

La sèrie harmònica

Armengol Gasull

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
gasull@mat.uab.cat

Resum

En aquest treball estudiarem les propietats i aplicacions de la sèrie harmònica i de les seves sumes parcials. Començarem veient diferents proves de la seva divergència.

Estudiarem diversos resultats clàssics sobre la convergència o divergència de les seves subsumes, com per exemple la dels inversos dels números primers o la dels inversos dels números que no tenen cap nou entre les seves xifres. També recollirem situacions en les quals aquesta sèrie o les seves sumes parcials apareixen.

Així, entre d'altres, considerarem el problema del col·leccionista, el de la secretària, el dels rècords en sèries de dades, un problema de control de qualitat, el passeig aleatori i algunes qüestions de matemàtica recreativa.

Abstract

In this work we study the properties and applications of the harmonic series and its partial sums. We will start showing different proofs of its divergence. We also will study several classical results on the convergence or divergence of some subsums, for instance those formed by the reciprocals of prime numbers, or the one given by the reciprocals of numbers that have not nines in their decimal expressions. We also present several situations where this series or its partial sums appear. In particular, we consider the so-called coupon collector's problem, the secretary problem, the records in data series, the random walk and some questions on recreational mathematics.

1. Introducció

La sèrie harmònica és l'exemple més antic i famós de successió de números positius, cada cop més petits i tendint a zero, però amb suma infinita. Aquest fet sembla que és conegut des del segle XIV. Si ho escrivim d'una manera informal,

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = +\infty,$$

i més rigorosament, introduint les sumes parcials,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n},$$

tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

De vegades, en lloc de dir que la suma és infinita, també es diu que la sèrie és divergent o, per abús de llenguatge, que convergeix cap a infinit. La primera secció la dediquem a explicar per què la sèrie que estudiem s'anomena harmònica.

Hi ha moltíssimes demostracions de la divergència de la sèrie harmònica. Per exemple, a [24, 25] se'n recopilen més de quaranta. A la segona secció d'aquest treball recollim una selecció d'algunes de les més elementals.

Un resultat encara més interessant i delicat, que ja va demostrar el matemàtic suís Leonhard P. Euler (1707-1783) el 1737, és que

$$\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots$$

és divergent (vegeu, per exemple, [33]). A la secció 3.2 en donarem una demostració molt curta que féu, el 1938, el prolífic matemàtic hongarès Paul Erdős (1913-1996) (vegeu [1, 3, 10, 41]). Observeu que aquest resultat ens mostra l'abundància de nombres primers.

D'altra banda, per exemple, si només agafem els termes de la forma $\frac{1}{2^k}, k \in \mathbb{N}$, la sèrie obtinguda està formada pels termes d'una progressió geomètrica i convergeix cap a 1. En aquest cas, això es deu al fet que hem agafat molt pocs termes dels que formen tota la sèrie harmònica completa.

Un resultat molt curiós en aquesta direcció va ser provat el 1914 ([23]) pel matemàtic anglès/nord-americà Aubrey J. Kempner (1880-1973). Anomenem \mathbb{N}' el conjunt de tots els números naturals que no tenen cap 9 en la seva expressió en base 10. Aleshores, la suma $\sum_{k \in \mathbb{N}'} \frac{1}{k}$ és convergent. Demostrarem aquest resultat, i més concretament que $S < 90$, a la secció 3.1. De fet, se sap que $S \approx 22.92$ ([20, 36]). Eliminant una altra xifra o blocs més llargs de xifres, la convergència també es manté ([36]).

Tot i que, en principi, el resultat de Kempner pot sorprendre, després de reflexionar-hi una mica, intuïtivament és clar que la convergència de la sèrie és conseqüència del fet que «la majoria» dels nombres amb moltes xifres tenen algun 9 entre elles.

A la quarta secció introduïrem la constant d'Euler $\gamma \approx 0.577218$ i estudiarem la seva relació amb les sumes harmòniques h_n . Farem els passos principals per a provar que

$$h_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + R(n), \quad \text{amb} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nR(n) = 0,$$

seguint les idees de [19, 39] (vegeu [14] per a tots els detalls). Aquesta relació ens serà molt útil per a aplicar-la a certs càlculs explícits que apareixeran a la secció següent. També introduïrem les constants de Mertens i de Brun, associades respectivament a la suma dels inversos dels nombres primers i a les sumes dels inversos dels primers bessons.



Figura 1. Torre de sis peces construïda basant-se en la sèrie harmònica.

La cinquena secció la dedicarem a estudiar diversos problemes famosos en els quals la sèrie harmònica o les seves sumes parcials juguen un paper fonamental. Així, considerarem el problema del col·leccionista, el de la secretària, el de barrejar cartes, el de la formació de blocs de cotxes en les carreteres amb un sol carril, el dels rècords en sèries de dades, un problema de control de qualitat, el passeig aleatori i un parell de qüestions ben famoses de matemàtica recreativa: com poder travessar un desert infinit i la construcció de torres amb molt vol a partir de peces amb forma de dòmino (vegeu la figura 1).

El treball [14] és una extensió d'aquest en el qual es consideren també diverses modificacions de la sèrie harmònica, incloent-hi signes i reordenacions dels seus termes, així com sèries aleatòries relacionades.

2. I per què harmònica?

Les tres successions més conegudes són les anomenades aritmètica, geomètrica i harmònica. Aquestes són, respectivament,

$$\{bk + c\}_{k \geq 0}, \quad \{br^k\}_{k \geq 0}, \quad \left\{\frac{b}{k}\right\}_{k \geq 1} \quad (1)$$

on b , c , r són constants reals. El seus noms provenen del fet següent: donats dos nombres positius x i y , hi ha tres mitjanes ben conegudes que es poden calcular amb ells:

$$A(x,y) = \frac{x+y}{2}, \quad G(x,y) = \sqrt{xy}, \quad H(x,y) = \frac{2xy}{x+y} = \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}\right)^{-1}.$$

S'anomenen mitjana aritmètica, geomètrica i harmònica, respectivament. Resulta que si denotem com a x_k el terme k -èsim de cascuna de les tres successions, amb b i r positius, es compleix el següent:

Cas aritmètic: $A(x_{k-1}, x_{k+1}) = \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2} = \frac{b(k-1) + b(k+1) + 2c}{2} = bk + c = x_k$,

Cas geomètric: $G(x_{k-1}, x_{k+1}) = \sqrt{x_{k-1}x_{k+1}} = \sqrt{br^{k-1}br^{k+1}} = br^k = x_k$,

Cas harmònic: $H(x_{k-1}, x_{k+1}) = \frac{2x_{k-1}x_{k+1}}{x_{k-1} + x_{k+1}} = \frac{2b^2}{\frac{b}{k-1} + \frac{b}{k+1}} = \frac{b}{k} = x_k$.

La mitjana aritmètica no necessita presentació, però les altres dues potser sí. Així, per exemple, si un capital C ens produeix el primer any un rèdit anual d'un x per 1 i el segon any un rèdit anual d'un y per 1, quan han passat dos anys tenim com a capital total $(1+x)(1+y)C$. Aleshores, el rèdit mitjà r_M complirà $(1+x)(1+y)C = (1+r_M)^2C$ i, per tant, $r_M = \sqrt{(1+x)(1+y)} - 1 = G(1+x, 1+y) - 1$.

De manera similar, si anem a un lloc que està a distància d amb velocitat x i tornem amb velocitat y , aleshores recorrem una distància $2d$ en un temps total $\frac{d}{x} + \frac{d}{y}$. Per tant, la velocitat mitjana a la qual hem anat és $\frac{2d}{d/x+d/y} = \frac{2xy}{x+y} = H(x, y)$.

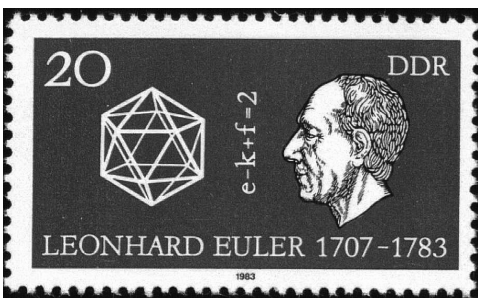
En aquest punt, és natural preguntar-se per què la mitjana $H(x, y)$ es diu *harmònica*. Sembla ser que devem aquest nom als dos fets següents, estudiats per l'escola pitagòrica ([18, cap. 13], [40]).

Si agafem una corda de longitud ℓ de manera que quan vibra dona lloc a un cert so, la corda amb longitud $\frac{\ell}{2}$ sona molt similar. A més, si agafem una tercera corda de longitud $\frac{2\ell}{3}$, obtenim un tercer so, més diferent. El fet notable observat pels pitagòrics és que, quan fem vibrar les tres cordes simultàniament, escoltem un acord molt *harmonios* (seria un acord tipus DO-SOL-DO), i resulta que

$$H\left(\ell, \frac{\ell}{2}\right) = \frac{\ell^2}{\ell + \frac{\ell}{2}} = \frac{2\ell}{3}.$$

Un segon motiu per a l'adjectiu harmònic és que, d'entre els cinc sòlids platònics, el cub era de vegades qualificat com a harmònic. Un cub té 6 cares ($c = 6$), 12 arestes ($a = 12$) i 8 vèrtexs ($v = 8$). Doncs, $H(c, a) = H(6, 12) = 8 = v$. De manera similar per a un altre sòlid platònic, l'octàedre $H(v, a) = H(6, 12) = 8 = c$.

Si busquem més políedres que compleixin la mateixa condició que el cub o l'octàedre, $H(c, a) = v$ o $H(v, a) = c$, i a aquesta condició li afegim la donada per la característica d'Euler $c - a + v = 2$, tenim que s'ha de complir una de les equacions diofàntiques següents:



$$(v - 1)^2 - 2(c - 1)^2 = -1 \quad \text{o} \quad (c - 1)^2 - 2(v - 1)^2 = -1.$$

Les equacions de la forma $x^2 - 2y^2 = -1$ són de tipus Pell, anomenades així en honor del matemàtic anglès John Pell (1611-1685), i se sap que tenen infinites parelles de solucions enteres positives ([9, 28]). Resolent-les, obtenim que les solucions més petites del nostre problema (c, a, v) són les ternes

$$\{(6, 12, 8), (8, 12, 6), (30, 70, 42), (42, 70, 30), (170, 408, 240), \\ (240, 408, 170), (986, 2378, 1394), (1394, 2378, 986), \dots\}.$$

Hi ha un políedre conegut, amb nom *Bicúpula pentagonal giroallargada*, que correspon al quart punt d'aquesta llista (vegeu la figura 2). Aquest políedre és un dels 92 sòlids de Johnson, que són políedres convexos que tenen totes les cares formades per polígons regulars ([22]). Agraïxo a en Jaume Coll per fer-me saber de la seva existència. El tercer punt correspon al seu políedre dual i no sabem que es conegui amb cap nom propi.

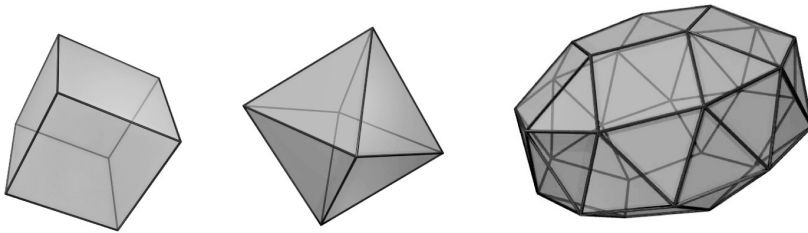


Figura 2. Políedres harmònics. La tercera figura té $c = 42$, $a = 70$ i $v = 30$.
Les cares són 2 pentàgons, 10 quadrats i 30 triangles.

De manera natural, associades a les tres successions (1), hi ha tres sèries: l'aritmètica, la geomètrica i l'harmònica,

$$\sum_{k=0}^{\infty} bk + c, \quad \sum_{k=0}^{\infty} br^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b}{k},$$

respectivament. La primera és sempre divergent. La segona és convergent si i només si $|r| < 1$ i es coneix tant la seva suma com l'expressió explícita de les seves sumes parcials. Com ja hem comentat, la tercera, amb $b \neq 0$, és divergent i és la que estudiem en aquest treball.

3. Divergència de la sèrie harmònica

En aquesta secció presentarem diverses proves de la divergència de la sèrie harmònica.

1a prova. Comencem amb la prova més antiga del fet esmentat, de voltants de 1350, atribuïda al filòsof francès Nicole Oresme (1323-1382).

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} + \dots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty.$$



Figura 3. N. Oresme.

Una escriptura més rigorosa ens diria que $h_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$, i per tant $\lim_{k \rightarrow \infty} h_{2^k} = \infty$.

Una variació de la prova d'Oresme és la següent: hi ha 9 números amb un dígit, 1, 2, ..., 9 i els seus inversos són més grans que $\frac{1}{10}$, per tant $h_9 > \frac{9}{10}$. Hi ha 90 números de dos dígit, des de 10 fins a 99, amb inversos més grans que $\frac{1}{100}$. Per tant, $h_{99} > \frac{9}{10} + \frac{90}{100} = 2\left(\frac{9}{10}\right)$. D'una manera similar, $h_{999} > \frac{9}{10} + \frac{90}{100} + \frac{900}{1000} = 3\left(\frac{9}{10}\right)$. En general, $h_{10^k-1} > \frac{9k}{10}$, i per tant de nou deduïm que la suma és infinita.

2a prova. La prova descrita a continuació és atribuïda al matemàtic italià Pietro Mengoli (1626-1686) i no ens dona una demostració directa, sinó que es basa en el mètode de reducció a l'absurd. Suposem que la sèrie harmònica té una suma finita, S . Observem, en primer lloc, que

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} = \frac{2n}{n^2-1} > \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}, \quad n \geq 2.$$

En particular, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} > \frac{2}{3}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} > \frac{2}{6}$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{10} > \frac{2}{9}$, $\frac{1}{11} + \frac{1}{13} > \frac{2}{12}$... Per tant,

$$\begin{aligned} S &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right) + \dots \\ &> 1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{2}{12} + \frac{1}{12}\right) + \dots = 1 + S, \end{aligned}$$

és a dir, $S > 1 + S$, i hem arribat a una contradicció.

3a prova. Com l'anterior, usa la reducció a l'absurd per a demostrar la divergència de la sèrie. Si S fos finit, tenim

$$\begin{aligned} S &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &> \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots = S, \end{aligned}$$

on clarament la desigualtat és estricta, tot i que prové d'un pas al límit, i de nou arribem a una contradicció.

Una variació d'aquesta prova és com segueix. Si agafem només els inversos dels termes parells, la seva suma és $\frac{5}{2}$, ja que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \right) = \frac{5}{2}.$$

Per tant, si la suma és finita, els inversos dels termes senars haurien de sumar també $\frac{5}{2}$, però, com que per a tot $n \geq 1$, $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, es compleix que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots > \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \dots = \frac{5}{2},$$

on de nou la desigualtat és estricta, i obtenim un cop més una contradicció.

4a prova. Donem a continuació una prova una mica més tècnica, ja que està basada en la desigualtat $e^x > 1 + x$, per $x \neq 0$, però que trobem interessant. Considerem

$$\begin{aligned} e^{h_n} &= e^{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right)} = e^1 \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{1}{n}} \\ &> \left(1 + 1\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n} = n+1. \end{aligned}$$

Per tant, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$, tal com volíem veure. Observem que aquesta prova també ens diu que, per a tot n , $h_n > \ln(n+1)$. De fet, també es compleix que $h_n < \ln(n) + 1$ (vegeu [14, 18, 27]).

Per tant, perquè h_n sigui gran, el valor de n ha de ser realment gran: vegeu la taula 1. A la secció 4 es donen estimacions més precises de h_n .

Taula 1. Valors de h_n amb quatre xifres decimals significatives.

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10^9	10^{12}
h_n	2.9290	5.1874	7.4855	9.7876	12.0901	14.3927	21.3005	28.2082

5a prova. Acabarem la nostra selecció de proves amb una demostració que usa propietats de la successió de Fibonacci, $\{f_n\}_{n \geq 0}$. Recordem que els seus termes vénen donats per la recurrència $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, amb $f_0 = 0$, $f_1 = 1$. Així, els primers són 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Amb una mica de feina es pot demostrar que la seva expressió explícita és

$$f_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{2\phi - 1}, \quad \text{on } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ i compleix } \phi^2 - \phi - 1 = 0.$$

Per tant,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \left(\frac{1}{\phi}\right)^2 = \frac{1}{\phi^2} = \frac{1}{\phi+1} = 1 - \frac{1}{\phi}.$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{13}\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{14} + \dots + \frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{34}\right) + \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{5}{13} + \frac{8}{21} + \frac{13}{34} + \dots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_{n-1}}{f_{n+1}}, \end{aligned}$$

és divergent, ja que el terme general de l'última sèrie no tendeix a zero.

3.1. Un tros convergent de la sèrie harmònica. El resultat de Kempner

Dedicarem aquesta subsecció a provar el resultat de Kempner ja enunciat a la introducció i que diu que

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}'} \frac{1}{k} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{18}\right) + \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \dots + \frac{1}{28}\right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{88}\right) + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{108}\right) + \frac{1}{110} + \dots, \quad (2) \end{aligned}$$

és convergent, on \mathbb{N}' denota el conjunt de tots els números naturals que no tenen cap 9 en la seva expressió en base 10. Seguirem els mateixos passos que al seu treball ([23]).

Denotem per s_n la suma de tots els números de la forma $\frac{1}{k}$ amb $10^{n-1} \leq k < 10^n$ i $k \in \mathbb{N}'$, i per m_n el nombre de termes que hi ha a la suma. Calculem fites superiors dels m_n i també dels s_n , usant que tots els k 's són més grans que 10^{n-1} o iguals.

Així, en partir de (2) és clar que $m_1 = 8 < 9$, $s_1 < 9 \times 1 = 9$, i de manera similar $m_2 = 8 \times 9 < 9^2$ i $s_2 < 9^2 \frac{1}{10}$. Denotem per M_n el nombre de termes de la suma amb $k < 10^n$. És clar que $M_n = m_1 + m_2 + \dots + m_n$. Així, $M_1 < 9$ i $M_2 < 9 + 9^2$. Vegem, per inducció, que

$$M_n < 9 + 9^2 + 9^3 + \dots + 9^n, \quad m_n < 9^n \quad \text{i} \quad s_n < \frac{9^n}{10^{n-1}}.$$

Per això dividim tot $\mathcal{I}^{n+1} = \{k \in \mathbb{N}' : 0 < k < 10^{n+1}\}$ en els deu subconjunts següents:

$$\mathcal{I}_0^{n+1} = \{k \in \mathbb{N}' : 0 < k < 10^n\}, \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_\alpha^{n+1} = \{k \in \mathbb{N}' : \alpha 10^n \leq k < (\alpha + 1)10^n\},$$

on $\alpha = 1, 2, \dots, 9$. L'interval \mathcal{I}_9^{n+1} és buit, ja que tots els seus números tenen un 9 en la seva expressió decimal. Cada un dels altres vuit \mathcal{I}_α^{n+1} amb $\alpha > 0$ té el mateix nombre d'elements, que coincideix amb el nombre d'elements de \mathbb{N}' que hi ha entre 0 i 10^n , M_n , que per hipòtesi d'in-

ducció és menor que $9+9^2+9^3+\dots+9^n$. Pertant, $m_{n+1} < 8 \times (9+9^2+9^3+\dots+9^n) = 8 \frac{9^{n+1}-9}{9-1} < 9^{n+1}$, i també $M_{n+1} < 9+9^2+9^3+\dots+9^n+m_{n+1} < 9+9^2+9^3+\dots+9^n+9^{n+1}$. Finalment, $s_{n+1} < \frac{m_{n+1}}{10^n} = \frac{9^{n+1}}{10^n}$, tal com volíem demostrar.

Per acabar,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}'} \frac{1}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} s_{n+1} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^{n+1}}{10^n} = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n = 9 \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 90.$$

La prova no varia si en lloc del 9 eliminem qualsevol altre dígit excepte el 0. El cas del 0 és lleugerament diferent.

3.2. Un tros divergent de la sèrie harmònica. La suma dels inversos dels nombres primers

Reproduïm a continuació una prova per reducció a l'absurd del fet que $\sum_{p \text{ primer}} \frac{1}{p}$ és divergent deguda a Erdős ([1, 3, 10, 41]). Denotem per p_i el primer i -èsim. Així, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_{100} = 541, \dots, p_{1000} = 7919, \dots$. Suposem, per tal d'arribar a contradicció, que la sèrie és convergent. Aleshores, existirà un $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Donat $m \in \mathbb{N}$, definim A_m com el subconjunt de $\{1, 2, \dots, m\}$ format per tots els números que no tenen cap p_i amb $i > k$ en la seva descomposició en factors primers. En altres paraules, la seva descomposició en factors primers és de la forma $p_1^{j_1} \cdots p_k^{j_k}$ amb tots els $j_u \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Fitant per sobre i per sota el nombre d'elements de A_m , $\text{Car}(A_m)$, i prenent un m prou gran arribarem a una contradicció.

Comencem fitant $\text{Car}(A_m)$ per sobre. Tots els elements d' A_m es poden escriure com a $r \cdot s^2$, amb $r \in \mathbb{N}$, sense cap factor primer en la seva descomposició amb exponent més gran que 1 i $s \in \mathbb{N}$. Per tant, $r = p_1^{\ell_1} \cdots p_k^{\ell_k}$ amb tots els $\ell_u \in \{0, 1\}$ i com a conseqüència només pot prendre 2^k valors. A més, s ha de ser un element del conjunt $\{1, [\sqrt{2}], \dots, [\sqrt{m}]\}$, on $[\cdot]$ denota la part sencera. Aleshores, s només té $[\sqrt{m}]$ possibilitats. Per tant,

$$\text{Car}(A_m) \leq 2^k [\sqrt{m}] \leq 2^k \sqrt{m}. \quad (4)$$

D'altra banda, $\{1, 2, \dots, m\} \setminus A_m$ és un conjunt amb cardinal $m - \text{Car}(A_m)$ i està format pels números menors o iguals que m que són divisibles per algun primer p_i amb $i > k$. Per cada i fixat, $i > k$, hi ha com a molt $\left[\frac{m}{p_i}\right]$ números dins d'aquest conjunt que són divisibles per aquest p_i . En conseqüència,

$$m - \text{Car}(A_m) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \left[\frac{m}{p_i}\right] \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{m}{p_i} = m \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{m}{2}, \quad (5)$$

on hem usat (3).

Per tant, a partir de (4) i (5) arribem a

$$\frac{m}{2} < \text{Car}(A_m) \leq 2^k \sqrt{m}. \quad (6)$$

Si prenem qualsevol $m \geq 2^{2k+2}$, tenim que $\frac{\sqrt{m}}{2} \geq 2^k$ i, per tant, que $\frac{m}{2} \geq 2^k \sqrt{m}$, que està en contradicció amb (6). Per tant, $\sum_p \frac{1}{p}$ és divergent, tal com volíem provar. Com hem comentat a la introducció, això ens dóna la intuïció que hi ha una quantitat suficient de primers per a fer divergir la sèrie dels seus recíprocs.

3.3. Una curiositat sobre els h_n

Una propietat curiosa i coneguda dels números $h_n, n > 1$ és que en el seu camí cap a infinit mai passen per cap número natural, és a dir, $h_n \notin \mathbb{N}$, per $n > 1$.

Per a provar-ho, prenem la potència de 2 més gran que sigui menor o igual que n . És a dir, sigui $k \in \mathbb{N}$, tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. A continuació, anomenem m el mínim comú múltiple de $1, 2, \dots, n$, traient aquest 2^k , $m = \text{mcm}(\{1, 2, 3, \dots, n\} \setminus \{2^k\})$. Aleshores, $m = 2^{k-1}s$, amb $s \in \mathbb{N}$, senar, ja que el 2 apareix a les descomposicions dels números dels quals fem el mcm elevat com a màxim a $k - 1$. Tenim, doncs,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^k} = \frac{j}{2^{k-1}s}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Per tant,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{j}{2^{k-1}s} + \frac{1}{2^k}.$$

Multiplicant per $2^{k-1}s$ arribem a $2^{k-1}s h_n = j + \frac{s}{2}$. Com que s és senar, $2^{k-1}s \in \mathbb{N}$ i $j \in \mathbb{N}$, tenim que $h_n \notin \mathbb{N}$, com volíem demostrar.

4. Les constants d'Euler, Mertens i Brun

Euler, el 1731, va provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n - \ln(n)) = \gamma \in [0, 1), \quad (7)$$

on γ és precisament el número que avui en dia anomenem constant d'Euler i que és una de les constants més famoses en matemàtiques: vegeu [18, 27]. El seu valor és $\gamma \approx 0.577218$. També s'anomena constant d'Euler-Mascheroni, ja que Mascheroni la va calcular l'any 1790 amb dinou xifres decimals correctes. L'any 1812, Gauss la va obtenir amb quaranta xifres significatives. Avui encara no se sap si γ és racional o irracional.

Per a demostrar que el límit (7) existeix, el que es prova és que la successió $h_n - \ln(n)$ és decreixent i que està fitada inferiorment. Un refinament d'aquest fet és que

$$h_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + R(n), \quad \text{amb} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nR(n) = 0, \quad (8)$$

i és el que usarem en aquest treball. De fet, (8) és una conseqüència de les desigualtats provades per Young ([39]),

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq h_n - \ln(n) - \gamma \leq \frac{1}{2n}, \quad (9)$$

que es poden demostrar seguint el mètode introduït a [19], que usa les anomenades sèries telescòpiques.



Recordem que una sèrie telescòpica és una sèrie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$ amb $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Per a aquestes sèries,

$$\sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_N - a_{N+1}) = a_1 - a_{N+1}.$$

Per tant, $S = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (a_1 - a_{N+1}) = a_1$. Observeu que les sumes parcials es pleguen com un telescopi!

Donem a continuació les idees principals de la prova de (9) (vegeu [14] per a més detalls). Considerem el desenvolupament de Taylor,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \dots, \quad (10)$$

cas particular per a $x = -\frac{1}{n+1}$ del desenvolupament de $\ln(1+x)$ provat el 1668 pel matemàtic alemany Nikolaus Mercator (1620-1687), que no s'ha de confondre amb el famós matemàtic i cartògraf flamenc Gerardus Mercator (1512-1594). Basant-nos en aquest desenvolupament, es pot demostrar en primer lloc que

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} < h_n - \ln(n) - (h_{n+1} - \ln(n+1)) < \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}. \quad (11)$$

Observem que els seus tres termes tenen l'estructura d'una sèrie telescòpica. Considerant les desigualtats (11) per als valors $n, n+1, n+2, \dots, N$, sumant-les i fent tendir N cap a infinit obtenim les desigualtats (9).

De fet, la funció $R(n)$ introduïda a (8) es coneix amb molt més detall. Tot i que no els usarem en aquest treball, donem a continuació un parell de resultats més sobre $R(n)$ (vegeu [18, 27, 38]). Euler, el 1775, va provar el desenvolupament asimptòtic a l'infinit següent:

$$h_n \sim \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \dots = \ln(n) + \gamma - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{kn^k} \quad (12)$$

on els B_k són els anomenats números de Bernoulli.

Una variació d'aquesta fórmula, que és equivalent, apareix als quaderns del matemàtic indi Srinivasa Aiyangar Ramanujan (1887-1920) (vegeu [7, p. 521]):

$$h_n \sim \frac{1}{2} \ln(2m) + \gamma + \frac{1}{12m} - \frac{1}{120m^2} + \frac{1}{630m^3} - \frac{1}{1680m^4} + \dots,$$

on $m = \frac{n(n+1)}{2}$ és l'enèsim número triangular.

Molt relacionada amb la constant d'Euler hi ha una altra constant $\mathcal{C} \approx 0.261497$, anomenada constant de Mertens, en honor del matemàtic alemany Franz Mertens (1840-1927), que el 1874 va provar ([29]) que

$$\sum_{p \text{ primer}, p \leq n} \frac{1}{p} = \ln(\ln(n)) + \mathcal{C} + T(n), \quad \text{amb} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(n) = 0,$$

(vegeu també [27, 33]). De fet, Euler mateix ja va conjeturar la relació anterior, però sense la constant de Mertens. Clarament, aquest resultat també implica la divergència de la sèrie formada pels inversos dels primers.

En aquest punt, un es pot preguntar què passaria si consideréssim la sèrie formada pels inversos dels primers bessons, és a dir, si només poséssim a la suma els inversos de números p i $p+2$, quan ambdós són primers. El matemàtic noruec Viggo Brun (1885-1978) va demostrar el 1919 ([8]) que

$$\sum_{p, p+2 \text{ primers}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2} \right) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{29} + \frac{1}{31} \right) + \dots$$

és convergent. El valor de la seva suma es coneix avui en dia com la constant de Brun, \mathcal{B}_2 , i el seu valor aproximat és 1.90216... ([16, 31, 41]). Observem que aquest resultat no demostra si hi ha infinites parelles de primers bessons o no, ja que és coherent amb ambdues situacions. El que sí que dóna és una via per a intentar veure que n'hi ha infinits: demostrar que \mathcal{B}_2 és irracional.

De fet, va ser durant el càlcul de \mathcal{B}_2 que, el 1994, Thomas Nicely ([31, 32]) va trobar el famós error (*bug*) en les divisions que feia el processador Intel Pentium, i més precisament quan considerava el parell de primers bessons 824 633 702 441 i 824 633 702 443 (vegeu [18]). El seu famós *e-mail* començava:

Sembla que hi ha un error a la unitat de coma flotant (coprocessador numèric) de molts, i potser tots, els processadors Pentium. En resum, el Pentium FPU torna valors erronis per a determinades divisions. Per exemple, $1/824\,633\,702\,441.0$ es calcula incorrectament (tots els dígits més enllà del vuitè dígit significatiu són erronis)...

5. Aplicacions de la sèrie harmònica

A la literatura hi ha diferents aplicacions de la divergència de la sèrie harmònica i també del coneixement de les seves sumes parcials h_n (vegeu, per exemple, [18, Cap. 13] o [40]). Moltes de les que recollim aquí tenen un caire probabilístic i es basen o bé en el càlcul de l'esperança d'una variable aleatòria o bé en la distribució geomètrica. Per això, abans de començar a descriure-les, dedicarem l'inici d'aquesta secció a fer un breu recordatori de les propietats que necessitem.

Recordem que, donada una variable aleatòria X , que pren només valors enters positius $k \in \mathbb{N}$, amb probabilitats respectives p_k , es defineix la seva esperança $E(X)$ com

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k P\{X = k\},$$

sempre que la sèrie anterior sigui convergent. Si és divergent, es diu que X té esperança infinita. Així, per exemple, si X és el resultat de tirar un dau perfecte de sis cares, la probabilitat d'obtenir qualsevol dels sis resultats és $\frac{1}{6}$ i la seva esperança és $E(X) = \sum_{k=1}^6 \frac{k}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$.

La Llei forta dels grans nombres de Kolmogórov (vegeu per exemple, [21, 35]) implica que si tirem moltes vegades un dau i anem anotant els resultats obtinguts, la mitjana de les puntuacions s'acosta a 3.5, amb probabilitat 1. Així, intuïtivament, el valor esperat d'una variable aleatòria és aproximat per la mitjana dels resultats de repetir molts cops, i d'una manera independent, un mateix experiment aleatori.

Sigui U una variable aleatòria amb distribució de Bernoulli, que pren els valors $\{0,1\}$ de manera que $P\{U = 1\} = p, P\{U = 0\} = q = 1 - p, p \in [0,1]$. El valor 1 s'associa normalment al resultat que volem que surti i el valor 0, al no desitjat.

La variable aleatòria V que consisteix a agafar una successió $U_1, U_2, \dots, U_k, \dots$ de variables aleatòries independents, totes amb la mateixa distribució que U i que pren el valor k quan totes les U_s amb $s < k$ han pres el valor 0 i U_k ha pres el valor 1, s'anomena variable aleatòria amb distribució geomètrica. És clar que els valors que pren V són els enters positius, i per la independència de les U_k ,

$$P\{V = k\} = p q^{k-1} = p_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Les sumes següents són ben conegudes

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} p q^{k-1} &= \frac{p}{1-q} = 1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} k p q^{k-1} &= p \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = p \frac{\partial}{\partial q} \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = p \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{1-q} \right) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}, \end{aligned}$$

i tenen una interpretació probabilística ben clara. La primera ens diu que la suma de totes les probabilitats p_k és 1. La segona ens diu que l'esperança de la variable aleatòria V és $\frac{1}{p}$, és a dir,

$$E(V) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P\{V = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \frac{1}{p}.$$

Aquest resultat és el que farem servir sistemàticament en els exemples que segueixen. De manera més informal, el que ens diu és el següent: *Si, en fer un experiment aleatori, un cert succés passa amb probabilitat $p = \frac{1}{N}$ i anem repetint aquest experiment, cada cop de manera independent de totes les anteriors, el nombre esperat (mitjà) de vegades que l'hem de repetir perquè el succés desitjat ocorri és $\frac{1}{p} = N$. Així, per exemple, si $p = \frac{1}{2}$, aquest número de vegades serà 2. Això, és clar, no vol dir que algun cop necessitem repetir-lo tres o quatre cops (penseu, per exemple, en llençar una moneda fins que surti cara) o fins i tot cent o mil cops, si és que tenim moltíssima mala sort! D'una manera semblant, si $p = \frac{1}{100}$, el número esperat de vegades serà 100.*

5.1. El problema del col·leccionista

Aquest és un problema clàssic que s'explica a molts cursos de probabilitat (vegeu, per exemple, [12, 34]) i que va ser plantejat per primer cop l'any 1708 pel matemàtic francès Abraham de Moivre (1667-1754).

Suposem que volem fer una col·lecció de N objectes diferents i els obtenim aleatòriament (per exemple, comprant successivament paquets tancats que continguin un dels objectes). Cada paquet pot contenir qualsevol dels objectes amb la mateixa probabilitat $\frac{1}{N}$. Aleshores, la qüestió que es proposa és quin és el nombre esperat de paquets que hem de comprar per a poder acabar la col·lecció. Les aplicacions més famoses són les col·leccions de cromos o dels regals que apareixen a les capses de cereals. Observem el següent:

- El primer paquet que comprem segur que ens dona un element de la col·lecció que no tenim.
- En comprar el segon paquet, la probabilitat que contingui un element de la col·lecció que ens falta és $p = \frac{N-1}{N}$. Per tant, el nombre de paquets que hem de comprar per a obtenir aquest segon element, un cop ja tenim el primer objecte, és una variable aleatòria amb llei geomètrica de paràmetre $p = \frac{N-1}{N}$ i, per tant, el seu valor esperat serà $\frac{1}{p} = \frac{N}{N-1}$. Aleshores haurem de comprar en total $1 + \frac{N}{N-1}$ paquets per a tenir dos elements de la col·lecció.
- A continuació, la probabilitat que un element de la col·lecció que ens falta sigui en un paquet és $p = \frac{N-2}{N}$. Així, el nombre esperat de paquets que hem de comprar per a obtenir aquest tercer element un cop ja en tenim dos de diferents és $\frac{1}{p} = \frac{N}{N-2}$. Per tant, haurem de comprar

$$1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} = N \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-2} \right)$$

paquets per a tenir tres elements de la col·lecció.

- Si seguim així, és clar que un cop ja tenim $N - 1$ elements de la col·lecció, la probabilitat d'obtenir l'últim és $p = \frac{1}{N}$, que necessita d'una compra (de mitjana) de N paquets més. Així, poder acabar la col·lecció requereix una compra mitjana de

$$1 + \frac{N}{N-1} + \frac{N}{N-2} + \dots + \frac{N}{2} + N = N \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1 \right),$$

és a dir, $N h_N$ paquets. A la taula 1 ja s'han mostrat alguns valors de h_n .

Com hem vist a la secció 4, Euler va demostrar que per a n gran, $h_n \approx \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n}$. Així, per a una col·lecció de 100 cromos, de mitjana un col·leccionista necessitaria comprar $100 h_{100} \approx 57.7 + 200 \ln(10) + \frac{1}{2} \approx 518.7 \approx 519$ cromos per a acabar la col·lecció.

5.2. Barrejar cartes

Una de les maneres més senzilles de barrejar N cartes seria seguir el mètode següent. Per a nosaltres, un moviment consistirà senzillament a agafar la carta de sobre i posar-la a l'atzar a qualsevol lloc dels de sota. El procediment de barrejar-les consisteix a fer successivament moviments d'aquest tipus. En aquest context, la pregunta natural és: *Quin és el nombre esperat de moviments que hem de fer per a assegurar (de mitjana) que tenim les cartes totalment barrejades?* Veurem que aquest número esperat és $N h_N$.

Anomenem S la carta que a l'inici és sota la baralla. Quan fem el primer moviment, la probabilitat que la carta de sobre passi a sota és $\frac{1}{N}$. Per tant, tal com hem explicat a l'inici d'aquesta secció, el nombre esperat de moviments perquè això passi és N . A continuació, la probabilitat que la carta de sobre passi a ser a sota de S és ara $\frac{2}{N}$ i, com a conseqüència, el nombre esperat de moviments perquè S passi a ser al tercer lloc per sota de la baralla serà $N + \frac{N}{2}$. En aquesta situació, la probabilitat que la carta de sobre passi a ser a sota de S serà $\frac{3}{N}$, ja que ja pensem que hi ha dues cartes sota S . Per tant, el nombre esperat de moviments perquè S sigui la quarta per la cua serà $N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3}$. Observem que amb aquests tres moviments és raonable pensar que les tres cartes que hi ha per sota de S estan ben barrejades.



Raonant de la mateixa manera, el nombre esperat de moviments perquè S sigui sobre de la baralla és $N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \dots + \frac{N}{N-1}$. Amb un moviment més, S es col·loca a l'atzar entre les $N - 1$ cartes de sota. Per tant, el nombre esperat de moviments per a barrejar les N cartes és

$$N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \dots + \frac{N}{N-1} + 1 = N \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} \right) = N h_N.$$

Per a una baralla de 48 cartes, $48 h_{48} \approx 214.02$ i per una de 52 cartes $52 h_{52} \approx 235.98$.

5.3. Rècords

Aquest també és un problema clàssic tractat a molt llocs (vegeu, per exemple, [2, 4]). Donada una successió ordenada de variables aleatòries amb lleis contínues $\{X_k\}_{k \geq 1}$, independents i idènticament distribuïdes, ens interessem pel nombre esperat de rècords quan considerem les diferents successions de N números, $X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega), \dots, X_N(\omega)$. Aquí s'entén que $X_k(\omega)$ és un rècord si el seu valor és més gran que tots els anteriors de la successió.

La variable aleatòria Z que compta el nombre de rècords es pot construir com segueix.

En primer lloc, observem que les variables aleatòries X_1, X_2, \dots, X_k prenen valors diferents amb probabilitat 1 i, per tant, que hi ha $k!$ maneres diferents d'ordenar-les. Com que aquestes variables són independents i idènticament distribuïdes, la seva llei conjunta és simètrica. Aquesta simetria implica que totes les ordenacions són equiprobables. Si X_k és un rècord, les variables restants es poden ordenar de $(k - 1)!$ maneres diferents, totes equiprobables. Per tant, la probabilitat que X_k sigui un rècord és $p_k = \frac{(k-1)!}{k!} = \frac{1}{k}$.

A continuació, considerem la nova variable aleatòria de Bernoulli Y_k , que val 1 si X_k és un rècord i val 0 en cas contrari. Aquesta pren el valor 1 amb probabilitat $\frac{1}{k}$ i el valor 0 amb probabilitat $1 - \frac{1}{k}$.

Aleshores, $Z = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$. Per tant, com que $E(Y_k) = 1 \cdot \frac{1}{k} + 0 \cdot (1 - \frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$,

$$E(Z) = E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) = E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_N) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} = h_N. \quad (13)$$

S'ha comprovat en molts casos que el resultat anterior s'adequa perfectament a dades meteorològiques. Així, per exemple, a [4, 5] s'usa per a veure que els rècords de pluja caiguda a Barcelona el 17 d'octubre durant el període 1900-2006 i també els de pluja caiguda a Palma de Mallorca els mesos de febrer i octubre de 1862 a 2006 compleixen el resultat predit per (13).

A [26] es fa el mateix, recollint dades de la neu caiguda en un aeroport de Chicago durant el període 1966-2004 o amb el nombre anual rècord de tornados a Illinoi entre 1956 i 2004. Per exemple, en aquests 49 anys, els rècords del nombre de tornados van ser durant els anys 1956 (el primer any sempre és un rècord), 1957, 1973, 1974 i 2003, és a dir, cinc rècords, i $h_{49} \approx 4,479$.

Observeu que en aquest darrer cas, en el qual es compta el nombre anual de tornados, les variables aleatòries X_k són discretes, ja que prenen només valors naturals. Aleshores, s'hauria de tenir en compte també la possibilitat que dues d'elles coincideixin, ja que té probabilitat positiva. El model es pot modificar sense problemes perquè tingui en consideració aquest fet. De totes maneres, com hem vist a l'exemple, si el rang de X_k és prou ampli (hi ha anys amb més de 100 tornados), el mateix model dona resultats raonables.

Fins ara hem pensat que tots els rècords són tals que $X_k(\omega)$ és més gran que tots els anteriors termes de la successió. És clar que la mateixa teoria es pot aplicar quan $X_k(\omega)$ és més petit que tots els anteriors. De fet, això ja es fa als treballs [4, 5] estudiant també els rècords amb menys pluviositat. L'exemple següent aprofitarà de nou aquest fet.

5.4. Cues en un túnel

En aquest exemple estudiarem el trànsit en un túnel o un pont, prou llargs i amb un sol carril, en el qual és impossible fer avançaments. Suposarem també que hi entren N cotxes, amb N prou gran, i que les velocitats de tots els cotxes són variables aleatòries independents i idènticament distribuïdes.

En la situació descrita, el fet que hi hagi un rècord amb mínima velocitat provoca que darrere d'aquest cotxe es faci automàticament una petita cua formada per un bloc de cotxes que l'hauria avançat si la carretera ho hagués permès. El bloc de cotxes següent no es forma fins

que no apareix un altre vehicle que va a una velocitat inferior a la del primer vehicle. Per tant, raonant com a l'exemple anterior, de mitjana es formen h_N blocs de cotxes, que es van separant més i més conforme van avançant en el túnel. Si hi ha 100 vehicles circulant, el nombre de blocs esperat serà 5.2. Aquest resultat s'observa en situacions reals de conducció.

5.5. Un problema de control de qualitat

Suposem que volem veure la resistència per trencament d'una gran remesa de bigues de fusta. Per a conèixer la força que aguanta una biga, la recolzem pels seus extrems i apliquem una força F de manera contínua, i cap avall, al seu punt mitjà, just fins que es trenca (vegeu la figura 4).

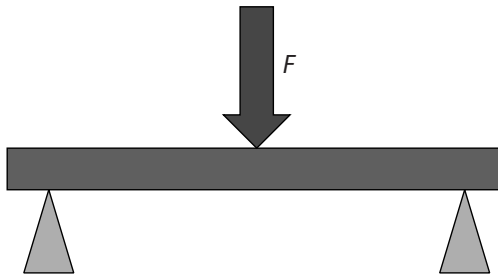


Figura 4. Control de trencament.

Una manera d'estimar la resistència esperada de totes les bigues podria ser agafar-ne unes quantes a l'atzar, diguem $N = 100$, i anar fent la prova per a cadascuna fins que es trenquin. D'aquesta manera, el mínim dels valors F_k , $k = 1, 2, \dots, N$ ens donaria una bona estimació de la força que aguantarien totes les bigues de la remesa. El problema és que n'hauríem trencat N .

Una manera més intel·ligent d'obtenir el mateix resultat, però trencant moltes menys bigues, és la que descriurem a continuació ([18]). Agafem la primera biga i anem augmentant F fins que es trenqui. Aleshores tenim ja un primer rècord, diguem-ne F_1 . A continuació agafem una segona biga i anem augmentant la força, o bé fins que es trenqui o bé fins a arribar a F_1 . Si no es trenca, la retirem i fem el mateix amb les següents. Quan una es trenqui abans d'arribar a F_1 , tindrem un segon rècord, diguem-ne F_2 . A continuació, procedim de la mateixa manera, però prenent com a força límit F_2 . Si fem això fins a arribar a la N -èsima biga, el nombre esperat de bigues trencades serà només $h_N = h_{100} \approx 5.2$.

Tot i que podria passar que tinguéssim tanta mala sort que agaféssim les bigues de manera que cadascuna tingués menys resistència que l'anterior, això té una probabilitat petitíssima. Per tant, amb aquest mètode, de mitjana només trencarem unes sis bigues i obtindrem la mateixa informació. Si volguéssim fer el mateix test amb mil bigues, de mitjana només n'acabariem trencant $h_{1000} \approx 7.5$.

Observem que amb el nou mètode només podem estimar la resistència per trencament de les bigues, però no podríem estimar quin és el valor mitjà de la F que les trenca. Per saber això, no ens quedaria cap més remei que trencar-ne N .

5.6. El passeig aleatori al pla

Considerem la retícula \mathbb{Z}^2 del pla. Suposem que estem a l'origen $(0,0)$ i tirem un dau de quatre cares per a saber si anem amunt, avall, a la dreta o a l'esquerra. Per tant, amb probabilitat $\frac{1}{4}$ estarem en un dels quatre punts contigus a l'origen: $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ i $(0, -1)$. Si fem això indefinidament, continuant cada cop al lloc on ens ha deixat el moviment anterior, la pregunta és si podem assegurar que tornarem a l'origen.

Anomenem p_k la probabilitat de tornar a l'origen després d'haver tirat el dau k vegades (independentment de si és el primer cop que tornem o no) i q_k la probabilitat de tornar per primer cop després de tirar exactament k vegades el dau. És clar que es compleix que $p_{2k+1} = q_{2k+1} = 0$. Amb una mica de feina (vegeu, per exemple, [6]) es pot demostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{2k}}{\frac{1}{k}} = C \neq 0, C \in \mathbb{R}, \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1 - \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} p_k}.$$

Per tant, el fet que la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k}$ es comporti com la sèrie harmònica, que és divergent, ens assegura $\sum_{k=1}^{\infty} q_k = 1$, és a dir, que la probabilitat de retorn a l'origen és 1. De fet, es pot veure que la probabilitat de tornar-hi infinites vegades també és 1. Atesa aquesta propietat, es diu que el passeig aleatori al pla és *recurrent*.

D'una manera similar es pot veure que en una xarxa 1-dimensional (els punts són \mathbb{Z} dins de la línia real i anem cap al punt de la dreta o al de l'esquerra amb probabilitat $\frac{1}{2}$) les p_{2k} es comporten com $\frac{1}{\sqrt{k}}$, que també dóna lloc a una sèrie divergent. De nou, la probabilitat de retorn a la posició inicial és 1 i tenim un passeig aleatori recurrent.

D'altra banda, en una xarxa 3-dimensional, p_{2k} és com $\frac{1}{\sqrt{k^3}}$ i, per tant, la sèrie associada és convergent. De fet, en dimensió 3, la probabilitat que un passeig aleatori torni a l'origen és només de 0.34... ([6, 30]). És mala idea perdre's a l'espai!

Va ser el matemàtic hongarès George Pólya (1887-1985) qui, el 1921, va demostrar, per primer cop, que en dimensions 1 i 2 el passeig aleatori retorna amb probabilitat 1 a l'origen mentre que això ja no succeeix en dimensions superiors (vegeu, per exemple, [11]).

5.7. El problema de la secretària

Aquest és també un problema ben clàssic que usa la teoria de la probabilitat per a proposar una bona estratègia per a triar el «millor» candidat entre una quantitat N de persones per a fer una determinada tasca. Tot i que el bategem pel seu nom clàssic, aquest problema té moltíssimes altres aplicacions, com per exemple per la tria de parella, restaurant, aparcament per al cotxe... (vegeu [18, 37]).

La situació és la següent: Hi ha N persones (o objectes, o situacions) i hem de triar la «millor» per als nostres interessos. Aquestes persones arriben a nosaltres per ordre, i podem obtenir tota la informació que vulguem sobre elles. Aleshores hem de decidir si triem aquesta persona o no. Si no la triem, ja no tenim la possibilitat de tornar a contactar amb ella i passem a entrevistar la següent. La pregunta és: *Quina és l'estratègia que hem de seguir per a augmentar*

la probabilitat de triar la millor? Observem que, si triem una persona a l'atzar, la probabilitat que sigui la millor és $\frac{1}{N}$.

Per això es proposa l'estratègia següent, que anomenarem l'estratègia « r ». Consisteix a fer el següent: *Entrevistem les r primeres persones, $r \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ i ens quedem amb la primera de les restants que és millor que les r primeres, o amb l'última si cap ho compleix.* Com veurem a continuació, el càlcul del valor de la millor estratègia, que serà quan r val un cert valor $r = R = R(N)$, ens proporcionarà una petita sorpresa.

Anomenem A el succés «triar el millor candidat», i B_i el succés «el millor candidat és al lloc i -èsim», $1 \leq i \leq N$. Calculem la probabilitat $P_r(A)$ que passi A si apliquem l'estratègia « r ». Tenim que

$$P_r(A) = \sum_{i=1}^N P_r(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^N P_r(A/B_i)P_r(B_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P_r(A/B_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=r+1}^N P_r(A/B_i),$$

on hem usat els fets següents:

- El valor $P_r(A/B_i)$ indica la probabilitat que succeeixi A suposant que el millor candidat és al lloc i -èsim.
- Es compleix que $P_r(B_i) = \frac{1}{N}$, ja que la probabilitat que el millor candidat sigui al lloc i -èsim és la mateixa per a tots els valors d' i , i lògicament no depèn de l'estratègia « r ».
- L'estratègia « r » fa que mai triem cap dels r primers candidats. Per tant, $P_r(A/B_i) = 0$ per $i \leq r$.

De fet, la fórmula que hem usat per a calcular $P_r(A)$ és la que s'anomena *fórmula de les probabilitats totals*. Per acabar el nostre càlcul només ens falta obtenir $P_r(A/B_i)$ per $i > r$.

Clarament, $P_r(A/B_{r+1}) = 1$, ja que, si el millor candidat és al lloc $r+1$, l'hem triat segur, perquè en particular és millor que els r primers.

D'una manera similar, $P_r(A/B_{r+2}) = \frac{r}{r+1}$, ja que només en el cas que el millor dels $r+1$ primers candidats sigui al lloc $r+1$, no l'hem triat, i aquest cas té probabilitat $\frac{1}{r+1}$. Així mateix, si $i > r+2$,

$$P_r(A/B_i) = \frac{r}{i-1},$$

atès que, en aquesta situació, els casos favorables són que entre els $i-1$ primers candidats el millor estigui a les r primeres posicions (així, els candidats $r+1, r+2, \dots, i-1$ són tots pitjors que el millor dels r primers). És a dir, $P_r(A/B_i) = \frac{r}{i-1}$, $i = r+1, r+2, \dots, N$.

Per tant, $P_r(A)$, que denotarem també com a $p(N, r)$, val

$$\begin{aligned} p(N, r) &:= P_r(A) = \frac{1}{N} \sum_{i=r+1}^N \frac{r}{i-1} \\ &= \frac{1}{N} \left(1 + r \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \dots + \frac{1}{N-1} \right) \right) = \frac{1}{N} \left(1 + r(h_{N-1} - h_r) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

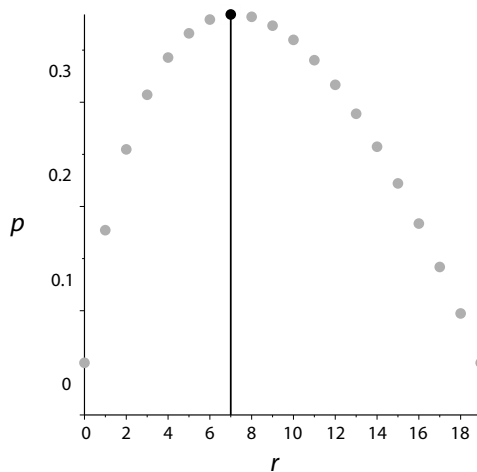


Figura 5. Valors $p(20, r)$ per $r = 0, 1, \dots, 19$.

Per acabar l'estudi, només ens falta saber, per a cada N fixat, per a quin valor $r \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ la funció $r \rightarrow p(N, r)$ té un màxim. Aquest és un problema discret, que per a N petit es pot resoldre directament calculant quin dels N possibles valors de r dona el màxim. Per exemple, a la figura 5 mostrem els valors per $N = 20$. En aquest cas, l'òptim es dona per $r = R = 7$ i $p(20, 7) \approx 0.384$.

Per tant, hem vist que, si $N = 20$ i si triem el primer candidat que sigui millor que els set primers, en un 38.4% dels casos ens quedariem amb el millor candidat; una gran millora respecte al 5% que s'obtingria si triéssim el candidat a l'atzar.

Vegem per acabar, i usant un cop més el resultat d'Euler que ens assegura que, per a n prou gran, $h_n \approx \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n}$, que hi ha una manera analítica prou satisfactòria per a trobar una expressió explícita del valor $r = R(N)$ que fa màxima la probabilitat $p(N, r)$. Usant el resultat esmentat d'Euler i (14) tenim que, per a r prou gran,

$$p(N, r) = \frac{1}{N} \left(1 + r(h_{N-1} - h_r) \right) \approx \frac{1}{N} \left(1 + r \left(h_{N-1} - \left(\gamma + \ln(r) + \frac{1}{2r} \right) \right) \right) =: \hat{p}(N, r).$$

A continuació, fixat N , per a trobar una aproximació del màxim de $p(N, r)$ el que fem és buscar el màxim de la seva aproximació $\hat{p}(N, r)$. Per això, resollem l'equació

$$\frac{\partial}{\partial r} \hat{p}(N, r) = \frac{1}{N} \left(h_{N-1} - \gamma - \ln(r) - 1 \right) = 0.$$

Així, el màxim de $\hat{p}(N, r)$ està a $r = \hat{R}$, on

$$\begin{aligned} \hat{R} &= e^{h_{N-1} - \gamma - 1} \approx e^{\left(\ln(N-1) + \frac{1}{2(N-1)} - 1 \right)} = \frac{(N-1)e^{\frac{1}{2(N-1)}}}{e} \\ &\approx \frac{(N-1) \left(1 + \frac{1}{2(N-1)} \right)}{e} = \frac{N - \frac{1}{2}}{e}. \end{aligned}$$

Notem que hem usat de nou el resultat d'Euler per a aproximar h_{N-1} i també que $e^x \approx 1 + x$ per $x \approx 0$.

Per tant, aquesta aproximació ens diu que l'estratègia òptima seria prendre com a R el número $\lceil \lceil \frac{N-\frac{1}{2}}{e} \rceil \rceil$, on el doble claudàtor denota l'enter més proper a $\frac{N-\frac{1}{2}}{e}$. A tots els materials consultats se sol prendre com a estratègia òptima $R = \lceil \lceil \frac{N}{e} \rceil \rceil$, ja que la diferència entre ambdós és prou petita. Observem que, per a aquest valor de R ,

$$p(N,R) \approx p(N,\widehat{R}) \approx \widehat{p}(N,\widehat{R}) = \frac{\widehat{R} + \frac{1}{2}}{N} \approx \frac{1}{e}.$$

Així, per a N prou gran, l'estratègia proposada prenent $r = R = \lceil \lceil \frac{N}{e} \rceil \rceil$ permet triar el millor candidat amb probabilitat aproximada $\frac{1}{e}$, és a dir, amb èxit, en un 36.79% dels casos. A la taula 2 veiem per a uns quants valors de N la diferència entre el resultat que acabem d'obtenir i aquell al qual s'arriba fent l'estudi directe de la funció cas per cas. Com es pot observar, per a N gran, ambdós resultats són indistingibles.

Taula 2. Valors de $R(N)$, $p(N, R(N))$ i els corresponents valors estimats, $\lceil \lceil \frac{N}{e} \rceil \rceil$ i $\frac{1}{e}$ per a certs valors de N .

N	5	10	20	50	100	1000
$R(N)$	2	3	7	18	37	368
$p(N, R(N))$	0.433	0.399	0.384	0.374	0.371	0.368
$\lceil \lceil N/e \rceil \rceil$	2	4	7	18	37	368
$1/e$	0.368	0.368	0.368	0.368	0.368	0.368

5.8. Creuant el desert

Exposarem aquí la versió del problema seguint [18]. Suposem que volem creuar un desert de mida d amb un jeep que funciona amb combustible (no elèctric) i que té una autonomia que li permet recórrer exactament una distància 1 (és a dir, prenem com a unitat de mesura de distàncies l'autonomia d'un jeep). Per a fer-ho disposem de tants jeeps i conductors com necessitem. L'objectiu és que, al final de tots els moviments dels jeeps, un d'ells hagi creuat el desert i els altres hagin pogut tornar al seu punt de partida, és a dir, ni cap jeep ni cap conductor poden quedar perduts al mig desert.

La pregunta és si és possible fer-ho i, si és que sí, quants jeeps necessitarem? Hi ha altres versions, igualment interessants del problema, en les quals només hi ha un jeep involucrat, però que permeten deixar dipòsits durant el camí. No les considerarem aquí, però admeten un tractament similar.

Vegem primer quan hauria de ser com a molt d per a poder travessar-lo amb dos jeeps, seguint les regles donades. Els dos jeeps J_1 i J_2 recorren $\frac{1}{3}$. Aleshores, el jeep J_2 dona $\frac{1}{3}$ del



seu combustible a J_1 i torna al punt de sortida. Per tant, J_1 pot recórrer una distància màxima de $\frac{1}{3} + 1$.

Si comencem amb tres jeeps, fem el següent. Els tres recorren primer $\frac{1}{5}$. Aleshores, J_3 dona $\frac{1}{5}$ del seu combustible a J_1 i un altre $\frac{1}{5}$ a J_2 . Per tant, a distància $\frac{1}{5}$ de la base de partida hi ha els tres jeeps, J_1, J_2 i J_3 , amb capacitats de recórrer distàncies respectives 1, 1 i $\frac{2}{5}$. Continuant com en el cas de dos jeeps obtenim que J_1 pot recórrer $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} + 1$ i J_2 pot tornar, arribant ja sense combustible, on l'espera J_3 amb $\frac{2}{5}$ de combustible. Els dos se'l reparteixen per a tornar a la base.

Raonant de la mateixa manera, és clar que, amb N jeeps, el primer podrà recórrer

$$s_N = \frac{1}{2N-1} + \frac{1}{2N-3} + \dots + \frac{1}{3} + 1.$$

El procés començaria amb els N jeeps recorrent $\frac{1}{2N-1}$, i el jeep J_N quedant-se amb $\frac{N-1}{2N-1}$ del seu combustible i donant $\frac{1}{2N-1}$ parts a cada un dels jeeps J_1, J_2, \dots, J_{N-1} i continuaria d'una manera semblant amb els $N-1$ jeeps amb el dipòsit ple que estarien ja a distància $\frac{1}{2N-1}$ de la base. És clar que $\lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \infty$ i que, per tant, qualsevol desert pot ser creuat si N és prou gran.

Per acabar, vegem com obtenir la relació entre el N que necessitem i d en termes de certs h_j . Observem primer que

$$h_{2N} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2N} = \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2N-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2N}\right) = s_N + \frac{1}{2}h_N.$$

Per tant, $s_N = h_{2N} - \frac{1}{2}h_N$. Usant de nou que per a n prou gran $h_n \approx \gamma + \ln(n) + \frac{1}{2n}$, tenim que

$$s_N \approx \left(\gamma + \ln(2N) + \frac{1}{4N}\right) - \frac{1}{2}\left(\gamma + \ln(N) + \frac{1}{2N}\right) = \frac{\gamma + \ln(4N)}{2}.$$

Igualant s_N amb d i aïllant tenim que $N \approx \frac{1}{4}e^{2d-\gamma}$. Per tant, si $d = 5$, el nombre de jeeps que necessitaríem seria $\frac{1}{4}e^{10-\gamma} \approx 3091.74$. De fet, $s_{3092} \approx 5.000042$.

5.9. Torres amb molta volada

En aquest exemple final mostrarem una construcció en forma de torre, curiosa i ben coneguda amb N peces amb forma de dòmino. En aquesta torre, el que es vol és que, prenent N prou gran, i només tenint en compte la força de la gravetat, la torre sigui estable i la peça de dalt

s'allunyi cap a una banda, i tant com vulguem, respecte a la que hi ha a la base. La torre de la figura 1 n'és un exemple. Aquestes construccions han estat estudiades a molt llocs (vegeu, per exemple, [15, sec. 6.3] o [17, 32] i les seves referències).

No és restrictiu pensar que totes les peces tenen longitud 2 i pes 1. L'amplada no jugarà cap paper i l'alçada tampoc, però la pensarem bastant més petita que 2. Si agafem només una o dues peces, les torres buscades són les que es mostren a la figura 6. Vegem en primer lloc que la figura amb dues peces és estable calculant el seu centre de masses (cdm) i veient que cau sobre de la taula. És convenient agafar com a origen el cdm de la peça de sobre. Aleshores, el cdm de la torre se situa a x igual a

$$\frac{-1 \times 1 + 0 \times 1}{1 + 1} = -\frac{1}{2},$$

que correspon precisament a l'extrem dret de la taula. El vol total de la torre és $h_2 = 1 + \frac{1}{2}$.

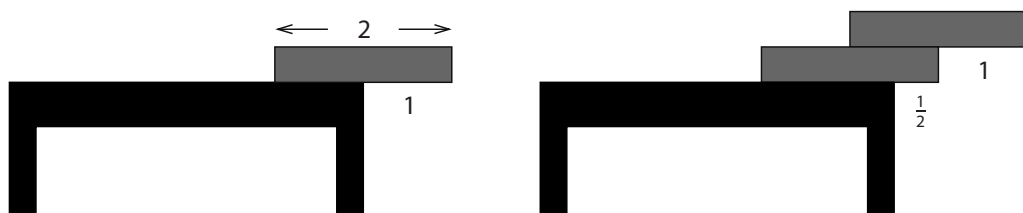


Figura 6. Torres amb una o dues peces.

Calculem, quan agafem tres o quatre peces, els cdm de les dues construccions de la figura 7. De nou suposarem que $x = 0$ és al cdm de la peça de sobre. Aquests cdm estan situats als valors de x ,

$$\frac{0 - 1 - (1 + \frac{1}{2})}{3} = -\frac{h_1 + h_2}{3} \quad \text{i} \quad \frac{0 - 1 - (1 + \frac{1}{2}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{4} = -\frac{h_1 + h_2 + h_3}{4},$$

respectivament. Com veurem a continuació, $-\frac{h_1+h_2}{3} = 1 - h_3$ i $-\frac{h_1+h_2+h_3}{4} = 1 - h_4$. Per tant, en ambdós casos, de nou el cdm coincideix amb l'extrem dret de la taula.

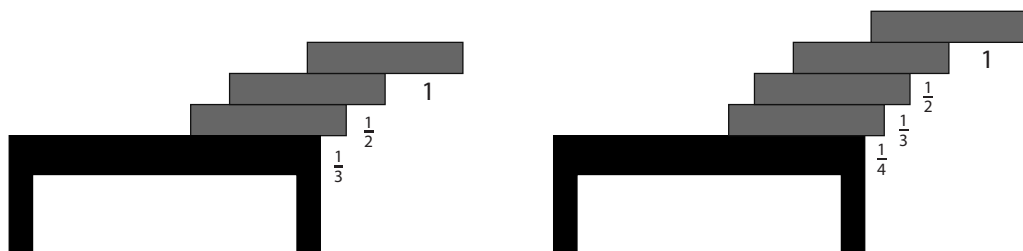


Figura 7. Torres amb tres o quatre peces.

En general, quan prenem N peces, i agafant com sempre $x = 0$ en el cdm de la peça de sobre, tenim que els cdm de les altres peces són a $-h_1, -h_2, \dots, -h_{N-1}$. Per tant, el cdm de la torre està situat a x igual a

$$-\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_{N-1}}{N} = 1 - h_N.$$

Mirem de provar aquesta última igualtat per inducció. La igualtat és equivalent a demostrar $h_1 + h_2 + \dots + h_{N-1} = Nh_N - N$. Ara bé, $h_1 = 2h_2 - 2$, i suposant-la certa per a $N - 1$, tenim

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + \dots + h_{N-1} + h_N &= Nh_N - N + h_N = (N + 1)h_N - N \\ &= (N + 1)\left(h_{N+1} - \frac{1}{N + 1}\right) - N = (N + 1)h_{N+1} - (N + 1), \end{aligned}$$

tal com volíem veure.

Així, hem provat que amb N peces podem construir una torre «harmònica» de manera que l'última peça «vola» una distància h_N i s'allunya de la que hi ha a la base h_{N-1} . La divergència de la sèrie ens prova que agafant N prou gran podem volar tant com vulguem!

Hi ha un problema d'optimització molt interessant que consisteix a aconseguir que la torre voli el màxim possible respecte de la taula, però sense la condició que la peça més allunyada sigui la superior. Aleshores les construccions es fan d'una manera totalment diferent (vegeu [33]). Com hem vist per tres i quatre peces, les construccions «harmòniques» volen $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \approx 1.83$ i $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \approx 2.083$, respectivament. Les solucions òptimes volen 2 i $\frac{15-4\sqrt{2}}{4} \approx 2.34$ i són força divertides de trobar.

Agraïments

Agraïxo a la Maria Jolis la seva ajuda en diversos llocs d'aquest treball. L'autor està secundat pels projectes MINECO MTM2013-40998-P i per la Generalitat de Catalunya, projecte 2014SGR568.

Referències

- [1] Aigner, M. i Ziegler, G. M. (1988). *Proofs from The Book*. Berlín: Springer.
- [2] Andel, J. (2001). *Mathematics of Chance*. John Wiley & Sons, Inc. Wiley Series in Probability and Statistics.
- [3] Bagni, G. T. (2004). *Prime Numbers are Infinitely Many: Four Proofs from History to Mathematics Education*. Accessible a www.syllogismos.it/history/lcme10-TSG17.pdf
- [4] Bardina, X. (2007). Rècords: Quina és la probabilitat d'obtenir-ne? Quan apareixen? Quins valors prenen?, *But. Soc. Catalana de Matemàtiques*, 22, 5-22.
- [5] Bardina, X. (2007). Quants rècords veurem al llarg de la nostra vida? *Materials Matemàtics (MAT²)*, treb. 3, 14 p.
- [6] Bardina, X. (2008). Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma. *Materials Matemàtics (MAT²)*, treb. 3, 29 p.
- [7] Berndt, B. (1998). *Ramanujan's Notebooks*. Vol. 5. Nova York: Springer.
- [8] Brun, V. (1919). La sèrie $1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + 1/19 + 1/29 + 1/31 + 1/41 + 1/43 + 1/59 + 1/61 + \dots$, où les dénominateurs sont nombres premiers jumeaux est convergente ou finie. *Bull. des Sci. Mathématiques*, 43, 100-104 i 124-128.

- [9] Conrad, K. *Pell's equation-I,II*. Accessible a www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs (consultat juliol 2016).
- [10] Erdős, P. (1938), Über die Reihe $\sum 1/p$. *Mathematica, Zutphen*, B 7, 1-2.
- [11] Feller, W. (1950). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. I. Nova York: John Wiley & Sons, Inc.
- [12] Ferrante, M. i Saltalamacchia, M. (2014). The Coupon Collector's Problem. *Materials Matemàtics (MAT²)*, treb. 2, 35 p.
- [13] Freniche, F. J. (2010). On Riemann's Rearrangement Theorem for the Alternating Harmonic Series. *Amer. Math. Monthly*, 117, 442-448.
- [14] Gasull, A. (2017). Sumes harmòniques, per aparèixer a *Materials Matemàtics (MAT²)*.
- [15] Graham, R. L., Knuth, D. E. i Patashnik, O. (1994). *Concrete Mathematics*. 2a ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.
- [16] Goldston, D. A. (2010). Are there infinitely many twin primes? *Bay Area Math Adventure (BAMA)*. Accessible a www.math.sjsu.edu/~goldston/publications.htm.
- [17] Hall, J. F. (2005). Fun with stacking blocks. *American Journal of Physics*, 73, 1107-1116.
- [18] Havil, J. (2003). *Gamma: Exploring Euler's Constant*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- [19] Hirschhorn, M. D. (2011). Approximating Euler's Constant. *Fibonacci Quart*, 49, 243-248.
- [20] Irwin, F. (1916). A Curious Convergent Series. *Amer. Math. Monthly*, 23, 149-153.
- [21] Itô, K. (1984). *An Introduction to Probability Theory*. Cambridge University Press.
- [22] Johnson, N. W. (1966). Convex Solids with Regular Faces. *Canadian J. of Mathematics*, 18, 169-200.
- [23] Kempner, A. J. (1914). A Curious Convergent Series. *Amer. Math. Monthly*, 21, 48-50.
- [24] Kifowit, S. J. (2006). *More Proofs of Divergence of the Harmonic Series*. Preprint. Accessible a: stevekifowit.com/pubs.
- [25] Kifowit, S. J. i Stamps, T. A. (2006). The Harmonic Series Diverges Again and Again. *The AMATYC Review*, 27, 31-43.
- [26] Kifowit, S. J. i Stamps, T. A. (2006). *Serious About the Harmonic Series II*, 31st Annual Conference of the Illinois Mathematics Association of Community Colleges. Monticello, IL. Accessible a: stevekifowit.com/pubs.
- [27] Lagarias, J. C. (2013). Euler's constant: Euler's work and modern developments. *Bul. of the AMS*, 50, 527-628.
- [28] Lenstra Jr., H. W. (2002). Solving the Pell Equation. *Notices Amer. Math. Soc.*, 49, 182-192.
- [29] Mertens, F. (1874). Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. *J. Reine Angew. Math.*, 78, 46-62.
- [30] Montroll, E. W. (1956). Random Walks in Multidimensional Spaces, Especially on Periodic Lattices. *J. SIAM*, 4, 241-260.
- [31] Nicely, T. R. (1994). Article sense títol sobre la falla en els divisors del Pentium. *San Francisco Examiner*, B-5.
- [32] Nicely, T. R. (1999). *Enumeration to 1.6×10^{15} of the twin primes and Brun's constant*. Some Results of Computational Research in Prime Numbers (Computational Number Theory).

- [33] Paterson, M., Peres, Y., Thorup, M., Winkler, P. i Zwick, U. (2009). Maximum Overhang. *Amer. Math. Monthly*, 116, 763-787.
- [34] Pollack, P. (2015). Euler and the partial sums of the prime harmonic series. *Elem. Math.*, 70, 13-20.
- [35] Ross, S. (2012). *A first course in probability*. 9a ed. Pearson.
- [36] Sanz-Solé, M. (1999). Probabilitats. *Col·lecció UB*, 28. Universitat de Barcelona.
- [37] Schmelzer, T. i Baillie, R. (2008). Summing a Curious, Slowly Convergent Series. *Amer. Math. Monthly*, 115, 525-540.
- [38] Tijms, H. (2012). *Understanding probability*. 3a ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- [39] Villarino, M. B. (2008). Ramanujan's harmonic number expansions into negative powers of a triangular number. *J. of inequalities in pure and applied math.*, 9, 12 p.
- [40] Young, R. M. (1991). Euler's constant. *Math. Gaz.*, 75, 187-190.
- [41] Webb, J. (2000). *In perfect harmony*, +plus magazine 2000. <https://plus.maths.org/content/perfect-harmony>.
- [42] Diversos autors (2011). Suites & séries. Bibliothèque Tangente HS, 41. POLE.

