Nombres perfectes, amics i sociables. Una proposta per a l'aula

Carles Dorce
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
cdorce@ub.edu

Resum

El context buscat que ens ha de facilitar la introducció de certs temes en la classe de matemàtiques no sempre és l'idoni ni té els resultats esperats. Aquest és el cas dels exemples que trobem en multitud de llibres de text a l'hora de parlar sobre divisibilitat, ja que no tenen en compte que l'agrupament d'objectes no té gairebé cap interès per als nostres alumnes, i probablement, tampoc utilitat. No obstant això, les característiques de certs nombres i la capacitat que té l'alumnat per a jugar-hi poden servir d'excusa per a obrir idees i plantejar raonaments que els problemes tradicionals no recullen. D'aquesta manera, els nombres perfectes, els nombres amics, els nombres sociables i algunes de les seves variants poden ser un bon generador de raonament matemàtic.

Abstract

The context we look for to introduce certain mathematical subjects in an easier way is not always suitable and may not have the expected results. This is the case with examples we find in many textbooks when talking about divisibility, since they do not take into account that the clustering of objects is not only of no interest to our students but probably of no use either. However, the properties of certain numbers and the ability of students to play with them can be used to open up ideas and propose ways of thinking that are not included in traditional problems. Thus, perfect, amicable and sociable numbers and some of their variants can be very good generators of mathematical reasoning.

Introducció

La descomposició dels nombres en producte de factors primers, la determinació dels múltiples i divisors d'un nombre i la cerca del màxim comú divisor i del mínim comú múltiple d'un conjunt de nombres no solen trobar-se dins de les activitats més ben considerades per l'alumnat de l'Educació Secundària Obligatòria (ESO). Els motius poden ser diversos, com, per exemple, la desvinculació de contextos reals. Si bé no és difícil trobar situacions concretes amb aquest tipus de càlculs, de vegades la tipologia dels problemes plantejats està estretament lligada a solucions de poc interès per a l'alumnat. Agafant un exemple concret (Álvarez, Hernández i altres, 2011):

> La Cristina té 24 cotxes de joguina i els vol col·locar en fila, de manera que totes les files tinguin el mateix nombre de cotxes. De quantes maneres ho pot fer?

o aquest altre:

> L'Anna té 7 testos amb geranis i els vol posar en grups, de manera que cada grup ha de tenir el mateix nombre de testos i no n'ha de sobrar cap. Quants testos pot posar en cada grup?

quina diferència hi ha entre aquest tipus de problemes i, per exemple, el que planteja l'enunciat (Sigler, 2002):

> Hi ha un nombre que quan es divideix per 2, o per 3, o per 4, o per 5, o per 6, el romanent sempre és 1, i és veritablement divisible per 7. De quin nombre es tracta?

Aquest problema va ser plantejat per Leonardo de Pisa, també conegut amb el sobrenom de Fibonacci, en el seu *Liber abaci*, de 1202. Refent-lo amb la intenció d'adaptar-lo al primer exemple mostrat, ara llegiríem:

> La Cristina té un determinat nombre de cotxes de joguina i els vol col·locar en fila, de manera que totes les files tinguin el mateix nombre de cotxes. S'ha adonat que els pot col·locar en files de 7 cotxes, però que, si els col·loca en files de 2 cotxes, o de 3, o de 4, o de 5, o de 6, aleshores sempre li'n sobra un. Quina quantitat de cotxes té la Cristina?

Els dos problemes plantegen el mateix i no es pot considerar que el context en el qual s'ha volgut emmarcar la segona opció aporti cap benefici, ans al contrari: l'enunciat s'ha fet llarg i segueix sense tenir l'interès esperat per a l'alumnat.

En el currículum de l'Educació Primària (Decret 142/2007), la introducció de les fraccions es produeix en el bloc de Numeració i Càlcul del cicle inicial, en què s'especifica el primer ús de les fraccions un mig i un quart en contextos significatius. En el cicle mitjà, hi trobem l'ús de diferents models de representació de les fraccions, com ara la representació de nombres «fraccionaris més comuns (1/2, 1/3, 1/4)» sobre la recta numèrica o la seva relació com a nombres que aproximen la mesura. És en aquesta etapa el moment en el qual apareixen les primeres sumes i restes de fraccions «senzilles» acompanyades de la seva representació gràfica. Finalment, en el cicle superior, les fraccions prenen protagonisme i la seva aparició ja va lligada al seu ús i comprensió per a mesurar quantitats comunes en contextos significatius (com poden ser certs problemes geomètrics), així com la seva equivalència amb els nombres decimals i els percentatges corresponents. D'aquesta manera, s'inclou la cerca de fraccions equivalents i la comparació, ordre, suma i resta dels nombres racionals. En aquest cicle també s'han de començar a elaborar conjectures a partir de la cerca de les característiques dels nombres (primers, compostos, múltiples, divisors).

A l'ESO (Decret 143/2007), l'estudi de les fraccions comença des del primer curs recollint tots els continguts ja explicats a Primària, i en els continguts del bloc de Numeració i Càlcul ens trobem també amb la «utilització de factoritzacions, múltiples i divisors en la resolució de problemes» i amb la comprensió del «significat i efecte produït per les operacions amb fraccions».

L'experiència ens diu que l'aparició a les aules dels criteris de divisibilitat, del ja citat càlcul de la factorització en producte de nombres primers i dels conseqüents conceptes de divisors, màxim comú divisor, múltiples i mínim comú múltiple no sol ser un plat de bon gust per a la majoria de l'alumnat. A més a més, la recurrència d'aquests temes en els llibres de text dels quatre cursos de l'ESO tampoc no aporta al procés d'aprenentatge cap novetat que no sigui la repetició i consolidació del contingut, que no per ser molt necessàries són més útils. Davant d'aquest panorama, podem aportar algun recurs que ens faciliti la tasca de fer més amè el càlcul dels divisors d'un nombre? És a dir, podem aportar algun aspecte lúdic a aquest procés, en la línia de poder influir en l'«alfabetització emocional» de l'alumnat, la qual inclou la idea del control de la por a les matemàtiques per tal d'aconseguir «l'atenció necessària perquè s'aconsegueixi l'aprenentatge, l'autoconsciència, la motivació, l'entusiasme, la perseverança, l'empatia, l'agilitat mental, etc.» (Gómez Chacón, 1997)? Com està provat, si no hi ha una actitud favorable de l'alumnat vers la matèria, només un procés memorístic pot aconseguir algun tipus de bons resultats d'aprenentatge (Ausubel, Novak i Hanesian, 1983), malgrat que, *a posteriori*, aquest tipus d'aprenentatge és molt superficial i és de difícil assimilació.

En aquest sentit, la introducció de jocs sempre pot ser molt útil. L'experiència contrastada (Dorce, 2013a) obre la porta a la introducció de jocs numèrics que aportin classes participatives, interessants i amenes que s'oposin a les activitats mecàniques i repetitives que només tenen l'objectiu d'entrenar l'alumnat en rutines (Burgos i altres, 2006). Per tant, presentarem aquí un recurs que ens pot facilitar la introducció, reforç i consolidació del tema de la divisibilitat numèrica. Sense cap mena de dubte, el concepte de nombres perfectes, amics i sociables no és nou, però l'enfocament que aquí s'hi dóna pot ser força útil en les aules dels últims cursos de la Primària i de qualsevol dels cursos de la Secundària.

Nombres perfectes i nombres sublims

Es diu que un nombre és *perfecte* si és igual a la suma dels seus divisors propis, és a dir, la suma dels divisors que són menors que ell. Per exemple, els divisors del nombre 6 són l'1, el 2, el 3 i el 6 i, per tant, el 6 és un nombre perfecte, ja que $6 = 1 + 2 + 3$. Dit d'una altra manera, si considerem la funció $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, aleshores un nombre N és perfecte si $\sigma(N) = 2N$.

Malgrat que aquest concepte sembla ser originari de les matemàtiques pitagòriques (Dorce, 2013b), la primera referència que tenim del concepte de nombre perfecte la trobem en l'última de les definicions del llibre VII dels enciclopèdics *Elements* que l'alexandrí Euclides va escriure al voltant del segle III aC, on llegim: «Nombre perfecte és aquell que és igual a les seves pròpies parts». A més a més, en la proposició 36 del llibre IX, Euclides també va demostrar que tot nombre de la forma $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ amb $2^n - 1$ primer, és perfecte. La demostració d'aquest resultat no és gens difícil, ja que, si anomenem $p = 2^n - 1$, tenim que els divisors propis de N són $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{n-2}, 2^{n-1}, p, 2p, 2^2p, \ldots, 2^{n-2}p$, la suma dels quals és:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} + p + 2p + 2^2p + \cdots + 2^{n-2}p =$$

$$= (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1}) + (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2})\, p =$$

$$= \frac{2^{n-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} + \frac{2^{n-2} \cdot 2 - 1}{2 - 1} p = (2^n - 1) + (2^{n-1} - 1)\, p =$$

$$= (2^n - 1) + (2^{n-1} - 1)\,(2^n - 1) = 2^{n-1}\,(2^n - 1)$$

Gairebé quatre segles més tard, Nicòmac de Gerasa va escriure una *Introducció a l'aritmètica* en què es va dedicar a estudiar aquest tipus de nombres, dels quals només en coneixia quatre (6, 28, 496 i 8128), i va arribar a donar unes quantes propietats:

1. Fixem-nos que hi ha un nombre perfecte d'una xifra, un altre de dues, un altre de tres i un altre de quatre. Per tant, Nicòmac va veure clar que hi havia d'haver un nombre perfecte per a cada unitat de la base 10. Així, el següent nombre perfecte havia de tenir cinc xifres.
2. Per tant, Nicòmac suposava l'existència d'infinits nombres perfectes.
3. És una evidència que els quatre nombres perfectes són parells i no seria d'estranyar que tots els nombres perfectes també ho fossin.
4. A més a més, observem també que els quatre nombres acaben successivament en 6, 8, 6 i 8. Per tant, el cinquè nombre perfecte hauria d'acabar en 6, el sisè en 8, etc.
5. Finalment, si s'havia de trobar un cinquè nombre perfecte s'havia de fer mitjançant la fórmula d'Euclides, ja que tots els nombres perfectes havien de ser d'aquesta forma.

Tot i aquestes pistes, Nicòmac no va ser capaç de trobar el cinquè nombre perfecte i no va ser fins al segle xiii que va veure la llum: Ismāʿīl ibn Ibrāhīm ibn Fallūs (m. c. 1250) va comentar l'*Aritmètica* de Nicòmac (Brentjes, 1987) i després de donar la fórmula d'Euclides $N = 2^{n-1}\,(2^n - 1)$ amb $2^n - 1$ primer, va calcular els casos $n = 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 19$ i 23:

$n = 2$	$N = 6$	Perfecte.
$n = 3$	$N = 28$	Perfecte.
$n = 5$	$N = 496$	Perfecte.
$n = 7$	$N = 8128$	Perfecte.
$n = 9$	$N = 130816$	Però $2^9 - 1 = 7 \cdot 73$. No perfecte.
$n = 11$	$N = 2096128$	Però $2^{11} - 1 = 23 \cdot 89$. No perfecte.
$n = 13$	$N = 33550336$	Perfecte.
$n = 17$	$N = 8589869056$	Perfecte.
$n = 19$	$N = 137438691328$	Perfecte.
$n = 23$	$N = 35184367894528$	Però $2^{23} - 1 = 47 \cdot 178481$. No perfecte.

Ibn Fallūs va cometre tres errades en la seva llista, però la taula ens serveix per a adonar-nos que, ja des del temps dels grecs, s'havia vist que n no podia ser parell si $n > 2$, ja que si $n = 2k \neq 2$, aleshores $2^n - 1$ no és un nombre primer:

$$2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k)^2 - 1 = (2^k + 1) \cdot (2^k - 1)$$

A més a més, les afirmacions primera i quarta de Nicòmac no eren certes i quedava per endavant un llarg període d'investigacions sobre aquests nombres. Els nombres perfectes havien arribat al món àrab de la mà de Thābit ibn Qurra (836-901) i, a banda de la llista d'Ibn Fallūs, va ser el gran Ibn al-Haytham (965-1040) qui més va acostar-se a donar un resultat important sobre el tema: el recíproc de la proposició d'Euclides, és a dir, que si N és un nombre perfecte parell, aleshores és de la forma $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ amb $2^n - 1$ primer (Rashed, 1994).

A l'Europa occidental, l'aparició dels nombres perfectes no va ser matemàtica sinó més aviat religiosa. Sant Agustí (354-430), en la seva *Ciutat de Déu*, va destacar que Déu havia construït el nostre món en sis dies justament perquè aquest nombre és perfecte! Matemàticament parlant, l'aparició del cinquè nombre perfecte, 33.550.336, es troba en un manuscrit anònim de 1458 i també en els papers de Johannes Müller, també conegut pel seu nom llatinitzat, Regiomontanus 1436-1476). El 1536, Hudalrichus Regius va trencar la idea que tot nombre de la forma $2^n - 1$ amb n primer havia de ser també primer a trobar la descomposició del cas $n = 11$. També va demostrar que $2^{13} - 1 = 8191$ és primer, trobant així indirectament aquest cinquè nombre perfecte.

El 1603, l'italià Pietro Cataldi (1548-1626) va escriure el *Tractat dels nombres perfectes*, en què es va dedicar a donar tots els nombres primers menors de 750. Amb l'ajut d'aquesta taula, va poder demostrar que $2^{17} - 1 = 131071$ i $2^{19} - 1 = 524287$ són nombres primers i, d'aquesta manera, va redescobrir el sisè i el setè nombres perfectes. A més a més, va atrevir-se a afirmar que $2^n - 1$ és primer per a $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ i 37.

El següent pas, el trobem en una carta que el francès Pierre de Fermat (1601-1665) va enviar al pare Marin Mersenne (1588-1648) el 1640, en què es va dedicar a estudiar els nombres $2^n - 1$, als quals va denominar *radicals*. Fermat va arribar a la conclusió que:

1. n compost $\Rightarrow$ $2^n - 1$ compost.
2. n primer $\Rightarrow$ $2^n - 2$ és divisible per $2n$.
3. n i p primers senars i $2^n - 1$ divisible per p $\Rightarrow$ $p - 1$ és divisible per $2n$. Així, si n és primer, aleshores $2^n - 1$ no pot ser divisible per cap altre primer que no sigui de la forma $2kn + 1$.

Seguint darrere d'aquests nombres, el mateix Fermat va acabar deduint un resultat equivalent al seu petit teorema, és a dir, si p és un nombre primer i a és un enter no divisible per p, aleshores $a^{p-1} - 1$ és divisible per p. Fermat va poder demostrar, doncs, que els casos $n = 23$ i 37 de Cataldi eren erronis, ja que va aconseguir factoritzar-los. Per la seva banda, Mersenne va quedar força impressionat amb els avenços de Fermat i va arribar a publicar, sense demostrar-ho, que $2^n - 1$ és un nombre primer per $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ i 257. Per aquesta raó, els nombres de la forma $M_n = 2^n - 1$ són coneguts actualment com a *nombres de Mersenne*.

Com a resultat interessant, cal dir que el 1732, Leonhard Euler (1707-1783) va demostrar el recíproc de la regla d'Euclides per a nombres perfectes parells donant veracitat així a la cinquena de les afirmacions de Nicòmac, que suposava que el nombre perfecte inicial era parell (Dickson, 1971).

La història d'anar trobant nombres perfectes a partir dels nombres de Mersenne encara perdura avui dia. El 25 de gener de 2013, el professor Curtis Cooper, de la Universitat Central de Missouri, va descobrir el 48è nombre perfecte trobat fins ara. Es tracta del cas $n = 57885161$, que converteix el nombre $2^{57885161} - 1$ en el nombre primer més gran conegut fins ara: té 17.425.170 xifres!

No s'ha demostrat encara si existeixen infinits nombres perfectes i tots els que s'han trobat són parells.

Ara bé, no es pot acabar de parlar sobre nombres perfectes sense considerar els dos únics *nombres sublims* coneguts. El primer és el 12, ja que, d'una banda, la suma dels seus divisors propis és igual a $1+2+3+4+6+12 = 28$, un nombre perfecte, i de l'altra, el nombre dels seus divisors propis és igual a 6, un altre nombre perfecte. Respecte del segon nombre sublim, es pot dir que és el $S = 2^{126}\,(2^3 - 1)\,(2^5 - 1)\,(2^7 - 1)\,(2^{19} - 1)\,(2^{31} - 1)\,(2^{61} - 1)$ i que té 76 xifres decimals i 8.128 divisors.

Nombres amics, amistosos i solitaris

Seguint amb les sumes de divisors, un altre tipus de nombres curiosos i que també tenen el seu origen en els matemàtics pitagòrics és el corresponent als *nombres amics*. Calculem la suma dels divisors propis del nombre 220:

$$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$$

Com es pot veure, el 220 és un nombre *abundant*, és a dir, la suma dels seus divisors propis és major que ell, però... i el 284? Els seus divisors propis sumen:

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$$

Per tant, la suma dels divisors propis del 220 és igual al 284, i viceversa, la suma dels divisors propis del 284 és igual al 220 (amb què el 284 és un *nombre deficient*, ja que la suma dels seus divisors propis és menor que ell). Direm que el 220 i el 284 són dos nombres amics.

Curiosament, en el llibre del Gènesi (32:14), Jacob es preparava per a trobar-se amb el seu germà Esaú i li «va preparar un obsequi [...]: dues-centes cabres i vint bocs, dues-centes ovelles i vint moltons». Per explicar aquest nombre, el cabalista marroquí Abraham ben Mordecai Azulai (c. 1570-1643) va tenir-ho molt clar:

> El nostre avantpassat Jacob va preparar el seu regal d'una manera molt sàvia. El nombre 220 és un secret amagat, essent un dels dos nombres tals que les seves parts són iguals a les de l'altre, 284, i viceversa. I Jacob n'era conscient; això ha estat escollit pels antics per garantir l'amor dels reis i els dignataris.

Tornant al sentit estrictament matemàtic, els antics grecs van obviar aquesta propietat i no va ser fins a les investigacions de Thābit ibn Qurra al segle IX que no van revifar. Ibn Qurra va escriure un *Tractat sobre els nombres amics* en el qual va donar una regla per a trobar-ne: per a $n > 1$, si $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ i $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ són tots tres primers, aleshores

$M = 2^n pq$ i $N = 2^n r$ són amics. Així, si $n = 2$, es té que $p = 5$, $q = 11$ i $r = 71$ primers, i els nombres $M = 4pq = 220$ i $N = 4r = 284$ són amics. Després d'Ibn Qurra, la regla va ser coneguda a bastament en el món àrab i exemple d'això és la seva aparició en les obres d'Abū al-Saqr al-Qabīsī (s. X), al-Karajī (c. 953—c.1029), Abū Tāhir al-Bagdadī (m. 1037), al-Zanjānī (c. 1257), Kamāl al-Dīn al-Fārisī (m. 1320), Ibn al-Bannā' al-Marrakushī (c. 1256—c.1321) i Jamshīd al-Dīn al-Kāshī (1380-1429), entre d'altres. En els seus càlculs, al-Fārisī va trobar la segona parella, 17296 i 18416, corresponent al cas $n = 4$. Arribats al segle XVII, Fermat i René Descartes (1596-1650) van redescobrir la fórmula entre els anys 1636 i 1638 i, a banda d'aquest cas $n = 4$, també van arribar al cas $n = 7$, és a dir, els nombres 9363584 i 9437056 (també al segle XVII, al-Jazdī va arribar a aquesta última parella). Un segle més tard, el 1747, Euler va donar una llista de trenta parelles més, que ell mateix va augmentar a seixanta posteriorment (Euler, 1747).

Si bé actualment els nombres perfectes que coneixem no arriben a la cinquantena, hi ha milions de parelles de nombres amics. I, per descomptat, una curiositat: el 1866, un noi italià de 16 anys anomenat Niccolò Paganini, com el famós compositor, va ser capaç de descobrir el segon parell de nombres amics més petits que existeix: el 1184 i el 1210!

L'any 1913, L. E. Dickson va generalitzar aquesta idea i va definir els triplets de nombres amics en què la suma dels divisors propis d'un d'ells és igual a la suma dels altres dos (Dickson, 1913). Exemples d'aquests triplets són els nombres $293 \cdot 337\,A$, $5 \cdot 16.561\,A$ i $99.371\,A$, en què $A = 2^5 \cdot 3 \cdot 13$, o $3 \cdot 89\,B$, $11 \cdot 29\,B$ i $359\,B$, en què $B = 2^{14} \cdot 5 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 151$. Mitjançant un altre algorisme diferent del de Dickson, el 1960, A. Makowski va trobar el triplet $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$, $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016$ i $2^2 \cdot 3^2 \cdot 71 = 2556$ (Makowski, 1960 i 1961).

El 1921, T. E. Mason va generalitzar els triplets de Dickson a grups de n nombres amics en què la suma dels divisors propis d'un d'ells és igual a la suma dels altres $n - 1$ (Mason, 1921). S'ha de dir que el grup de quatre nombres amics més petit que es coneix està format pels nombres 842448600, 936343800, 999426600 i 1110817800.

Un altre grup de parelles interessant és el dels *nombres gairebé amics*, és a dir, que no són amics per molt poc. Per exemple, si agafem el nombre 48, calculem els seus divisors propis i els sumem, obtenim $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 + 16 + 24 = 76$. D'altra banda, si ara ens quedem amb el nombre $76 - 1 = 75$ i fem el mateix, el resultat que obtenim és $1 + 3 + 5 + 15 + 25 = 49$. Una unitat més que el 48! En aquest cas, direm que la parella formada per 48 i 75 està formada per nombres gairebé amics (Guy, 1994). Les parelles 140 i 195, 1575 i 1648, i 1050 i 1925 en són altres exemples, i malgrat que sembli una condició més feble que la de ser amics, s'ha de dir que només hi ha 46 parelles d'aquests nombres menors que 10^7 i que totes són de paritat diferent.

Per acabar, C. W. Anderson i D. Hickerson van batejar com un *parell amistós de nombres* aquells dos nombres m i n que compleixen $\Sigma(n) = \Sigma(m)$, en què $\Sigma(n) = \frac{1}{n}\sigma(n)$ (Anderson i Hickerson, 1977). Per exemple, la parella formada per dos nombres perfectes sempre serà amistosa, ja que si N i M són perfectes, es complirà $\Sigma(N) = \Sigma(M) = 2$. Un altre exemple el trobem en la parella formada pels nombres 135 i 819, ja que $\Sigma(135) = \Sigma(819) = \frac{16}{9}$.

En contrapartida, es diu que un nombre és *solitari* si no està inclòs en cap parella amistosa de nombres. De moment podem constatar que si el màxim comú divisor de N i $\sigma(N)$ és igual a

1, aleshores N és solitari. Així, els nombres primers són solitaris i també ho són el 4, el 8, el 9, el 16, el 21... No obstant això, encara queden moltes preguntes obertes, com ara quina és la condició de nombres com el 10, el 14 o el 15 (Hickerson, 2002).

Nombres sociables

Una generalització tant dels nombres perfectes com dels nombres amics és el concepte de *nombres sociables*. Els introduirem amb un parell d'exemples. Suposem que agafem el 15, del qual ja sabem que no és perfecte i que no pertany a una parella de nombres amics. Aleshores, quin és el resultat de la suma dels seus divisors propis? Fem-la: $\sigma^*(15) = \sigma(15) - 15 = 1 + 3 + 5 = 9$. Comprovem, en efecte, que no és perfecte. Vegem ara que no pertany a una parella de nombres amics: $\sigma^*(9) = \sigma(9) - 9 = 1 + 3 = 4$. Tornem-hi. Què passa ara amb el 9? Doncs $\sigma^*(9) = 4$, $\sigma^*(4) = 3$ i $\sigma^*(3) = 1$.

Ja hem vist que quan ens dediquem a sumar divisors propis, de vegades obtenim directament el nombre buscat (és el cas dels nombres perfectes) i, d'altres vegades, obtenim el nombre inicial després d'haver passat per un pas intermedi (els nombres amics). És a dir, $\sigma^*(6) = 6$ i $\sigma^*(220) = 284 \to \sigma^*(284) = 220$. Ara, la pregunta és: existeixen nombres $N_1, N_2, \ldots, N_k$ tals que $\sigma^*(N_j) = N_{j+1}$ per $1 \leq j < k$, i $\sigma^*(N_k) = N_1$? En aquest cas, direm que els nombres $N_1, N_2, \ldots, N_k$ són *nombres sociables*. Si $k = 1$, els nombres són perfectes, i si $k = 2$, els dos nombres són amics. Tot i així, la resposta a la pregunta anterior no és gens senzilla. De fet, el 1918, P. Poulet va determinar el grup de $k = 5$ nombres sociables 12496, 14288, 15472, 14536 i 14264, des del qual $\sigma^*(14264) = 12496$ (Poulet, 1918). També va trobar que el nombre 14316 era el primer d'una cadena de 27 més ($k = 28$) i aquestes associacions van ser les úniques conegudes fins que el 1970, H. Cohen va trobar nou grups de $k = 4$ amb l'ajut d'un ordinador (Cohen, 1970).

Activitats d'aula

Quan s'explica a l'aula la factorització d'un nombre en producte de nombres primers o, fins i tot, el concepte i el càlcul del màxim comú divisor o del mínim comú múltiple, la manipulació dels divisors primers d'un nombre ens dóna una oportunitat única per introduir tots aquests conceptes explicats. Suposem que tenim la gran sort d'haver de factoritzar el nombre $28 = 2^2 \cdot 7^1$:

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Com calculem tots els seus divisors? En primer lloc, podem començar determinant el nombre de divisors que hem de trobar, per tal de no deixar-nos-en cap:

Proposició: *Si $N > 1$ és un nombre natural tal que la seva descomposició en producte de factors primers és $N = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$, aleshores el seu nombre de divisors és $n = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$.*

Demostració: És evident que tots els possibles divisors de N són els sumands del producte $(1 + p_1 + p_1^2 + \cdots + p_1^{n_1}) \cdot (1 + p_2 + p_2^2 + \cdots + p_2^{n_1}) \cdot \cdots \cdot (1 + p_k + p_k^2 + \cdots + p_k^{n_k})$ i, per tant, el nombre de sumands és $n = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1)$. □

En el nostre cas, per a $N = 28$ tenim $n_1 = 2$ i $n_2 = 1$ i, consegüentment, el seu nombre de divisors és $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 3 \cdot 2 = 6$. A més a més, seguint el producte descrit en la proposició, no és difícil trobar quins són aquests divisors:

	1	p_1	p_1^2
Multiplicat per 1:	1	2	4
Multiplicat per $p_2 = 7$:	7	14	28

Ara és el moment de veure quines propietats té el nombre 28 i preguntar als alumnes sobre elles. Quines saben? Què en poden dir? Algunes possibles respostes són (en cursiva les reflexions del professor):

1. És un nombre parell. *Per tant, no és senar. Molt bé.*
2. És un nombre compost. *Per tant, no és primer. Molt bé.*
3. És el nombre de fitxes que té el dòmino. *Bona observació, però no és una propietat numèrica.*
4. És un múltiple de 4. *I també de 7, de 14 i de 28.*
5. És el nombre de dies del mes de febrer. *No és una propietat numèrica, però algun dia hauríem de parlar sobre aquest tema.*
6. El meu germà té 28 anys. *Ah, sí?*
7. Jo visc al número 28 del carrer... *Prou, ara ja no anem enlloc.*

Hi ha un moment en què la classe deixa de produir i és necessari dirigir la pauta: *Observeu bé les seves dues xifres.*

1. La primera és un 2 i la segona és un 8. *S'esperava una mica més que aquesta observació tan òbvia.*
2. $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. *Bona! Algun dia també hauríem d'estudiar aquest tipus de nombres.*

És força difícil que algú vegi que $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Tanmateix, un cop explicada aquesta propietat, es pot proposar si entre el 2 i el 10 són capaços de trobar-ne un altre:

N	Suma dels divisors
1	1
2	1
3	1
4	$1 + 2 = 3$
5	1

N	Suma dels divisors
6	$1 + 2 + 3 = 6$
7	1
8	$1 + 2 + 4 = 7$
9	$1 + 3 = 4$
10	$1 + 2 + 5 = 8$

A partir de la taula, es pot veure que 6 = 1 + 2 + 3 i... què més?

1. Si *N* és un nombre primer, la suma dels seus divisors propis sempre dóna 1. *Correcte! Evident perquè N només té l'1 i el propi N com a divisors.*
2. Si la suma no dóna igual (el cas del 6), aleshores sempre dóna menor. *Conjectura 1: la suma dels divisors propis d'un nombre sempre és igual o menor al nombre.*
3. Hi ha més nombres que no tenen la propietat que busquem que no pas els que la tenen: només hem trobat el 6 entre els deu primers! *Conjectura 2: hi ha pocs nombres perfectes.*

Per poder investigar una mica més en aquestes dues conjectures, és interessant calcular la suma dels divisors propis entre l'11 i el 20:

N	Suma dels divisors
11	1
12	1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16
13	1
14	1 + 2 + 7 = 10
15	1 + 3 + 5 = 9

N	Suma dels divisors
16	1 + 2 + 4 + 8 = 15
17	1
18	1 + 2 + 3 + 6 + 9 = 21
19	1
20	1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22

Desmuntada la conjectura 1, és el moment de definir el concepte de nombre perfecte i també el de nombre deficient i el de nombre abundant. A més a més, per començar a preparar el tractament de la conjectura 2, va bé avisar que, entre els primers deu mil nombres, només el 6, el 28, el 496 i el 8128 són perfectes. Comprovem-ho! L'alumnat els factoritza, calcula el nombre de divisors de cadascun d'ells i també els seus divisors i la seva suma:

$$
\begin{aligned}
6 &= 1 + 2 + 3 \\
28 &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \\
496 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 \\
8128 &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064
\end{aligned}
$$

Si, a més a més, estem treballant les operacions amb fraccions, convé saber que una de les propietats més curioses d'aquest tipus de nombres és que la suma dels inversos dels seus divisors sempre dóna 2:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{28}{28} + \frac{14}{28} + \frac{7}{28} + \frac{4}{28} + \frac{2}{28} + \frac{1}{28} = \frac{56}{28} = 2$$

Fixem-nos que, un cop fet el mínim comú múltiple, els numeradors obtinguts són justament tots els divisors del nombre perfecte.

Una altra propietat interessant i que no és difícil de demostrar, malgrat que implica un cert grau d'abstracció i domini de les propietats de les potències, és el fet que tot nombre perfecte parell acaba en 6 o en 8. Com $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ amb n i $2^n - 1$ primers, n ha de ser senar i, per tant, $n = 4k + 1$ o bé $n = 4k + 3$. Si $n = 4k + 1$, aleshores:

$$N = 2^{4k}(2^{4k+1} - 1) = 16^k(2 \cdot 16^k - 1)$$

És evident que 16^k sempre acabarà en 6 ja que $6 \cdot 6 = 36$. Per tant, $2 \cdot 16^k$ acabarà en 2 i $2 \cdot 16^k - 1$ acabarà en 1, i el producte $16^k(2 \cdot 16^k - 1)$ acabarà en 6. De la mateixa manera, si $n = 4k + 1$, aleshores:

$$N = 2^{4k+2}(2^{4k+3} - 1) = 4 \cdot 16^k(8 \cdot 16^k - 1)$$

En aquest cas, 16^k acaba en 6, $4 \cdot 16^k$ acaba en 4, $8 \cdot 16^k$ acaba en 8 i $8 \cdot 16^k - 1$ acaba en 7. Per tant, $4 \cdot 16^k(8 \cdot 16^k - 1)$ acabarà en 8.

Finalment, una tercera propietat interessant és l'expressió que tenen els nombres perfectes en base 2. És difícil de poder implementar-la a classe perquè les bases de numeració no estan explícitament contemplades en el currículum obligatori de l'ESO (Decret 143/2007), però com que els canvis de base impliquen divisions, sempre pot usar-se com un estímul més a l'aula. Així, observem l'expressió dels quatre primers nombres perfectes expressats en base 2:

n	$N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ en base 10	$N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ en base 2	Nombre de xifres	Nombre d'uns	Nombre de zeros
2	6	110	3	2	1
3	28	11100	5	3	2
5	496	111110000	9	5	4
7	8.128	1111111000000	13	7	6

Fixem-nos que l'expressió en base 2 de cadascun dels quatre nombres té un total de $2n - 1$ xifres, de les quals, n són 1 i $n - 1$ són 0. Per tant, no és difícil pronosticar que el cinquè nombre perfecte, corresponent a $n = 13$, tindrà 25 xifres, encapçalades per 13 uns seguits de 12 zeros. La demostració d'aquesta propietat és evident a partir de l'expressió euclidiana $N = 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$.

Una curiositat final. Si sumem les xifres d'un nombre perfecte $N > 6$, i tornem a sumar les del resultat obtingut i així reiteradament fins a arribar a tenir una única xifra decimal, el resultat és:

28	$2 + 8 = 10$	$1 + 0 = 1$	
496	$4 + 9 + 6 = 19$	$1 + 9 = 10$	$1 + 0 = 1$
8128	$8 + 1 + 2 + 8 = 19$	$1 + 9 = 10$	$1 + 0 = 1$
33550336	$3 + 3 + 5 + 5 + 0 + 3 + 3 + 6 = 28$	$2 + 8 = 10$	$1 + 0 = 1$

Sempre 1!

Una extensió del concepte de nombres perfectes són els *nombres multiperfectes N*, definits per la igualtat $\sigma^*(N) = kN$ per a un cert k (si $k = 1$ estem un cop més davant dels nombres perfectes). Però, què passa si $k = 2$ o $k = 3$? La recerca d'aquest tipus de nombres és força complicada perquè, per exemple, actualment només es coneixen sis nombres multiperfectes per a $k = 2$ i no se sap encara si són els únics: 120, 672, 523776, 459818240, 1476304896 i 51001180160. Per poder fer una aproximació al problema i seguir treballant amb la funció σ^*, podem tornar a demanar a l'alumnat la confecció d'una taula amb el càlcul de la suma dels divisors propis dels nombres naturals compostos (ja que $\sigma^*(p) = 1$ si p és primer) i la corresponent k obtinguda:

N	$\sigma^*(N)$	k
4	3	$\frac{3}{4}$
6	6	1
8	7	$\frac{7}{8}$
9	4	$\frac{4}{9}$
10	8	$\frac{4}{5}$
12	16	$\frac{4}{3}$
14	10	$\frac{5}{7}$
15	9	$\frac{3}{5}$
16	15	$\frac{15}{16}$
18	21	$\frac{7}{6}$

N	$\sigma^*(N)$	k
20	22	$\frac{11}{10}$
21	11	$\frac{11}{21}$
22	14	$\frac{7}{11}$
24	36	$\frac{3}{2}$
25	6	$\frac{6}{25}$
26	16	$\frac{8}{13}$
27	13	$\frac{13}{27}$
28	28	1
30	42	$\frac{7}{5}$
32	31	$\frac{31}{32}$

N	$\sigma^*(N)$	k
33	15	$\frac{5}{11}$
34	20	$\frac{10}{17}$
35	13	$\frac{13}{35}$
36	55	$\frac{55}{36}$
38	22	$\frac{11}{19}$
39	17	$\frac{17}{39}$
40	50	$\frac{5}{4}$
42	54	$\frac{9}{7}$
44	40	$\frac{10}{11}$
45	33	$\frac{11}{15}$

A la vista dels primers resultats, ja es fa evident la dificultat de trobar nombres multiperfectes. A més a més, si considerem la definició de nombre multiperfecte en funció de $\sigma(N) = (k+1)N = k'N$ en lloc de $\sigma^*(N)$, la cerca de les k' equival al càlcul de la funció $\Sigma(N)$ que definia els nombres amistosos, els quals, com hem vist, són difícils de trobar. Posem un exemple més. La parella formada pels nombres 4320 i 4680 és amistosa:

$$\Sigma(4.320) = \frac{\sigma(4320)}{4320} = \frac{15120}{4320} = \frac{7}{2} = k' \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

$$\Sigma(4.680) = \frac{\sigma(4680)}{4680} = \frac{16380}{4680} = \frac{7}{2} = k' \Rightarrow k = \frac{5}{2}$$

De la mida de la taula calculada, només tenim les parelles formades pel 12 i el 234 ($k = \frac{4}{3}$), el 24 i el 91963648 ($k = \frac{3}{2}$), el 30 i el 140 ($k = \frac{7}{5}$) i el 40 i el 224 ($k = \frac{5}{4}$). De fet, el 30 pertany a un grup amistós de cinc nombres format pel 30, el 140, el 2480, el 6200 i el 40640.

Així doncs, veiem com els nombres perfectes poden ser una font de problemes, debats, aportacions, propietats, curiositats, demostracions... amb què esdevenen un recurs molt útil a l'aula de matemàtiques.

Igual que al començament s'ha definit la funció σ, ara també es pot definir la funció $\tau(n) = \prod_{d|n} d$ i, aleshores, considerar els nombres N tals que $\tau(N) = N^2$ (Sándor, 2001). Per exemple, $N = 6$ compleix que el producte dels seus divisors és igual a $\tau(6) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 6^2$. En aquest cas, direm que el 6 és un *nombre multiplicativament perfecte*, o simplement, *m-perfecte*.

Deixant de banda els nombres primers $p > 1$, ja que és evident que $\tau(p) = p \neq p^2$, podem confeccionar una taula per fer-nos una primera idea de si n'hi ha molts o pocs i de si són difícils de trobar (aquesta taula podria ser demanada a l'alumnat com a primer pas per començar una cerca de nombres *m*-perfectes):

N	Producte dels divisors
4	$1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 \neq 4^2$
6	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 36 = 6^2$
8	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 64 = 8^2$
9	$1 \cdot 3 \cdot 9 = 27 = 9^{1,5}$
10	$1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100 = 10^2$
12	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728 = 12^3$
14	$1 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 14 = 196 = 14^2$
15	$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 15 = 225 = 15^2$

N	Producte dels divisors
16	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = 1024 = 16^{2,5}$
18	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 18 = 5832 = 18^3$
20	$1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 = 8.000 = 20^3$
21	$1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 21 = 441 = 21^2$
22	$1 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 22 = 484 = 22^2$
24	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 24 = 331776 = 24^4$
25	$1 \cdot 5 \cdot 25 = 125 = 25^{1,5}$
26	$1 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 26 = 676 = 26^2$

Podem observar algun patró? Evidentment que sí. Per guiar l'alumnat, només cal que classifiquin els nombres segons el resultat obtingut:

No s'obté cap potència natural	$\tau(N) = N^2$	$\tau(N) = N^3$	$\tau(N) = N^4$
$4 = 2^2$	$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$	$12 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3$	$24 = 1 \cdot 2^3 \cdot 3$
$9 = 3^2$	$8 = 1 \cdot 2^3$	$18 = 1 \cdot 2 \cdot 3^2$	
$25 = 5^2$	$10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$	$20 = 1 \cdot 2^2 \cdot 5$	
	$14 = 1 \cdot 2 \cdot 7$		
	$15 = 1 \cdot 3 \cdot 5$		
	...		

Podem treure alguna conclusió? Algunes possibles respostes dels alumnes són:

1. Els nombres quadrats no són *m*-perfectes. *Perfecte! Haurem de treballar la raó.*
2. Els nombres de la forma $N = p_1 \cdot p_2$ amb $p_1 \neq p_2$ sí que ho són. *Molt bé.*
3. I els de la forma $N = p_1^2 \cdot p_2$ amb $p_1 \neq p_2$ compleixen $\tau(N) = N^3$. *Això s'anima.*
4. I els de la forma $N = p_1^3 \cdot p_2$ amb $p_1 \neq p_2$ compleixen $\tau(N) = N^4$. *I què hi ha de les potències?*
5. De moment, si $N = p_1^3$ sí que compleix $\tau(N) = N^2$.

Per veure si podem trobar una regla general, és força interessant anar proposant nombres i, segons la seva descomposició factorial en producte de primers, anar comprovant les conjectures establertes. Per exemple:

1. $N = 27 = 3^3 \Rightarrow \tau(27) = 1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 27 = 729 = 27^2$, d'acord amb la conjectura 5.
2. $N = 28 = 2^2 \cdot 7 \Rightarrow \tau(28) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 28 = 21952 = 28^3$, d'acord amb la conjectura 3.
3. $N = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow \tau(30) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 30 = 81000 = 30^4$.

Aquest resultat no el teníem controlat. Provem-ne un altre de semblant:

1. $N = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow \tau(30) = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 14 \cdot 35 \cdot 70 = 70^4$. Per tant, podem conjecturar que els nombres de la forma $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ compleixen $\tau(N) = N^4$.
2. $N = 32 = 2^5 \Rightarrow \tau(32) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32 = 21952 = 32^3$. Ens surt una nova conjectura.

Un cop més, veiem la font de problemes i de raonaments que ens aporta aquest tipus de nombres. A partir d'aquí, no és difícil poder generalitzar algun dels resultats conjecturats amb llenguatge algebraic. Per exemple:

Proposició: *Si $N > 1$ és de la forma $N = p_1 \cdot p_2$ amb $p_1 \neq p_2$, aleshores $\tau(N) = N^2$.*

Demostració: Si $N = p_1 \cdot p_2$, aleshores els seus únics divisors són 1, p_1, p_2 i $p_1 \cdot p_2$, i el seu producte és $1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot (p_1 \cdot p_2) = p_1^2 \cdot p_2^2 = (p_1 \cdot p_2)^2 = N^2$. □

Per seguir amb les definicions curioses, si N és un nombre m-perfecte ($\tau(N) = N^2$) i també compleix $\tau(\tau(N)) = N^2$, aleshores s'anomena *m-superperfecte*, i si un nombre N compleix $\tau(N) = N^k$ per a un cert k, aleshores s'anomena *m-multiperfecte*. (Sándor, 2001). Amb aquestes noves definicions es pot demostrar que:

1. El 6 és l'únic nombre perfecte que és també m-perfecte.
2. El 28 és l'únic nombre perfecte que és també m-multiperfecte per a $k = 3$.
3. No hi ha cap nombre perfecte que sigui també m-multiperfecte per a $k = 4$.
4. El 496 és l'únic nombre perfecte que és també m-multiperfecte per a $k = 5$.

Finalment, una pregunta oberta: hi ha algun nombre *m-superperfecte*? Probablement, una primera aproximació numèrica al problema de seguida determinarà la seva dificultat, i evidenciarà també la necessitat de fer ús del llenguatge algebraic i d'una demostració general per a resoldre'l. Donant per fet que un nombre m-perfecte és de la forma $N = p_1 \cdot p_2$ amb $p_1 \neq p_2$ o bé $N = p_1^3$, aleshores:

Proposició: *No existeixen nombres m-superperfectes.*

Demostració: Si $N = p_1 \cdot p_2$ amb $p_1 \neq p_2$, aleshores $\tau(N) = (p_1 \cdot p_2)^2$ i, per tant, els seus divisors són 1, p_1, p_1^2, p_2, $p_1 p_2$, $p_1^2 p_2$, p_2^2, $p_1 p_2^2$ i $p_1^2 p_2^2$, el producte dels quals és $\tau(\tau(N)) = p_1^9 \cdot p_2^9 = N^9$.

De manera similar es fa en el cas $N = p_1^3$. □

Futures investigacions i aplicacions

Un cop encetat aquest tema, s'ha de dir que hi ha molts més tipus de nombres susceptibles de ser usats a l'aula en diversos contextos i que ens poden servir igualment per a motivar l'alumnat i jugar-hi. Per exemple, els coneguts com a *nombres de Harshad* (del sànscrit *harsha* i *da*, que, traduït, vol dir quelcom semblant a 'productor de goig') o *de Niven* són els nombres divisibles per la suma de les seves xifres (Kaprekar, 1955, i Kennedy, Goodman i Best, 1980). Per exemple, qualsevol nombre d'una xifra és divisible per ell mateix i, doncs, és un nombre de Harshad. Què passa amb els nombres de dues xifres? Un ràpid cop d'ull a tots els nombres $10 \leq N \leq 19$ ens permet constatar que el 10, el 12 i el 18 són nombres de Harshad, i si ampliem la mostra fins a $N \leq 99$, és fàcil comprovar que només hi ha 32 nombres menors que 100 amb aquesta propietat.

Aquest tipus de nombres poden ser una bona excusa per a repassar els criteris de divisibilitat o, fins i tot, mostrar propietats que haurien pogut passar desapercebudes d'una altra manera. Per exemple, la determinació d'aquests primers nombres de Harshad es pot fer a partir d'anar considerant quines combinacions de dues xifres sumen el nombre pel qual hem de dividir:

d	Nombre de Harshad	Nombre no divisible per la suma d de les seves xifres
1	10	
2	20	11
3	12, 21, 30	
4	40	13, 22, 31
5	50	14, 23, 32, 41
6	24, 42, 60	15, 33, 51
7	70	16, 25, 34, 43, 52, 61
8	80	17, 26, 35, 44, 53, 62, 71
9	18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90	
10		19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91
11		29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92
12	48, 84	39, 57, 66, 75, 93
13		49, 58, 67, 76, 85, 94
14		59, 68, 77, 86, 95
15		69, 78, 87, 96
16		79, 88, 97
17		89, 98

Una propietat que podem veure ràpidament és per què s'ensenya el criteri de divisibilitat d'un nombre com el 9, ja que veiem clarament que tots els resultats obtinguts a la taula de multiplicar del 9 són múltiples d'aquest nombre.

A més a més, es poden intentar buscar sèries de nombres de Harshad consecutius i es pot apuntar que és demostrable que no hi ha cap d'aquestes sèries que contingui més de 20 nombres (Grundman, 1994).

Veiem, doncs, que en les propietats aritmètiques dels nombres tenim una gran font de curiositats, propietats i demostracions que poden convertir les nostres classes en moments tan divertits com interessants.

Referències

Álvarez, M. D., Hernández, J. i altres (2011). *Matemàtiques 1 ESO*. Barcelona: Santillana.

Anderson, C. W., Hickerson, D. (1977). Friendly Integers. *American Mathematical Monthly*, 84, 65-66.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognitivo*. Mèxic: Trillas.

Brentjes, S. (1987). Die ersten sieben volkommenen Zahlen und drei Arten befreudeter Zahlen in einem Werk zur elementaren Zahlentheorie von Ismāᶜīl b. Ibrāhīm b. Fallūs. *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin,* 24, 1, 21-30.

Burgos, S., Domínguez, M., Rojas, F. J., Planas, N., Vilella, X. (2006). La participación en el aula de matemáticas. Dins J. M. Goñi (coord.), *Matemáticas e interculturalidad* (p. 49-62). Barcelona: Graó.

Cohen, H. (1970). On Amicable and Sociable Numbers. *Mathematics of Computation*, 24, 423-429.

Decret 142/2007 DOGC 4915. *Currículum de l'Educació Primària - Àrea de matemàtiques*.

Decret 143/2007 DOGC 4915. *Currículum d'Educació Secundària Obligatòria - Àrea de matemàtiques*.

Dickson, L. E. (1913). Amicable Number Triplets. *American Mathematical Monthly*, 20, 84-92.

Dickson, L. E. (1971). *History of the Theory of Numbers*. Vol. 1. Nova York: Chelsea Publishers Co.

Dorce, C. (2013a). El Joc del 1089 en l'ensenyament dels nombres decimals i la introducció del llenguatge algebraic. *NouBiaix*, 33 (octubre 2013), 22-35.

Dorce, C. (2013b). *Història de la matemàtica. Des de Mesopotàmia fins al Renaixement*. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

Euler, L. (1747). De numeris amicabilibus. Dins *Nova acta eruditorum*, 1747, 267-269. També dins *Opera Omnia*: sèrie 1, vol. 2, 59-61. És el document E100 de l'Euler Archive (http://eulerarchive.maa.org).

Gómez Chacón, I. M. (1997). Un instrumento para la autorregulación de las emociones en Matemáticas. *Boletín IEPS*, 71 (desembre), 5-7.

Grundman, H. G. (1994). Sequences of Consecutive *n*-Niven Numbers. *Fibonacci Quarterly*, 32, 174-175.

Guy, R. K. (1994). *Unsolved problems in Number Theory*. Nova York: Springer-Verlag.

Hickerson, D. (2002). Re: friendly/solitary numbers [was: typos] seqfan@ext. jussieu.fr mailing list. 19 setembre 2002.

Kaprekar, D. R. (1955). Multidigital Numbers. *Scripta Mathematica*, 21, 27.

Kennedy, R., Goodman, R., Best, C. (1980). Mathematical Discovery and Niven Numbers. *MATYC J.*, 14, 21-25.

Makowski, A. (1960). On Some Equations involving functions $\phi(n)$ and $\sigma(n)$. *American Mathematical Monthly*, 67 (1960), 668-670; *correction* en 68 (1961), 650.

Mason, T. E. (1921). On amicable numbers and their generalizations. *American Mathematical Monthly*, 28, 5, 195-200.

Poulet, P. (1918). Question 4865. *L'interméd. des Math.*, 25, 100-101.

Rashed, R. (1994). *The Development of Arabic Mathematics: Between Arithmetic and Algebra*. Dordrecht. Boston, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Sándor, J. (2001). On Multiplicatively Perfect Numbers. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*. Vol. 2, 1, article 3.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's* Book of Calculation. Nova York, Berlín, Heidelberg, Hong Kong, Londres, Milà, París, Tòquio: Springer.