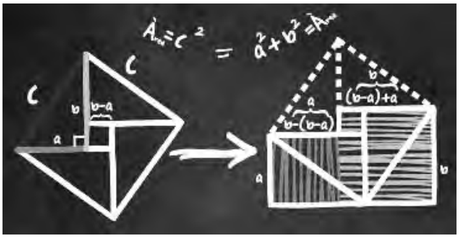
La visualització: eina i contingut en educació matemàtica

Anton Aubanell

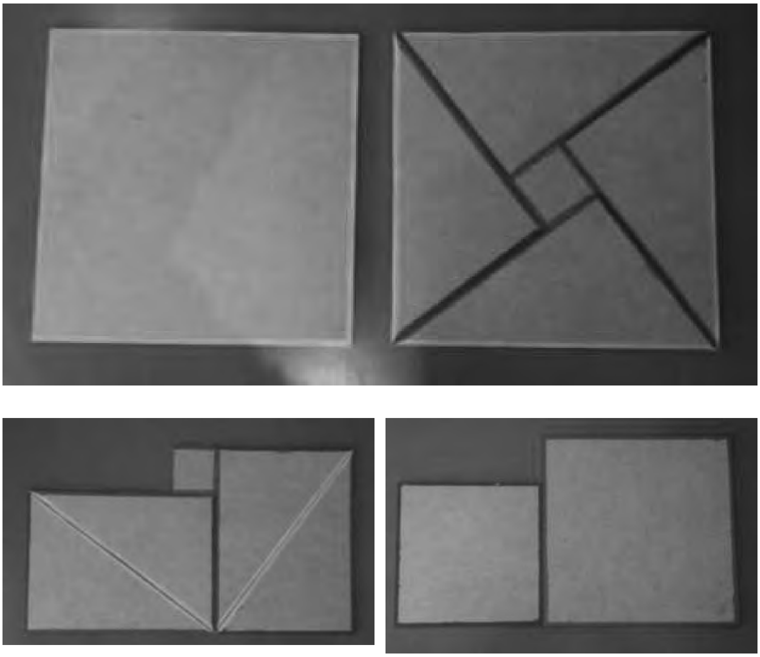
El terme *visualització*, segons el diccionari de l'IEC, s'aplica a l'acció i a l'efecte de visualitzar i, segons la mateixa font, *visualitzar* significa fer visible una informació per mitjà d'un recurs tècnic determinat. Si bé el diccionari precisa que aquest terme s'usa en el camp de la informàtica, cal reconèixer que actualment, immersos com estem en una societat en la qual la comunicació a través d'imatges és present arreu, s'aplica amb justesa en molts altres camps, en particular a l'educació matemàtica, en què la visualització és alhora camí i destí, eina d'ensenyament i contingut d'aprenentatge.

La XII Jornada d'Ensenyament de les Matemàtiques, que, organitzada per la FEEMCAT, la SCM de l'IEC, la SBM-XEIX i la SEMCV Al-Kwharizmi, es va portar a terme l'octubre de l'any passat sota el títol «Matemàtiques. Ara ho veig!», va posar un accent especial en la visualització. Tanmateix l'expressió «Ara ho veig!», quan s'empra en educació, sovint va més enllà de la simple visió i es refereix a un «Ara ho percebo!», de caire més multisensorial, que pot sorgir no tan sols de l'ús d'imatges sinó també de la manipulació de materials físics. Certament, una bona imatge pot valer més que mil paraules, però també un bon material pot valer més que mil imatges! Tenim un bonic exemple d'aquest fet si observem el diagrama que apareixia en el cartell de l'esmentada Jornada (imatge 1):



Imatge 1. Demostració del Teorema de Pitàgores, cartell de la XII Jornada d'Ensenyament de les Matemàtiques.

Aquest diagrama és magnífic, però probablement la seva eficiència didàctica podrà accentuar-se encara una mica més si el reproduïm amb materials físics que el mateix alumne pugui moure tot donant realitat a la transformació que el dibuix representa (imatge 2):



Imatge 2. Reproducció, movent materials, de la demostració del teorema de Pitàgores de la imatge 1.

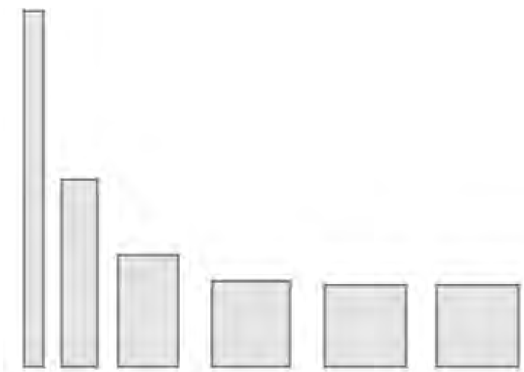
Fent encara un pas més, aquell «Ara ho veig! Ara ho percebo!», en l'ensenyament, sovint pren un sentit cognitiu i equival a un «Ara ho entenc!». Em comentava un company del MMACA que hi ha alumnes invidents que, manejant un mòdul manipulable, diuen: «Ara ho veig!». Són aquestes consideracions les que, en el camp de l'educació matemàtica, conviden a atorgar al mot *visualització* un significat que va més enllà de les imatges i que inclou també la manipulació física de materials.

Des d'aquesta perspectiva una mica més àmplia trobem exemples molt bonics de com la visualització és una eina potent per a construir el coneixement matemàtic i donar-li sentit. A continuació s'apunten dos exemples, un en el camp de l'aritmètica i l'altre en el de les probabilitats.

Primer exemple: càlcul d'arrels

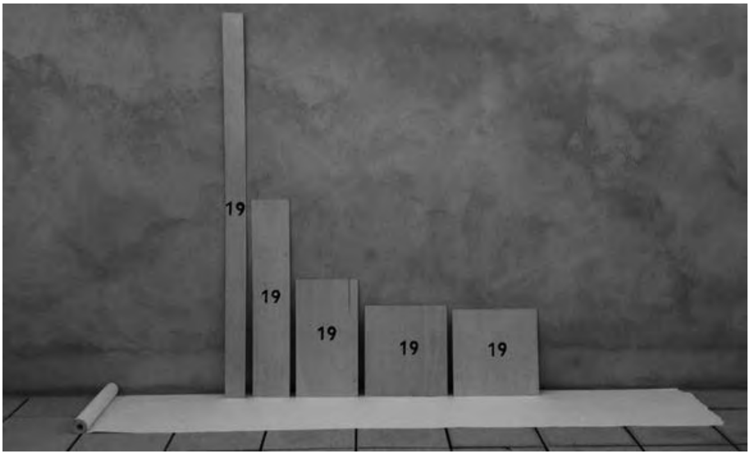
L'arrel quadrada és una operació aritmètica, però adquireix tot el seu sentit quan li atorguem un significat geomètric: l'obtenció del costat d'un quadrat del qual coneixem l'àrea. Aquesta representació suggereix un procediment de càlcul tan eficient com intuïtiu que seria ben interessant d'incorporar a l'ESO. Imaginem que desitgem calcular $\sqrt{19}$. Es tractarà de trobar la longitud del costat d'un quadrat de 19 unitats quadrades d'àrea. D'entrada sembla que això és difícil de fer a cop d'ull, però el que resulta molt fàcil és prendre un rectangle d'1 unitat (que anomenarem u) d'altura per $19u$ d'amplada. La seva àrea és de $19u^2$, però, malauradament, no és un quadrat. A partir d'aquí podem començar un procés iteratiu per a «quadrar» aquest rectangle de manera que, en cada pas, tinguem un nou rectangle una mica «més quadrat». Prenent les altures d'aquesta successió de rectangles obtindrem aproximacions cada vegada més precises de l'arrel buscada (vegeu la imatge 3). Som-hi!

1. L'altura del rectangle de partida serà $1u$.La seva amplada serà $19u$. Així, $x_o = 1$.
2. Fem un primer pas per «quadrar una mica» aquest rectangle: prenem com a nova altura la mitjana entre l'altura i l'amplada del rectangle anterior, $\frac{1+19}{2} = 10u$. L'amplada d'aquest nou rectangle haurà de ser de $\frac{19}{10} = 1{,}9u$ per tal que la seva àrea continuï sent de $19u^2$. Així, obtenim una nova aproximació $x_1 = 10$.
3. Fem un segon pas per «quadrar encara més» aquest rectangle i prenem com a nova altura la mitjana entre l'altura i l'amplada del rectangle anterior, $\frac{10+1{,}9}{2} = 5{,}95u$. L'amplada d'aquest nou rectangle haurà de ser de $\frac{19}{5{,}95} = 3{,}1932773\ldots \approx 3{,}1933u$ per tal que la seva àrea continuï sent de $19u^2$. Així, obtenim una nova aproximació $x_2 = 5{,}95$.
4. Continuant aquest procés de fer mitjanes i divisions (s'arrodoneixen els resultats a quatre xifres decimals encara que els càlculs es fan amb més decimals), obtindrem: $x_3 = 4{,}5716$, $x_4 = 4{,}3638$, $x_5 = 4{,}3589$.
5. Quan calculem l'amplada d'aquest últim rectangle obtenim $\frac{19}{4{,}3589} \approx 4{,}3589u$, igual fins al quart decimal a la seva altura. Pràcticament estem davant d'un quadrat, de manera que podem afirmar que $\sqrt{19} \approx 4{,}3589$, amb un notable nivell de precisió.



Imatge 3. Progressiva «quadratura» del rectangle (el primer rectangle s'ha situat invertint base i altura per tal que s'observi millor el procés de «quadratura»).

Quan aquest procés es fa per primer cop a classe es poden construir els rectangles amb paper prenent com a unitat un centímetre (si es treballa individualment amb figures petites) o un decímetre (si es fa conjuntament amb figures grans). Atès que es tracta de rectangles amb la mateixa àrea, si es col·loquen en uns eixos de coordenades, situant el vèrtex inferior esquerre sobre l'origen i els dos costats que hi conflueixen sobre els semieixos positius, els vèrtexs superiors drets estaran sobre la hipèrbola $x \cdot y = 19$. En la imatge 4 es mostren els sis rectangles tallats en fullola. Les mitjanes, en cada pas, es poden obtenir físicament tirant un fil al llarg de dos costats consecutius del rectangle (que seran l'altura i l'amplada) i prenent la meitat plegant-lo sobre si mateix. La longitud obtinguda serà l'altura del nou rectangle.



Imatge 4. Els cinc primers rectangles construïts en fullola per mostrar a classe (novament el primer rectangle s'ha situat invertint base i altura per la mateixa raó que en la imatge 3).

Es tracta d'un procés de «quadratura» basat en la visualització geomètrica, amb un sentit matemàtic que va molt més enllà de la simple operació aritmètica tot posant en joc, de manera natural i intuïtiva, idees de fons com el mateix significat de l'arrel quadrada, els algorismes iteratius, la convergència de successions, el progressiu assoliment de precisió... El valor de l'arrel no té cap importància (una calculadora ens el dóna fàcilment), però el camí que s'ha fet és extraordinàriament ric.

Aquest mètode, que s'atribueix a Heró d'Alexandria (segle i dC), està descrit en el blog del Calaix +ie d'en Joan Jareño (http://calaix2.blogspot.com.es/2012/04/les-arrels-de-les-arrels-quadrades.html), on s'inclou un *applet* fet amb GeoGebra que permet «quadrar rectangles» de manera interactiva. Personalment, vaig conèixer aquesta idea a través de Guido Ramellini. Després, pensant-hi, he observat aspectes que encara la fan més atractiva:

És sorprenent que aquest procés, formulat en termes generals per obtenir $\sqrt{k}$, coincideix amb el mètode de Newton-Raphson aplicat a determinar un zero de la funció $f(x) = x^2 - k$ que es basa en successives aproximacions al gràfic de la funció $f(x)$ a través de rectes tangents. S'escull una primera aproximació a la solució (en el nostre cas $x_o = 1$) i s'estableix un procés iteratiu que, a partir d'una aproximació x_n, calcula una nova aproximació x_{n+1} prenent l'abscissa del punt de tall entre l'eix $y = 0$ i la recta tangent al gràfic de funció $f(x)$ en el punt $(x_n , f(x_n))$. Un càlcul senzill mostra que:

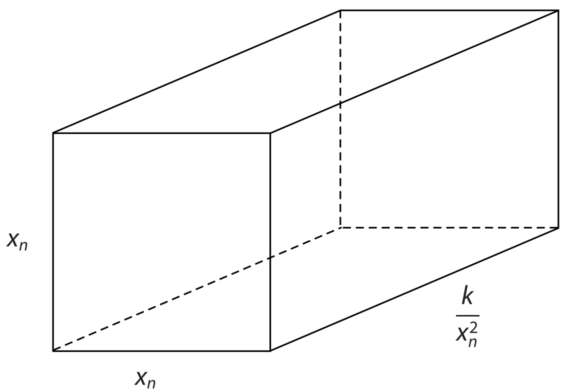
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Un dels aspectes més bonics de la matemàtica són les seves connexions internes: arrels, àrees de rectangles, «quadratura», derivades i rectes tangents al gràfic d'una funció... Sembla estrany que el procediment geomètric d'anar «quadrant» un rectangle fent mitjanes acabi coincidint amb un mètode com el de Newton-Raphson que s'estudia en les assignatures de càlcul numèric dels primers cursos de les carreres científiques i tècniques. Una bonica mostra de com, sovint, els mètodes més visualment intuïtius ajuden a construir bases matemàtiques molt sòlides.

Imaginem que ara volem calcular $\sqrt[3]{k}$. Es tractarà d'obtenir l'aresta d'un cub de volum k. No sembla immediat poder trobar aquest cub, però podem fer un procés de «cubicació» semblant al que hem fet abans de «quadratura».

1. Prenem com a primera aproximació d'aquesta arrel cúbica el valor 1, $x_o = 1$, i construïm un ortoedre d'altura (a) $1u$, de llargada (b) $1u$ i d'amplada (c) $k\,u$. El seu volum serà $k\,u^3$.
2. Per tal d'intentar «cubicar» aquest ortoedre farem la mitjana de les longituds a, b i c. Aquesta serà la nostra següent aproximació: $x_1 = \frac{1+1+k}{3}$. Ara prendrem un ortoedre amb $a = x_1$, $b = x_1$ i $c = \frac{k}{x_1^2}$, una mica més cúbic i amb volum k.
3. A partir de l'ortoedre amb $a = x_n$, $b = x_n$ i $c = \frac{k}{x_n^2}$ (imatge 5) passarem a l'ortoedre amb $a = x_{n+1}$, $b = x_{n+1}$ i $c = \frac{k}{x_{n+1}^2}$ prenent

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_n + \dfrac{k}{x_n^2}}{3} = \frac{2x_n^3 + k}{3x_n^2}$$



Imatge 5. Ortoedre en el pas *n*.

4. Com a resultat de fer les mitjanes, l'ortoedre obtingut s'aproparà cada vegada més a un cub, de manera que la successió de valors $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ tendirà a l'aresta del cub, és a dir, a l'arrel cúbica que estem buscant.

Es pot observar que també aquest procediment coincideix amb el mètode de Newton-Raphson aplicat a la funció $f(x) = x^3 - k$.

Ara imaginem que volem calcular $\sqrt[m]{k}$. Es tractarà de trobar l'aresta d'un hipercub de «volum» k en un espai de dimensió m. Podem partir d'un «hiperortoedre» d'arestes $1, 1, \ldots, 1, k$ i iniciar un procés com en els casos anteriors fent, en cada pas, la mitjana de les arestesi ajustant l'última de les m noves arestes per tal que el «volum» continuï sent k. A partir de l'«hiperortoedre» amb arestes $x_n, x_n, \ldots, x_n, \frac{k}{x_n^{m-1}}$ calcularem x_{n+1} fent la mitjana:

$$x_{n+1} = \frac{(m-1)x_n + \dfrac{k}{x_n^{m-1}}}{m} = \frac{(m-1)x_n^m + k}{mx_n^{m-1}}.$$

Novament observem que aquesta fórmula iterativa és la del mètode de Newton-Raphson aplicat a la funció $f(x) = x^m - k$.

Vàrem comentar aquestes idees amb els companys del Grup de Didàctica de la Facultat de Matemàtiques de la UB i l'endemà en Jordi Font ja havia creat uns fulls de càlcul que implementaven aquests mètodes iteratius basats en fer mitjanes per als casos d'arrels quadrades i arrels cúbiques obtenint, amb molt poques iteracions, més de deu xifres decimals exactes. Uns procediments de càlcul ben interessants per a treballar a classe enllaçats amb el seu sentit intuïtiu. Observem com, a partir d'un raonament visual de base geomètrica, hem explorat territoris plens de possibilitats per a la formació matemàtica dels nostres alumnes.

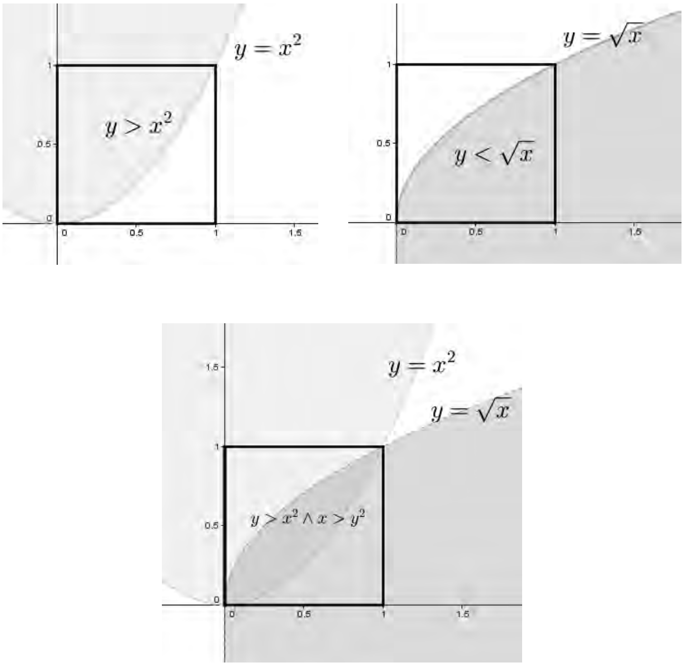
Segon exemple: un problema de probabilitats

A continuació es presenta un segon exemple (per a cursos més avançats que en el cas anterior) del valor instrumental de la visualització en educació matemàtica que entronca molt bé amb el comentari que fèiem sobre l'activitat de les monedes de Buffon en aquesta mateixa secció del número 37 del *NouBiaix*. Ens plantegem el problema següent: Quina és la probabilitat que, en escollir a l'atzar dos nombres entre 0 i 1, el primer sigui més gran que el quadrat del segon i el segon sigui més gran que el quadrat del primer?

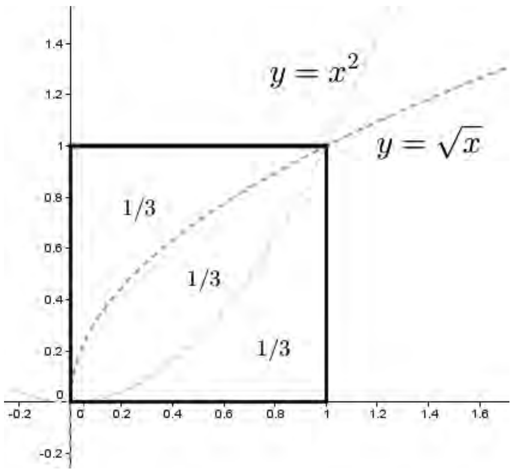
Es tracta d'un problema de probabilitats basat en una condició aritmètica que poden complir els nombres entre 0 i 1. D'entrada no sembla evident trobar una estratègia de resolució, però si ens imaginem que cada parella de nombres x i y escollits són les coordenades d'un punt (xy) interior del quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$, es posa en marxa un enfocament visual molt prometedor. Es tracta de determinar la zona del quadrat unitat tal que $y > x^2$ i, alhora, $x > y^2$ o el que en els reals positius és equivalent, $y < \sqrt{x}$. En la imatge 6 es mostren les zones que compleixen respectivament les desigualtats $y > x^2$ (primera figura) i $y < \sqrt{x}$ (segona figura), i la zona dels punts que compleixen les dues desigualtats alhora (tercera figura). Plantejat així, és evident que la probabilitat que el problema ens demana és que el punt escollit a l'atzar dins del quadrat estigui en la zona compresa enmig de les dues corbes. Aquesta probabilitat es podrà calcular a partir de la relació entre l'àrea d'aquesta zona i l'àrea del quadrat, que és 1. La part de quadrat per sota de la paràbola $y = x^2$ té àrea $\frac{1}{3}$ del quadrat unitat, ja que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Per simetria (vegeu la imatge 7), l'àrea de la part del quadrat per sobre de la paràbola $y = \sqrt{x}$ també serà $\frac{1}{3}$ i, per tant, l'àrea de la zona compresa entre les dues paràboles serà de $\frac{1}{3}$ del quadrat unitat. Així, la probabilitat que se'ns demana serà $\frac{1}{3}$.

En la resolució del problema és clau el salt que s'ha fet al terreny de la geometria, ja que ens ha permès visualitzar la probabilitat com l'àrea d'una determinada zona del quadrat unitat. En general, la resolució d'inequacions amb dues incògnites sempre acaba amb la representació gràfica de la zona, de manera que la visualització és un pas obligat. Un aspecte especialment bonic d'aquest exemple és el fet que, a través d'un mètode geomètric amb un fort accent visual, hem resolt un problema de probabilitats basat en unes condicions aritmètiques. Una nova joia de connexions internes!

El càlcul de probabilitats a partir de la mesura d'àrees està en la base de l'anomenada geometria integral, una part de les matemàtiques al desenvolupament de la qual va contribuir decisivament el matemàtic gironí Lluís A. Santaló. Ell mateix recorda unes paraules de Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon, reivindicant el paper que pot jugar la geometria en el càlcul de probabilitats: «L'anàlisi ha estat l'únic instrument que fins avui s'ha utilitzat en la ciència de les probabilitats, com si la geometria no fos adient per a aquests fins, mentre que en realitat n'hi ha prou amb una mica d'atenció per observar que l'avantatge de l'anàlisi sobre la geometria és tan sols accidental, i que l'atzar és tan propi de la geometria com de l'anàlisi».[1]



Imatge 6. Zones de punts del pla que compleixen les desigualtats $y>x^2$ i $y<\sqrt{x}$.



Imatge 7. Àrees de les tres zones del quadrat unitat.

1. «Essai d'Arithmétique Morale», dins del quart volum del *Supplément à l'Histoire Naturelle, générale et particulière, avec la description du cabinet du Roi*, París, 1777.

En els paràgrafs anteriors s'han descrit dos exemples de com la visualització contribueix de manera decisiva, fent una aportació genuïna, a donar sentit a idees matemàtiques. N'hi ha molts més, però no podem acabar aquest escrit sense citar dos aspectes de l'educació matemàtica en què la visualització juga un paper clau: l'aportació de contextos i la representació i interpretació de dades.

Les imatges (estàtiques o dinàmiques) ofereixen la possibilitat de portar «trossets de mona» la classe de matemàtiques. A través de fotografies i vídeos, fets amb càmeres o telèfons mòbils i penjats a Instagram, en webs de centres, en blogs... es pot fer emergir la presència de les matemàtiques al nostre entorn i la seva aplicació en àmbits diversos. Cal citar la bona feina que fan en aquest terreny els concursos de fotografia matemàtica (organitzats per associacions de professorat o per centres concrets) o de vídeos matemàtics (com el vídeoMAT) en els quals, a més de posar en joc continguts, es contribueix a educar la mirada matemàtica dels alumnes.

Les eines de visualització també ens permeten presentar i entendre dades de diferents tipus. La construcció i la interpretació de representacions gràfiques diverses (més enllà dels gràfics funcionals i dels diagrames estadístics habituals) anirà esdevenint un contingut cada cop més important en l'ensenyament de les matemàtiques. El futur ciutadà haurà d'estar especialment preparat per a saber llegir críticament representacions visuals d'informacions quantitatives que li permetin tenir opinions sòlides i prendre decisions encertades. Amb massa freqüència apareixen en els mitjans de comunicació representacions incorrectes, a vegades greument errònies. Són petits «assassinats matemàtics» (emprant una expressió que l'amic Claudi Alsina ha consagrat) que haurien de merèixer més rebuig per part de l'opinió pública. Tanmateix —siguem justos—, també hi ha moltes representacions visuals de dades que estan fetes amb cura i que poden ser un excel·lent recurs per a les nostres aules. Voldria esmentar els magnífics gràfics que, número rere número, apareixen a la revista del *National Geographic* que reben molts centres docents. Aquestes representacions podrien ser un magnífic material de classe per a treballar (tot interpretant les informacions que presenten) idees sobre estadística i proporcionalitat de longituds i d'àrees. Seria una activitat motivadora pels temes que es tracten, interdisciplinària en els arguments que es posen en joc i eficaç per a educar l'art de llegir dades expressades gràficament. És un territori que esperem explorar de manera més àmplia en propers números del *Nou Biaix*.

Amb aquest escrit s'han intentat mostrar dues cares de la visualització. Per un costat, s'ha subratllat el seu paper com a eina per a ensenyar matemàtiques (per a demostrar, per a donar sentit...), i per l'altre, s'ha assenyalat breument el fet que es tracta d'un contingut d'aprenentatge en si mateix (la representació i la interpretació d'informació visual). La visualització és, doncs, alhora, eina i contingut en educació matemàtica, instrument per a construir coneixement i material de construcció.