llenguatge algebraic, sinó també una activitat fonamental en tots els currículums de matemàtiques del món. Per exemple, traduir enunciats verbals en equacions consisteix en la transició de l'aritmètica cap a l'àlgebra en termes de simbolismes ben raonats.

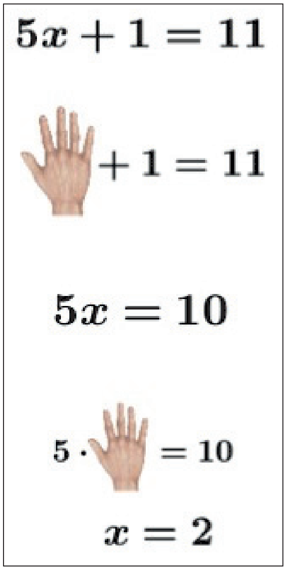

Figura 7. Resolució d'una equació de primer grau usant la tècnica del Cover-up.

És molt important tenir en compte que en la resolució d'equacions els símbols prenen uns significats molt concrets. Si no tenim això en consideració, podem induir els nostres alumnes a obstacles d'aprenentatge (Socas i Palarea, 1997). Per no caure en aquestes trampes, creiem que és millor presentar la resolució d'equacions a través d'un ventall de models que alhora ens serveixin per a mantenir aquesta visió de les múltiples representacions dels objectes matemàtics que volem ressaltar en aquest article.

Creiem que un bon model per començar a construir tècniques de resolució d'equacions amb els nostres alumnes és la coneguda com a Cover-up. A la figura 7 tenim un exemple resolt usant aquesta tècnica de resolució d'equacions. Observem que per poder fer servir aquesta tècnica de resolució, l'alumne ha de tenir un bon control sobre la prioritat de les operacions i sobre l'ús d'operacions inverses (Early Algebra). A més, ha d'haver assumit el significat dels símbols que apareixen en una equació i quin és el paper que estan jugant en cada cas. És a dir, l'alumne haurà d'haver assumit les habilitats pròpies de l'Early Algebra a partir, per exemple, de les seves experiències aritmètiques prèvies.

S'ha de tenir en compte que aquesta estratègia de resolució d'equacions només funcionarà quan la incògnita aparegui una vegada en l'equació. En canvi, ens servirà per a introduir no només la resolució d'equacions de primer grau, sinó també per a altres tipus d'equacions més complexes; o bé, sense haver de parlar de mètodes específics, per a resoldre, per exemple, equacions de segon grau. No hi hauria d'haver cap problema perquè aquesta sigui una de les primeres equacions que els nostres alumnes han de resoldre (Calvo i altres, 2016):

$$\sqrt{\frac{80}{x^2+1}} = 4$$

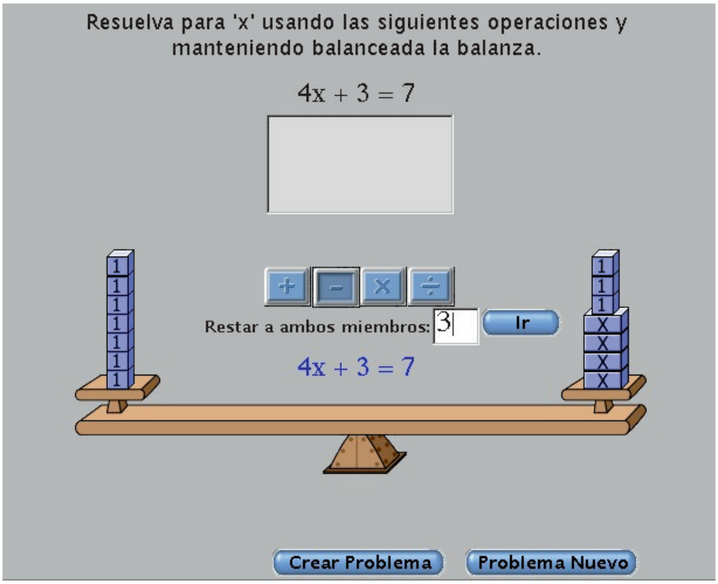

Figura 8. ***Applet*** **de la balança per resoldre equacions de primer grau desenvolupat per la universitat de Utah.**

D'altra banda, i creiem que aquí és on resideix la màxima potència del mètode, aquesta estratègia no és només un camí per resoldre equacions, sinó que també suggereix una forma de registrar el procés, d'argumentar la solució. Com ja hem dit diverses vegades en aquest article, focalitzar sobre les argumentacions durant el procés d'aprenentatge ha de servir per a crear la necessitat de l'ús del llenguatge algebraic per formalitzar i també per a aconseguir fer que aquelles siguin més curtes i ràpides d'escriure.

El conegut model de la balança també és molt útil per donar eines de resolució d'equacions sense perdre de vista el significat dels símbols. A més, de nou ens proporciona una idea sobre com argumentar els successius passos que se segueixen per resoldre una equació, essencialment diferent de l'anterior. De nou, fent servir aquest mètode de resolució estarem focalitzant l'atenció sobre les operacions inverses. Mostrem una imatge de l'*applet* desenvolupat per la Universitat d'Utah (figura 8) que té també una solució molt original per coeficients negatius de les equacions, usant globus que aixequen la balança per representar els nombres negatius.

Hi ha molts més models per resoldre equacions i, de fet, com més varietat presentem als nostres alumnes, més riquesa estarem afegint a la seva capacitat de canvi de representació.

Estudiar relacions i funcions

El llenguatge algebraic també ha de servir com a mitjà per comunicar i entendre la relació entre dues o més variables. En particular, l'estudi de funcions hauria d'ajudar al seu torn els alumnes a desenvolupar aquest llenguatge.

La geometria pot proporcionar-nos contextos rics perquè els nostres alumnes construeixin el llenguatge simbòlic necessari per entendre relacions entre dues o més variables, per exemple, mentre estudiem les fórmules de les àrees de les figures planes. El problema següent n'és un exemple:

> Segurament ja saps que l'àrea del trapezi és: $A = (B + b) \cdot h/2$. Dedueix aquesta fórmula suposant que només saps les fórmules de l'àrea del rectangle, el triangle i el paral·lelogram. Fes-ho almenys de tres maneres diferents.

La figura 9 és una resolució d'una alumna de 1r d'ESO d'aquest problema. Podem observar com aquesta alumna és capaç de manipular els símbols per obtenir diferents fórmules equivalents de l'àrea del trapezi per després comprovar que efectivament totes porten a la mateixa expressió si es manipula adequadament.

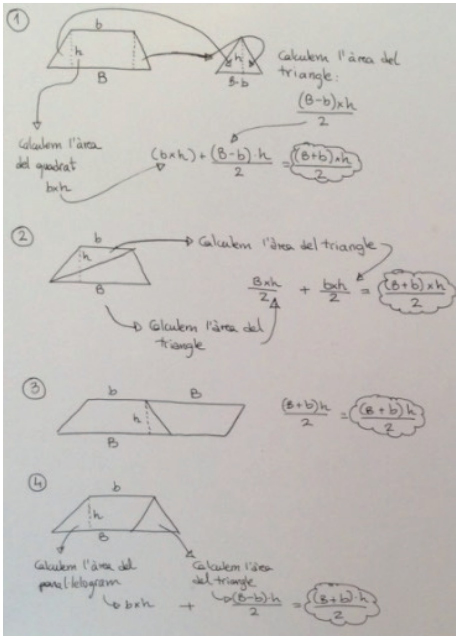

Figura 9. Diferents deduccions fetes per una alumna de 1r d'ESO.

Els fenòmens que impliquen canvis són els que generen l'estudi de les funcions. Aquest estudi es pot expressar fent servir diferents representacions. Una funció es pot representar mitjançant una descripció verbal, una gràfica, una taula de valors o una expressió algebraica. Per tant, ja queda clar que l'expressió algebraica d'una funció no és l'única manera en què ens hi podem referir. Aquesta varietat de representacions forma part de la riquesa que ens interessa ressaltar, i és la manera amb què podem connectar l'anterior dimensió del llenguatge algebraic amb la qual estem presentant ara. Ens interessa que els nostres alumnes coneguin tots els llenguatges útils per referir-se a les funcions com un objectiu importantíssim d'aprenentatge. I, de fet, aquesta interrelació entre els diferents llenguatges ens ha de servir per a dotar d'un significat més el llenguatge que ens ocupa en aquest article. Ara bé, ens agradaria remarcar que perquè la proposta d'activitats relacionades que suggerim sigui el més útil possible, és important que els alumnes hagin viscut experiències prèvies amb gràfiques de funcions, taules, etc. El fet de treballar amb gràfiques de funcions i no necessàriament amb les seves expressions algebraiques ens permetrà treballar amb una àmplia varietat de funcions, sense necessitat de limitar-nos a aquelles que tinguin una expressió algebraica senzilla.

Començarem els exemples amb el conjunt de dades (adaptat d'Arcavi, 2008 p. 53) que ens servirà per a explicitar la connexió entre les diferents representacions d'una funció:

Els estalvis d'Helena, en Rai, l'Andrea i la Júlia han canviat durant l'últim any tal com està descrit sota aquestes línies. Els números indiquen les quantitats de diners en euros i al final de cada setmana.

Helena: La taula mostra quants diners ha estalviat al final de cada setmana. La taula continua de la mateixa manera durant tot l'any.

Setmana	1	2	3	4	5	6 ...
Estalvi	7	14	21	28	35	42 ...

Rai: Durant tot l'any ha tingut estalviats 300 €.

Andrea: El gràfic descriu els seus estalvis durant les primeres vint setmanes. El gràfic continúa de la mateixa manera durant la resta de l'any.

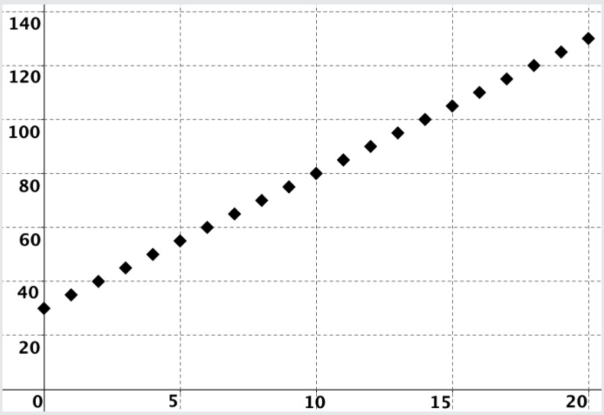

Figura 10. Gràfic que descriu els estalvis d'Andrea.

Júlia: Els estalvis de la Júlia es poden descriure mitjançant l'expressió algebraica següent:

$$E = 300 - 5S,$$

sent S el nombre de setmanes i Eels estalvis en euros.

El problema que proposem a partir d'aquestes dades és que l'alumne hagi d'escollir la seva representació preferida dels estalvis i hagi de traduir tota la resta a aquest llenguatge. És a dir, que canviï la representació de les dades. Un cop fet això, voldrem que compari els estalvis de les quatre persones.

Un altre exemple que ens permet continuar amb la construcció del llenguatge algebraic a partir de la necessitat de comunicar relacions entre variables i funcions és el següent (adaptat d'Arcavi, 2008 p. 54):

Les següents expressions descriuen els estalvis dels diferents néts de l'avi Joan (x denota el nombre de setmana):

Mònica	7x	**Gus**	300
Anna	10x	**Pere**	$60 + 3x$
Javi	$30 + 5x$	**Helena**	$-20 + 4x$
Laura	$300 - 5x$	**Gerard**	$-70 + 7x$

Tots els nets viuen bastant a prop i han descobert que hi ha una manera molt divertida de poder-se comunicar entre ells: el Walkie-talkie. Per això han de comprar un transmissor per cada dos d'ells i, per fer-ho, ajuntaran els seus estalvis per poder arribar als 400 € que costen els de Walkie-talkie que volen comprar.

1) Troba expressions, tan curtes com sigui possible, per descriure la quantitat d'estalvis que es poden aconseguir ajuntant els estalvis per parella de totes les parelles possibles. Fes una descripció tant verbal com algebraica.
2) Quina de les parelles seria la primera a aconseguir estalviar els 400 € que costen els Walkie-Talkie?
3) Podries suggerir una agrupació de parelles que beneficiï tot el grup?

Amb aquest problema podem aconseguir treballar la traducció d'una expressió algebraica a llenguatge verbal dins d'un context amb un significat proper als alumnes com poden ser els estalvis i, a més, propiciem que aquest llenguatge, el verbal, pugui ser útil per a la pròpia construcció d'expressions algebraiques simbòliques. En Arcavi (2008, p. 55) podem trobar el següent diàleg entre dues alumnes mentre discuteixen els estalvis assolits per les parelles Mònica ($7x$) – Anna($10x$) i Mónica ($7x$) – Javi($30 + 5x$):

Natally Mònica aconsegueix 7 cada setmana, i Anna guanya 10 cada setmana; per tant, juntes aconsegueixen 17 cada setmana, $17x$.

Eli Elles aconseguiran la màxima quantitat d'estalvis.

Natally Mònica i Javi. Si Mònica aconsegueix 7 i Javi 5, espera un moment! Javi té 30 € inicialment, no? Per tant, $5 + 7 = 12$, OK. $30 + 12x$.

És a dir, que amb aquest tipus d'activitats els alumnes poden ser capaços de sumar dues expressions algebraiques (cosa que no havien après a fer quan es va fer aquesta experiència) sense recórrer a les regles sintàctiques de l'àlgebra. Podríem, a més, aprofitar aquest problema per parlar sobre el pendent d'una recta i començar així a veure com el model donat per la funció lineal $y = mx + b$ ens ajuda a resoldre alguns problemes, cosa que connecta amb la següent dimensió de la que parlarem.

Modelitzar

Volem que els nostres alumnes es mostrin flexibles a l'hora de descriure i interpretar el món dels fenòmens que els envolten. I, d'acord amb Azcárate i Deulofeu (1998): «Tot docent coincideix a considerar el paper essencial de l'estudi de funcions en les matemàtiques, a partir del segle XVIII, com a font de models i instruments que permeten descriure i interpretar comptant el món físic com els fenòmens i les relacions socials». Així doncs, creiem que la modelització matemàtica ha de permetre desenvolupar aquesta sensibilitat. El que pretenem en aquest apartat és veure com el llenguatge algebraic pot servir per a presentar i entendre els models que ens permeten interpretar el nostre entorn.

D'acord amb els principis exposats, aquesta dimensió del llenguatge algebraic ha d'incloure ser capaç de construir significat a partir de diferents representacions (gràfics, taules, fórmules, etc.) d'un mateix fenomen i també de de transformar diferents representacions en altres d'equivalents per comprendre-les i extreure conclusions. Però fixem-nos que si només parlem d'aquests aspectes, no tindrem una necessitat clara de dir que l'àlgebra ha de servir per a modelitzar i distingir al seu torn aquesta dimensió de la de l'estudi de funcions. Per exemple, podríem dir que quan un alumne tradueix del llenguatge verbal un problema i escriu una equació que servirà per a resoldre-ho també està canviant de representació i, per tant, ja estaria modelitzant. Certament, també podríem dir que aquest procés pertany a la dimensió de modelització. Llavors, per què ens interessa mantenir una dimensió separada per al procés de modelització?

D'acord amb Solar, Deulofeu i Azcárate (2015), la modelització serà el conjunt de fases necessàries per resoldre un problema provinent d'una situació real per mitjà d'un model matemàtic. «El procés de modelització s'inicia generalment amb una situació extramatemàtica, se simplifica a un model real i es matematitza per obtenir un model matemàtic, es resol la situació dins el model i s'interpreta la solució d'una manera coherent amb la situació inicial; finalment, s'avalua si respon amb la situació original» (Solar, Deulofeu i Azcárate, 2015, p. 193). Així, tornant a la nostra qüestió anterior: els processos que generen una necessitat essencialment diferent respecte a l'ús del llenguatge algebraic de la resta de categories són els que a la figura 11 hem anomenat matematitzar.

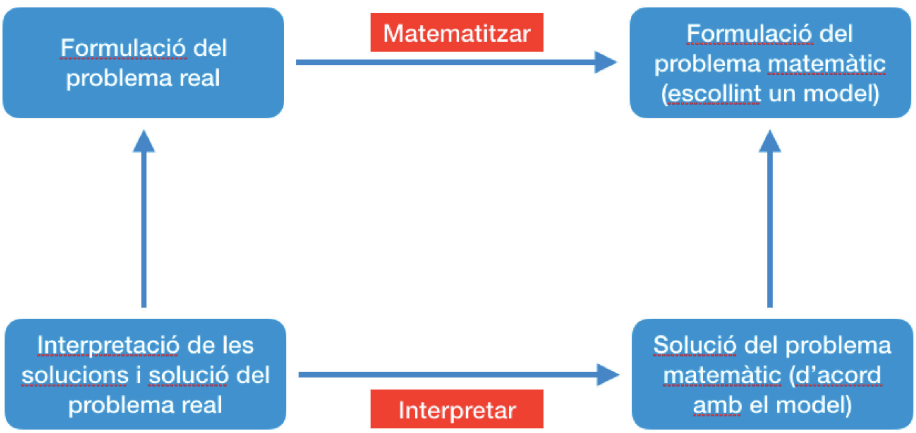

Figura 11. El procés de modelització.

A la taula 1 podem trobar una sèrie d'exemples de models matemàtics extrets d'Aleksandrov, Kolmogorov i Laurentiev (1973, p. 66-67). Aquí es pot veure com a partir de tres contextos diferents i sent un d'ells un context purament matemàtic, podem fer emergir el mateix model funcional per matematitzar les diferents situacions. Creiem que, d'alguna manera, el fet que el model sigui el mateix donarà legitimitat al professorat de matemàtiques davant dels seus alumnes per motivar l'estudi de les funcions parabòliques a l'aula.

Taula 1. Exemple de modelitzacions matemàtiques.

Situacions problemàtiques		
Energia d'un cos que cau	**Quantitat de calor generada en un conductor en la unitat de temps, al pas d'un corrent elèctric**	**Superfície d'un triangle rectangle**
$E = \frac{m v^2}{2}$	$Q = \frac{R I^2}{2}$	$S = \frac{1}{2}x^2\mathrm{tg}(\alpha)$
m = massa v = velocitat	I = intensitat R = resistència	x = costat del triangle α = angle agut adjacent a x
Model matemàtic		
$f(x) = \frac{1}{2}ax^2$		

Tancar el cercle de la modelització complet i arribar fins a aquest punt de motivació amb els nostres alumnes pot ser costós pel que fa al temps necessari per fer-ho, però creiem que val la pena que això passi encara que siguin unes poques vegades durant la seva educació obligatòria. Per tant, caldria buscar contextos en què es donin aquestes situacions i en què la seva complexitat estigui a l'abast dels nostres alumnes.

Un exemple de tasca que podríem dur a terme amb els nostres alumnes per fer emergir les diferents fases del procés de modelització a les nostres aules és l'estudi de la relació existent entre la freqüència del so obtingut tocant una corda d'una guitarra i la seva longitud. La relació entre aquestes dues variables és de proporcionalitat inversa i, concretament, si anomenem L la longitud de la corda, i F a la freqüència, tenim que:

$$F = \frac{K}{L}$$

sent K una constant que depèn de la corda particular. Podem fer servir aquesta idea a l'aula mesurant la freqüència amb qualsevol mesurador digital (per exemple, utilitzant una aplicació per a telèfon mòbil) i veient com varia en funció d'on estiguem prement la corda de la guitarra. Així, els alumnes podran acabar trobant la relació anterior amb una corda concreta. Després els podríem demanar que, ja sense usar el mesurador de freqüències digitals, facin el mateix procés amb una altra corda i que representin la informació que relaciona freqüència i longitud de forma verbal, gràficament, en una taula de valors i també a través d'una expressió algebraica. Només caldrà donar-los una dada: la freqüència que correspon a la corda de la guitarra en sonar solta. A la figura 12 podem veure el resultat d'aquesta tasca plantejada en una classe de 2n d'ESO. En la meva opinió, és en aquesta part de l'experiment que el professor té l'oportunitat de convèncer els alumnes de l'interès de l'ús d'aquest model matemàtic, en el moment en què gràcies a les matemàtiques podem estudiar el fenomen sense haver de repetir l'experiment.

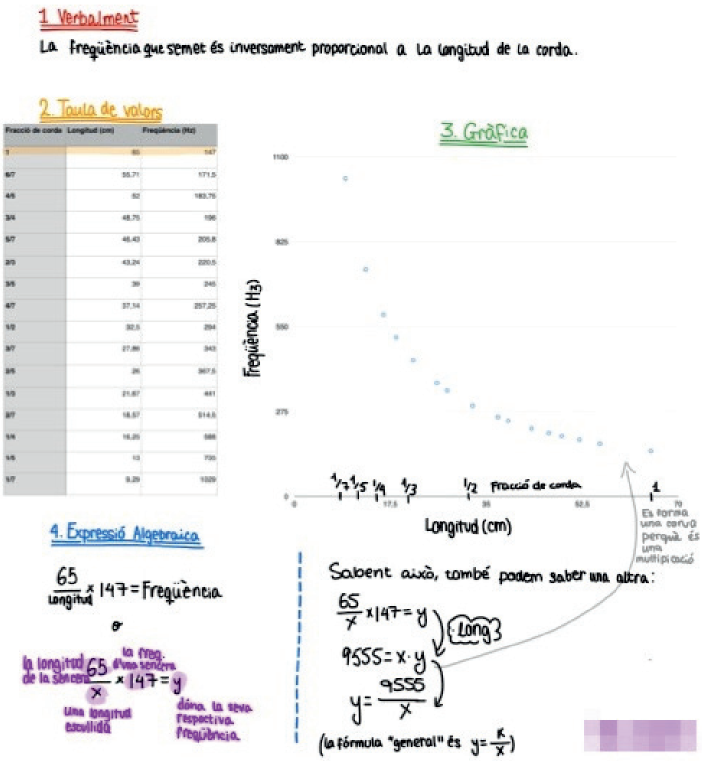

Figura 12. Diferents representacions de la relació entre la longitud d'una corda d'una guitarra i la freqüència que emet en tocar-la.

Considerem ara la família de rectangles que tenen àrea K cm^2 (rectangles equivalents). Si tenim en compte la relació entre la base (b) i l'altura (a) d'aquests rectangles, de nou obtenim la relació següent:

$$a = \frac{K}{b}$$

A la figura 13 veiem la representació gràfica que es va fer implementant aquesta activitat a la mateixa aula de 2n d'ESO en la qual es va proposar el treball que hem mostrat anteriorment. Es va demanar que es construïssin molts rectangles equivalents d'àrea 36 cm^2 per ajuntar-los després tots i estudiar la relació que s'obtenia entre àrea i alçada observant el vèrtex del rectangle que queda més allunyat de l'origen de coordenades si els col·loquem tal com veiem en la imatge.

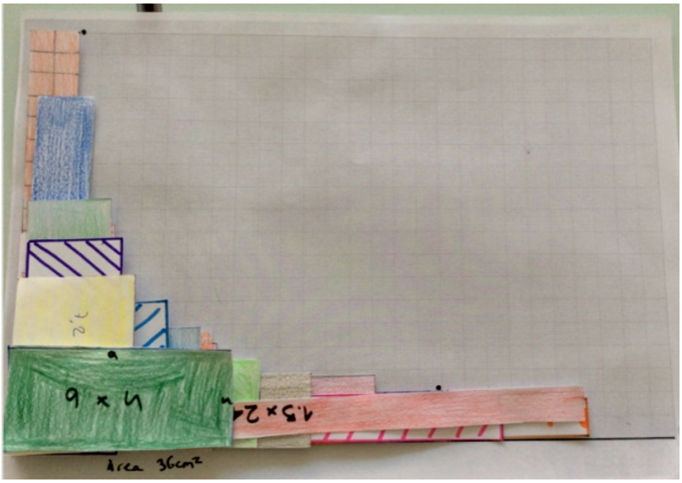

Figura 13. Rectangles equivalents de 36 cm^2 d'àrea representant una funció de proporcionalitat inversa.

Finalment, dins d'un context tradicional d'una classe de Tecnologia (o a la mateixa aula de Matemàtiques), es podria parlar de la llei d'Ohm:

$$V = I \cdot R$$

en què *I* és la intensitat del corrent (quantitat d'electrons que circulen en un punt per unitat de temps), *R* és la resistència dels materials que formen part del circuit i *V* és el voltatge que proporciona la font d'energia. Cal notar que, mantenint constant el voltatge *V*, les variables *I* i *R* són inversament proporcionals. Llavors, si en un endoll que proporciona un voltatge constant de 220 V, què passarà si hi posem els dits? Resulta que el nostre cos no ofereix gairebé cap resistència al circuit, de manera que si la resistència tendeix a zero, la intensitat tendirà a infinit, produint la conseqüent guspira en el cable a causa de l'elevat nombre d'electrons que intenten passar a través seu. De nou l'estudi de la funció de proporcionalitat inversa ens ofereix un bon model matemàtic per fer aquest estudi.

Segur que la gran majoria dels professors estan convençuts que l'estudi de la funció de proporcionalitat inversa ($y = k/x$) és important en classe de matemàtiques, però tot aquest recorregut pel procés de modelització és el que en realitat dotarà de raons els alumnes perquè ells també creguin que és important estudiar aquest model matemàtic i romandre en l'abstracció estudiant com varia la funció segons els diferents valors del paràmetre *k* d'aquest model funcional.

Conclusions

En aquest article hem volgut evidenciar el caràcter multidimensional de l'aprenentatge de l'àlgebra. Però no només això: també és molt important parar compte en l'ordre escollit per a la seva formulació. Sempre que dissenyem un procés d'ensenyament-aprenentatge hem de determinar un itinerari. Per això l'ordre que hem escollit a l'hora de determinar quines són les habilitats que hauríem d'ajudar a desenvolupar als nostres alumnes no és aleatori, amb el benentès que tampoc no és un ordre únic.

Segons la seqüenciació suggerida, els alumnes haurien de poseir en primer lloc les habilitats pròpies de l'Early Algebra, és a dir, el pensament algebraic necessari per generalitzar a partir de relacions aritmètiques, descriure la variació i modelitzar (Kaput, 2008). Només quan l'alumne té una certa competència en aquests aspectes està preparat per poder començar a fer servir símbols per expressar aquests pensaments.

De la mateixa manera, per tal que un alumne pugui comprendre el procés de resolució d'equacions, en primer lloc ha de ser capaç de donar significat a les lletres i als símbols en general, i per això els ha d'haver fet servir per comunicar generalitzacions.

I, per acabar, difícilment un alumne podrà donar significat a un model matemàtic en el qual necessiti comprendre el significat dels paràmetres d'una determinada funció si abans no ha tingut experiències amb el llenguatge algebraic per expressar funcions.

Bibliografia

Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N., Laurentiev, M.A. (1973). *Matemática: contenido, métodos y significado*. Traducció de Manuel López Rodríguez. Madrid: Alianza Editorial.

Arcavi, A. (2008). Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics*, FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada, 28, 2.

Azcárate, C., Deulofeu, J. (1998). *Matemáticas ESO. Guías Praxis para el profesorado*. Barcelona: Praxis.

Calvo, C., Deulofeu, J., Jareño, J., Morera, L. (2016). *Aprender a enseñar matemáticas en la educación secundaria obligatoria*. Editorial Síntesis.

Fuente, A. de la (2016). *Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor*. Tesi doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. University of Massachussets-Dartmouth.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? Dins J. Kaput, D.W. Carraher i M.L. Blanton, *Algebra in the Early Grades* (p. 5-18). Nova York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator*, 8 (1), 139-151.

Mason, J., Burton, L., Stacey, K. (1992). *Pensar matemáticamente*. Barcelona: Labor.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: NCTM. Edició espanyola: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Traducció de Manuel Fernández Reyes. Sevilla: SAEM Thales.

Schoenfeld, A.H., Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. *Mathematics Teacher*, setembre, p. 420-427.

Socas, M.M., Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 14, octubre, p. 7-24.

Solar, H., Deulofeu, J., Azcárate, C. (2015). Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las ciencias*, 33.2, p. 191-210.

Vila, A., Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.