La desigualtat isoperimètrica[1]

Julià Cufí
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Resum

En aquest article repassem d'una manera breu la història del problema isoperimètric, posant de manifest alguns aspectes geomètrics que hi han tingut una importància cabdal. Així mateix, presentem una demostració analítica elemental de la desigualtat isoperimètrica que es pot explicar en un primer curs de Càlcul.

Abstract

In this article we review briefly the history of the isoperimetric problem, showing some geometric aspects which have been of key importance. Also we present an elementary analytical proof of the isoperimetric inequality that can be explained in a first course in Calculus.

Introducció

La desigualtat isoperimètrica, que serà discutida en aquest article, és una relació entre longituds i àrees. Pot ser útil, doncs, començar fent una discussió breu d'aquests conceptes en el context en el qual els farem servir.

Longitud

Una *corba* a $\mathbb{R}^2$ serà una aplicació contínua $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^2$ on I és un interval tancat i acotat de la recta. Així, per a cada $t \in I$, $\gamma(t)$ té dues components i posarem $\gamma(t) = (x(t),y(t))$ on $x,y\colon I \to \mathbb{R}$ són funcions contínues.

Sigui $I = [a,b]$; llavors es diu que la corba γ és *tancada* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. Es diu que γ és *simple* o *de Jordan* si γ és injectiva a $[a,b]$ i, en el cas que γ sigui tancada, si γ és injectiva a $[a,b)$.

1. Aquest article es basa en la darrera lliçó que donà, el 3 de juny de 2015, en Julià Cufí abans de la seva jubilació, corresponent a l'assignatura *Funcions de variable real* de primer curs de matemàtiques. Afortunadament, en Julià continua, ara com a professor emèrit, impartint classes i tots gaudint amb les seves lliçons.

Un element geomètric molt important associat a una corba és el vector tangent en cada un dels seus punts. Per tal que aquest vector existeixi cal que la corba tingui una determinada regularitat: cal que sigui diferenciable.

Direm que γ és *diferenciable* en el punt $t_0 \in I$ si existeix el límit següent:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \equiv \gamma'(t_0).$$

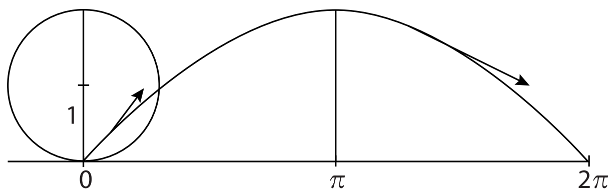
Aquest límit existeix si i només si les funcions $x(t)$, $y(t)$ són totes dues derivables en el punt t_0 i, en aquest cas, hom té:

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Aquest vector $\gamma'(t_0)$ s'anomena el *vector tangent* a γ en el punt $\gamma(t_0)$. Si pensem que $\gamma(t)$ és la trajectòria d'un punt que es mou en funció del temps, llavors $\gamma'(t)$ és la *velocitat* del moviment. La norma del vector tangent, $\|\gamma'(t)\|$, en aquest cas, s'anomena la *celeritat* del moviment.

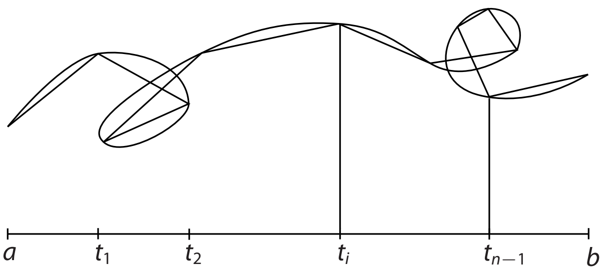
Una condició de regularitat més forta que l'existència de vector tangent a cada punt de la corba és que $\gamma(t)$ sigui diferenciable per a tot $t \in I$ i que l'aplicació $\gamma' : I \to \mathbb{R}^2$ que envia $t \in I$ a $\gamma'(t)$ sigui contínua. De vegades convé també suposar, a més a més, que $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in I$. Llavors es diu que γ és *regular*.

Per exemple, la funció $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$, és una parametrització de la cicloide que és la corba descrita per un punt d'un cercle de radi 1, quan aquest cercle roda i fa una volta completa.



Aquí el vector tangent és $\gamma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$.

Sigui $\gamma \colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ amb $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, una corba qualsevol a $\mathbb{R}^2$. Per a cada partició de l'interval $[a,b]$, $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$, podem considerar la línia poligonal formada pels segments que uneixen el punt $\gamma(t_k)$ amb el punt $\gamma(t_{k+1})$ per a $k = 0, 1, \ldots, n-1$.



La longitud d'aquesta poligonal és

$$\Lambda(P) = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\big((x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2\big)}.$$

Es diu que la corba γ és *rectificable* si

$$\sup_P \Lambda(P) < +\infty$$

on P recorre el conjunt de totes les particions de l'interval $[a,b]$. En aquest cas es posa, per definició,

$$\Lambda(\gamma) = \sup_P \Lambda(P)$$

i $\Lambda(\gamma)$ s'anomena la *longitud* de γ.

Si γ és prou regular, el resultat següent diu com es pot calcular la longitud de γ.

Si $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ és una corba diferenciable amb $\gamma'(t)$ contínua a $[a,b]$, llavors γ és rectificable i

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt, \tag{1}$$

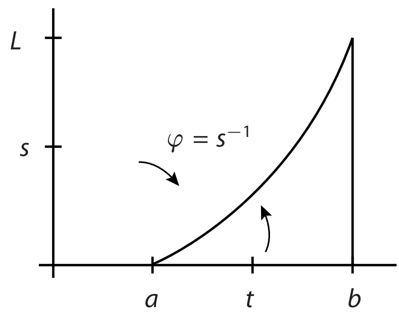
on $\gamma(t) = (x(t),y(t))$, $t \in [a,b]$.

Quan γ és la cicloide trobem de seguida:

$$\Lambda(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 8.$$

Per a les corbes regulars hi ha una parametrització canònica, fent servir el *paràmetre arc*, que és la següent:

Sigui $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una corba regular, és a dir, $\gamma'(t)$ existeix i és una funció contínua a $[a,b]$ i $\gamma'(t) \neq 0$, per a $t \in [a,b]$.



Per a cada $t \in [a,b]$ posem:

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\|\, d\tau,$$

o sigui que $s(t)$ és la longitud de l'arc de corba γ des de $\gamma(a)$ fins a $\gamma(t)$.

Evidentment, es compleix

$$s(a) = 0, \quad s(b) = L \equiv \Lambda(\gamma).$$

Pel teorema fonamental del càlcul sabem que

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0, \quad t \in [a,b]$$

i, per tant, $s(t)$ és una funció estrictament creixent. Això vol dir que $s[a,b] = [0,L]$ i que s té una inversa

$$\varphi = s^{-1} \colon [0,L] \longrightarrow [a,b].$$

Així, podem definir la corba

$$\tilde{\gamma}(s) = (\tilde{x}(s),\tilde{y}(s)) \equiv \big(x(\varphi(s)),y(\varphi(s))\big), \quad s \in [0,L]$$

que té a $\mathbb{R}^2$ la mateixa imatge que γ, i que dóna la corba parametritzada pel paràmetre arc s.

I ara tenim, per la regla de la cadena,

$$\tilde{x}'(s) = x'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s); \quad \tilde{y}'(s) = y'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s).$$

Però $\varphi'(s) = \dfrac{1}{s'(t)} = \dfrac{1}{\|\gamma'(t)\|}$ de manera que

$$\tilde{x}'(s) = \frac{x'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \quad \tilde{y}'(s) = \frac{y'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$$

que donen

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \sqrt{\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2} = \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{\|\gamma'(t)\|} = 1.$$

És a dir, amb el paràmetre arc s, el vector tangent té longitud constant igual a 1 o, si es vol, la celeritat del moviment és constantment 1.

Per exemple si considerem la circumferència de centre l'origen i radi r recorreguda una vegada, la funció $s(t)$ és $s(t) = t \cdot r$ i el canvi $t = s/r$ ens dóna:

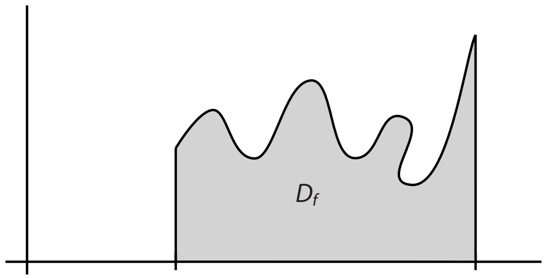
$$\tilde{x}(s) = r\cos\frac{s}{r}, \quad \tilde{y}(s) = r\sin\frac{s}{r}, \quad 0 \le s \le 2\pi r$$

i, és clar, que $\tilde{x}'(s)^2 + \tilde{y}'(s)^2 = 1$.

Àrea

La mateixa definició d'integral de Riemann ens dóna el concepte d'àrea d'un domini del pla del tipus subgraf. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és una funció no negativa i considerem la regió:

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\},$$



llavors, suposant que f és integrable en el sentit de Riemann a $[a,b]$, es pren com a àrea de D_f:

$$\text{àrea } (D_f) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

És una definició molt natural tenint en compte que la definició de la integral és, de fet, una aproximació de l'àrea de D_f per la suma d'àrees de rectangles.

Ara es tracta de calcular l'àrea d'una regió del pla més general que la regió subgraf anterior, la qual està limitada per tres segments de recta i el perfil marcat per la funció $f(x)$.

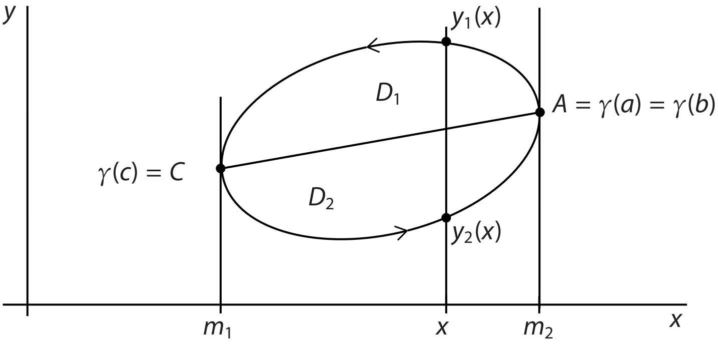
Considerem una corba plana $\gamma(t) = (x(t),y(t))$, $a \le t \le b$, amb $\gamma(t)$ que tingui derivada contínua, que sigui tancada i de Jordan. Aquest tipus de corbes limiten una regió acotada del pla, anomenada l'interior de γ, que designarem per D. Suposarem, a més a més, que qualsevol recta vertical o bé horitzontal (és a dir, paral·lela als eixos de coordenades) talla γ en dos punts com a màxim. Per exemple, aquesta condició es compleix si la regió D és estrictament convexa.

Per tal de calcular l'àrea de la regió D suposem que $y(t) > 0$, per a $t \in [a,b]$ (si no fos així, només cal desplaçar γ verticalment, un moviment que no afecta l'àrea) i també que γ està recorreguda de manera que D queda a l'esquerra de γ.

Siguin

$$m_1 = \inf\{x(t), a \le t \le b\}, \quad m_2 = \sup\{x(t), a \le t \le b\}.$$

És fàcil veure que les verticals pels punts m_1 i m_2 tallen γ una vegada. Siguin els punts de tall C i A.



Podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que $A = \gamma(a) = \gamma(b)$ (si no fem una translació del paràmetre) i sigui $c \in (a,b)$ tal que $\gamma(c) = C$. Ara per a cada punt x amb $m_1 < x < m_2$ hi ha dos punts de γ sobre la vertical per x, siguin $y_1(x)$, $y_2(x)$, de manera que $y_1(x) > y_2(x)$.

L'àrea de la regió D és la diferència entre les àrees de les regions tipus subgraf

$$D_1 = \{(x,y) : m_1 \leq x \leq m_2 : y \leq y_1(x)\},$$
$$D_2 = \{(x,y) : m_1 \leq x \leq m_2 : y \leq y_2(x)\}.$$

En conseqüència

$$A \equiv \text{àrea}\,(D) = \text{àrea}\,(D_1) - \text{àrea}\,(D_2) = \int_{m_1}^{m_2} y_1(x)\,dx - \int_{m_1}^{m_2} y_2(x)\,dx.$$

Ara fem, en cada una d'aquestes integrals, el canvi de variable $x = x(t)$; a la primera integral t variarà entre c i a i a la segona integral t anirà de c a b. Així, resulta

$$A = \int_c^a y_1(x(t)) \cdot x'(t)\,dt - \int_c^b y_2(x(t)) \cdot x'(t)\,dt = -\int_a^c y(t) \cdot x'(t)\,dt - \int_c^b y(t) \cdot x'(t)\,dt.$$

És a dir,

$$A = -\int_a^b y(t) \cdot x'(t)\,dt. \tag{2}$$

Si haguéssim fet el raonament anterior en la direcció horitzontal hauríem trobat

$$A = \int_a^b x(t) \cdot y'(t)\,dt. \tag{3}$$

Finalment, si a més, sumem (2) i (3), obtenim la proposició següent:

Sigui $\gamma(t) = (x(t),y(t))$, $a \leq t \leq b$, una corba contínuament diferenciable, tancada i de Jordan. Sigui D la regió acotada limitada per γ i suposem que D és convexa. Llavors la regió D té una àrea A donada per

$$A = -\int_a^b x'(t)y(t)\,dt = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt \tag{4}$$

o bé

$$A = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt. \tag{5}$$

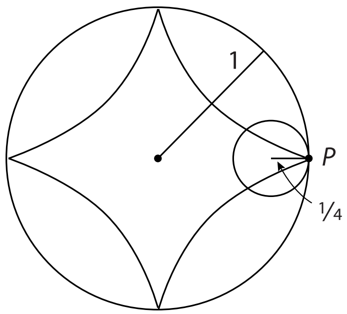
Observació. Les fórmules anteriors són vàlides sota hipòtesis menys restrictives que les que hem imposat a la regió *D*.

Per exemple, considerem una circumferència de radi 1 i en el seu interior una altra circumferència de radi 1/4 que es desplaça fent una volta sencera en contacte amb la circumferència grossa. El punt de contacte inicial *P* descriu una corba tancada anomenada *astroide*. És senzill comprovar que la parametrització d'aquesta corba és

$$\gamma(t) = (x(t),y(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

amb

$$x(t) = \cos^3(t), \quad y(t) = \sin^3(t).$$



Així, d'acord amb (5), s'obté com a àrea de l'astroide:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3\cos^3 t \sin^2 t \cos t + 3\sin^3 t \cos^2 t \sin t)\,dt = \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t\,dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\,dt = \\
&= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4t}{2}\,dt = \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

El problema isoperimètric

El problema isoperimètric apareix molt al començament de la història de les matemàtiques i ha estat present al llarg del seu desenvolupament. Això es deu a l'interès intrínsec del problema i també al fet que una demostració rigorosa de la desigualtat isoperimètrica no es va aconseguir fins a finals del segle xix. A més a més, el problema inicial s'ha estès a d'altres contextos i continua sent objecte d'estudi actualment. Una bona referència sobre l'evolució històrica d'aquest problema és [1].

El problema isoperimètric consisteix a determinar d'entre totes les figures planes de perímetre donat quina és la que tanca una àrea més gran. La primera referència a aquest problema cal buscar-la en l'*Eneida* de Virgili, on s'explica la llegenda de la princesa Dido, filla del rei de Tir, la qual, fugint de la cobdícia del seu germà Pigmalió, que havia matat el seu marit, va arribar a terres de l'actual Tunísia. Allà va demanar ser acollida i li va ser concedida tota la terra que pogués abastar amb una pell de brau. Aleshores Dido va tallar la pell de brau en tires molt fines amb les quals va encerclar un perímetre circular de terra. Així, la intel·ligent Dido va intuir que amb el perímetre de què disposava, el cercle era la figura que limitaria una àrea més gran.

És fàcil trobar la formulació matemàtica del fet que la circumferència és el perfil que envolta una àrea màxima amb un perímetre fixat. Donada una longitud L, el radi del cercle de perímetre L serà $R = L/2\pi$, i l'àrea tancada, $\pi R^2 = L^2/4\pi$. Per tant, la formulació del problema isoperimètric és la següent:

Qualsevol regió plana limitada per un perímetre de longitud L té una àrea A que compleix

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi} \tag{6}$$

i, a més, la igualtat es compleix només quan la regió està limitada per un cercle.

Els grecs es van ocupar del problema isoperimètric i Zenodorus (200 aC-140 aC) va provar resultats que des de la perspectiva de la matemàtica de l'època es poden considerar una primera solució del problema.

Els resultats de Zenodorus són coneguts gràcies a l'obra de Pappus d'Alexandria (290 dC-350 dC), el qual veu en la intel·ligència de les abelles, posada de manifest en la construcció dels ruscs, un precedent natural per al problema isoperimètric. Pappus diu que entre totes les figures que les abelles podien considerar per a formar un rusc, que eren triangles, quadrats o hexàgons (evidentment regulars), van triar la de més costats, l'hexàgon, intuint que era la que permetria emmagatzemar més quantitat de mel invertint la mateixa quantitat de cera en la construcció. A continuació diu que, en conseqüència, els homes, encara més intel·ligents que les abelles, ens plantegem una afirmació més general: de totes les figures planes, amb angles i costats iguals i del mateix perímetre, és més gran la que té més costats i la més gran de totes és el cercle.

Concretament, Zenodorus va provar amb mètodes geomètrics molt elegants els resultats següents:

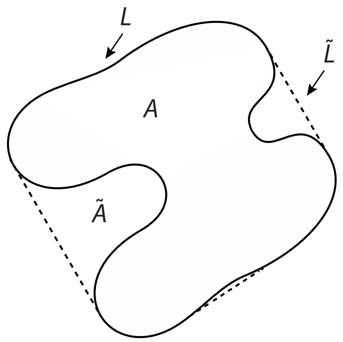
- Un polígon regular de *n* costats tanca més àrea que qualsevol altre polígon de *n* costats del mateix perímetre.
- Per als polígons regulars del mateix perímetre, com més costats tenen més àrea tanquen.
- Un cercle té més àrea que qualsevol polígon regular amb el mateix perímetre.

Podem trobar molta més informació històrica i molt més detallada sobre el problema isoperimètric a l'excel·lent article de J. González Llorente "El problema de Dido, abelles, billars i principis de màxims i mínims" [2].

La contribució de Steiner

Per tal de trobar una aportació significativa de cara a la solució del problema isoperimètric hem d'arribar al segle XIX amb l'obra de J. Steiner, el qual dóna fins a cinc "demostracions" de la desigualtat isoperimètrica (6) que són molt interessants des d'un punt de vista geomètric, però que no són del tot rigoroses. En efecte, totes es basen en el pressupòsit que el problema té solució, és a dir, que hi ha una regió d'àrea màxima amb un perímetre prefixat. A continuació en descriurem alguna.

La primera observació que cal fer és que n'hi ha prou de considerar la desigualtat isoperimètrica per a recintes convexos, observació que els grecs ja van fer. En efecte, si tenim una regió de perímetre *L* que



tanca una àrea *A* i fem la seva envolupant convexa, ens trobarem amb una regió de perímetre $\tilde{L}$ i àrea $\tilde{A}$ i, òbviament, serà

$$\tilde{L} \leq L, \quad \tilde{A} \geq A.$$

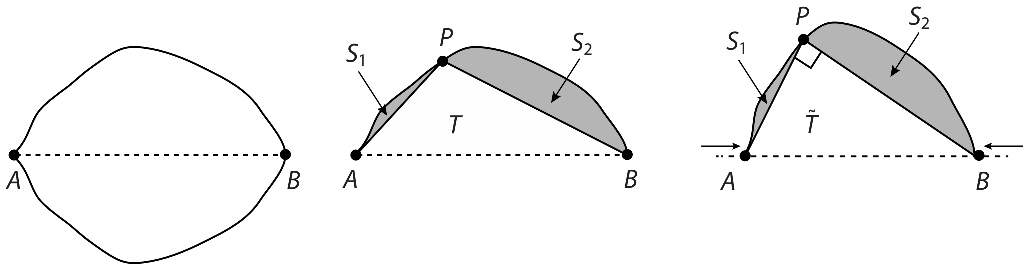
Per tant, si és certa la desigualtat $\tilde{A} \leq \dfrac{\tilde{L}^2}{4\pi}$ també ho serà $A \leq \dfrac{L^2}{4\pi}$.

També convé observar que el problema isoperimètric admet una formulació dual: *entre totes les figures planes d'àrea donada, la que té perímetre mínim és el cercle*.

Aleshores el que Steiner fa és el següent: donada una figura que no és un cercle, en construeix una altra que té el mateix perímetre, però àrea més gran, o bé una que té la mateixa àrea, però perímetre més petit. Dit d'una altra manera, que per a un perímetre fixat, una figura d'àrea màxima ha de ser un cercle, però queda el problema de provar l'existència d'una figura d'àrea màxima.

Les construccions de Steiner van ser publicades el 1842 i una d'elles és la següent:

Suposem que tenim una regió plana convexa que no sigui un cercle. Dividim aquesta regió amb una línia recta en dues parts que tinguin la mateixa àrea i el mateix perímetre (més endavant justificarem que això és possible).

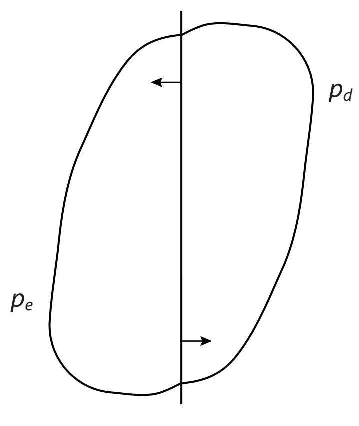


Considerem una meitat que no sigui un semicercle. Hi ha d'haver un punt P a la seva vora tal que l'angle $\widehat{APB}$ no sigui recte (vegeu la figura anterior). L'àrea de la meitat considerada és $S_1 + T + S_2$. Ara fem lliscar els punts A, B sobre l'eix de divisió fins al moment en què l'angle en P sigui recte. Llavors la nova àrea és $S_1 + S_2 + \tilde{T}$ amb $\tilde{T} > T$, ja que comparem dos triangles que tenen dos costats iguals i un dels quals és rectangle i, per tant, té àrea més gran. Així doncs, obtenim una àrea superior a l'àrea de partida, mentre que el perímetre es conserva. Si reflectim la nova configuració respecte de l'eix de divisió, obtindrem una figura que tindrà el mateix perímetre que la inicial, però una àrea més gran.

La conjectura de l'equipartició d'una regió

En el raonament anterior es fa servir el fet que una regió convexa es pot dividir per una línia recta en dues parts de la mateixa àrea i el mateix perímetre. Com es pot justificar això? De la manera següent:

És clar que hi ha una recta vertical i només una que divideix la regió en dos trossos de la mateixa àrea. En general, els trossos resultants no tindran el mateix perímetre: posem que siguin p_d i p_e amb $p_d - p_e > 0$. Si ara fem girar la línia divisòria de manera que sempre parteixi la regió en dues parts de la mateixa àrea, és senzill veure que la quantitat $p_d - p_e$ varia contínuament. Quan hàgim girat 180° ens trobarem amb $p_d - p_e < 0$. Pel teorema de Bolzano, en algun moment hauríem tingut $p_d - p_e = 0$.



Val la pena comentar breument un problema de plantejament molt senzill, però de solució matemàtica molt difícil i, de fet, encara desconeguda, que és l'extensió de la divisió anterior a un nombre de trossos superior a 2.

L'any 2006, R. Nandakumar i R. Ramana Rao van proposar el problema següent:

> Donada una regió convexa del pla i un número natural N, existeix una partició de la regió en N parts, de manera que totes elles tinguin la mateixa àrea i el mateix perímetre?

El cas $N = 2$ és el que acabem de discutir, però el cas general és encara un problema obert.

A aquest problema s'hi han aplicat mètodes de transport optimal, de topologia algebraica i de teoria de números. En aquest moment el resultat millor que es coneix és degut a Blagojević i Ziegler, el qual diu que si N és una potència d'un número primer i llavors la partició és possible (vegeu [4] per a més informació).

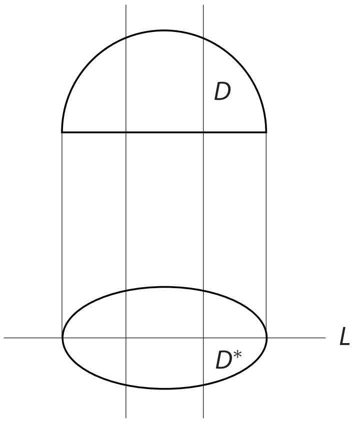
El procés de simetrització

Una altra de les demostracions, mancada de rigor també, que va donar Steiner de la desigualtat isoperimètrica es basa en l'anomenat *procés de simetrització*, que ell va introduir i que té força interès en geometria.

La simetrització d'un domini del pla D, respecte d'una línia recta L, consisteix a passar a un domini D^* tal que

i) D^* és simètric respecte de L.
ii) Qualsevol recta perpendicular a L que talla D o D^* també talla l'altre domini i les dues interseccions tenen la mateixa longitud.
iii) La intersecció de qualsevol recta perpendicular a L amb D^* consisteix en un segment bipartit per L.

Per exemple el simetritzat d'un semicercle respecte d'una recta paral·lela al seu diàmetre és una el·lipse.



És evident, pel principi de Cavalieri, que D i D^* tenen la mateixa àrea. Steiner va observar que, a més, el perímetre de D^* és més petit o igual que el perímetre de D i els perímetres són iguals només en el cas que D sigui simètric respecte d'una recta paral·lela a la línia de simetrització L. No és difícil justificar tot això analíticament.

Considerem ara el problema isoperimètric dual i sigui D una regió convexa que tingui perímetre mínim d'entre totes les regions que tenen una àrea fixada (l'existència d'una tal regió s'hauria de provar). Fem ara la simetrització de D respecte d'una recta L; llavors la nova regió D^* té la mateixa àrea que D i el seu perímetre, també igual al de D, perquè ha de ser menor o igual que el de D, però aquest hem suposat que era mínim. Llavors, pel que hem dit abans, D ha de ser simètric en la direcció de L i com que L és qualsevol recta es dedueix que D ha de ser un cercle.

Les idees de Steiner van ser aprofitades més tard per a donar proves rigoroses de la desigualtat isoperimètrica tal com comentarem més endavant.

Les demostracions analítiques

Quan arriben les primeres demostracions matemàticament correctes de la desigualtat isoperimètrica? Vénen de la mà de l'anàlisi i en van apareixent diverses basades en mètodes diferents.

La primera és deguda a Weierstrass, que va donar una prova de l'existència de solució, l'any 1879, en les seves lliçons sobre el càlcul de variacions, i que va permetre donar una resposta rigorosa al problema. Però Weierstrass no va publicar mai aquests resultats i es va haver d'esperar fins a la publicació de les seves obres completes l'any 1927, en què apareixen reconstruïts a partir de les notes dels seus estudiants.

Per aquest motiu s'acostuma a considerar la demostració que va donar Hurwitz l'any 1902, fent servir sèries de Fourier, com la primera prova rigorosa de la desigualtat isoperimètrica. Aquesta demostració apareix en un article, en el qual Hurwitz aplica el desenvolupament en sèrie de Fourier d'una funció i d'altres desenvolupaments a diversos problemes de la teoria de corbes i de superfícies. El treball de Hurwitz va marcar el començament d'una nova línia de recerca que ha donat resultats molt interessants al llarg dels anys posteriors.

Una mica més tard, l'any 1909, Carathéodory va donar una altra demostració de la desigualtat isoperimètrica. Carathéodory va afegir el que li faltava a Steiner en el seu raonament mitjançant el procés de simetrització del qual ja hem parlat abans. És a dir, va provar que entre tots els dominis convexos d'àrea donada n'hi ha un que té perímetre mínim. Amb aquest resultat a la mà, el mètode de Steiner dóna que aquest domini de perímetre mínim ha de ser un disc.

La idea per tal de provar l'existència del domini de perímetre mínim és la següent: donat un domini convex $D = D_0$, es pot construir una successió de dominis convexos $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$, on D_n és el simetritzat de D_{n-1} respecte d'alguna recta que passa per l'origen, de manera que els D_n's convergeixen cap a un domini D_∞ i els perímetres dels D_n's decreixen cap al perímetre de D_∞. Resulta que la simetrització de Steiner no redueix el perímetre de D_∞, de manera que aquest domini té la mateixa àrea que D i perímetre mínim i ara ja sabem que D_∞ ha de ser un disc. Com que la desigualtat isoperimètrica val per a D_∞, també val per a D.

Abans de l'aparició de les obres de Weierstrass encara es va publicar una altra prova, molt curta i elegant, de la desigualtat isoperimètrica. Va ser deguda a Carleman, l'any 1921, i es basa en el teorema fonamental de la representació conforme que permet aplicar conformement l'interior d'una corba simple en el disc unitat.

Amb posterioritat als treballs que acabem de citar han aparegut altres proves de la desigualtat isoperimètrica amb mètodes diferents. Només direm que l'any 1953, el matemàtic català Lluís Santaló en va donar una fent servir resultats de la geometria integral, una branca de les matemàtiques que ell mateix va contribuir a desenvolupar d'una manera prominent.

Es podrien citar moltes altres proves de la desigualtat isoperimètrica, com la de la projecció de Schmidt (1939), les de Gromov fent servir mètodes d'anàlisi vectorial per a dimensions qualssevol (1986), adaptada al pla per diversos autors, o la de Sawlov de les disseccions (1998).

El que és més remarcable, però, és que també es pot demostrar la desigualtat isoperimètrica amb mètodes elementals, entenent per elementals els coneixements que s'expliquen en les assignatures de càlcul del primer curs dels estudis de matemàtiques o física de les nostres universitats. La prova que donarem a continuació respon a aquest esperit i és deguda a Lax [3].

Una demostració elemental

Sigui C una corba simple tancada que limita una regió convexa plana d'àrea A. Suposarem que C és regular i que té longitud L. Volem provar la desigualtat (6):

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

i que la igualtat només val si C és una circumferència.

En primer lloc, observem que podem suposar $L = 2\pi$. En efecte, si suposem que l'origen queda a l'interior de C i apliquem una homotècia de centre l'origen i raó ρ, la nova corba $\rho\, C$ té una longitud igual a ρL i tanca una àrea igual a $\rho^2 A$, com es dedueix immediatament de les fórmules (1) i (4).

Per tant, la desigualtat isoperimètrica per a la nova corba $\rho\, C$ dóna:

$$\rho^2 A \leq \frac{\rho^2 L^2}{4\pi}, \quad \text{equivalent a (6).}$$

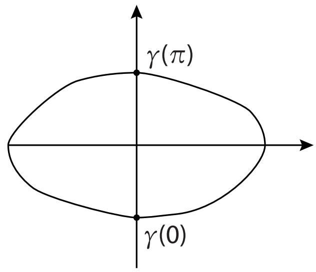
Així doncs, si triem ρ tal que $\rho\, L = 2\pi$, ja tenim justificada la hipòtesi que hem fet. Ara cal provar, doncs, que si C té longitud 2π i tanca una àrea A, llavors

$$A \leq \pi.$$

A continuació suposarem que la corba C la tenim parametritzada amb el paràmetre arc.

Posem, doncs, que C està definida per $\gamma(s)$ amb

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)), \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$$



Movent la corba adequadament sense que varïi la seva longitud ni l'àrea que tanca podem suposar que

$$x(0) = x(\pi) = 0.$$

Per la fórmula (3) tenim

$$A = \int_0^{2\pi} x(s)y'(s)\,ds = \int_0^{\pi} x(s)y'(s)\,ds + \int_{\pi}^{2\pi} x(s)y'(s)\,ds$$

i demostrarem que cadascuna de les dues últimes integrals és menor o igual que $\pi/2$. És suficient fer-ho per a una de les dues perquè el mateix raonament val per a l'altra. És a dir, volem veure que

$$\int_0^{\pi} x(s)y'(s)\,ds \leq \frac{\pi}{2}$$

i discutir què passa en el cas que valgui la igualtat.

Farem servir la desigualtat elemental

$$a \cdot b \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad \text{si} \quad a,b \in \mathbb{R},$$

on la igualtat val si i només si $a = b$. Per provar-la, només cal tenir en compte que aquesta desigualtat és equivalent a $(a - b)^2 \geq 0$.

Així doncs, tenim

$$\int_0^{\pi} x(s)y'(s)\,ds \leq \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (x(s)^2 + y'(s)^2)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (x(s)^2 + 1 - x'(s)^2)\,ds, \tag{7}$$

on hem fet servir que $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$, perquè amb el paràmetre arc el vector tangent a la corba té longitud igual a 1.

Considerem ara la funció $\varphi(s)$ definida per

$$\varphi(s) = \frac{x(s)}{\sin(s)}, \quad 0 < s < \pi.$$

Aquesta funció de fet és contínua a l'interval tancat $[0,\pi]$ si estenem la definició posant $\varphi(0) = x'(0)$, $\varphi(\pi) = x'(\pi)$. En efecte, per a $s = 0$, per exemple, tenim:

$$x(s) = x'(0) \cdot s + o(s), \quad s \to 0,$$

i per tant,

$$\lim_{s\to 0} \varphi(s) = \lim_{s\to 0} \frac{x(s)}{\sin s} = \lim_{s\to 0} \frac{x(s)}{s} = \lim_{s\to 0} \left(x'(0) + \frac{o(s)}{s} \right) = x'(0).$$

A més a més, la funció $\varphi'(s) \cdot \sin s$, $0 < s < \pi$, també es pot estendre contínuament a l'interval $[0,\pi]$. Vegem-ho per a $s = 0$; tenim:

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} \varphi'(s) \cdot \sin s &= \lim_{s\to 0} \frac{x'(s) \cdot \sin s - x(s) \cdot \cos s}{\sin^2 s} \cdot \sin s = \\ &= \lim_{s\to 0} \left(x'(s) - \frac{x(s)}{\sin s} \cdot \cos s \right) = 0. \end{aligned}$$

En conseqüència, tenim, substituïnt a (7), $x(s)$ per $\varphi(s) \cdot \sin s$ i $x'(s)$ per $\varphi'(s) \cdot \sin s + \varphi(s) \cdot \cos s$:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x(s)y'(s)\, ds \leq \frac{1}{2} \int_0^\pi (\varphi(s)^2 \cdot \sin^2 s + 1 - \varphi'(s)^2 \cdot \sin^2 s - \varphi(s)^2 \cdot \cos^2 s - \\ - 2\varphi(s)\varphi'(s) \cdot \sin s \cdot \cos s)\, ds = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \varphi'(s)^2 \cdot \sin^2 s)\, ds - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{d}{ds} (\varphi(s)^2 \cdot \sin s \cdot \cos s)\, ds = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \varphi'(s)^2 \cdot \sin^2 s)\, ds - \frac{1}{2} \left[\varphi(s)^2 \cdot \sin s \cdot \cos s \right]_0^\pi = \\ = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \varphi'(s)^2 \cdot \sin^2 s)\, ds \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

on hem fet servir el teorema fonamental del càlcul per tal d'avaluar la segona integral i que $1 - \varphi'(s) \sin^2 s \leq 1$ per a la darrera desigualtat.

Hem obtingut el que volíem i ara només ens falta mirar què passa en el cas que hi hagi igualtat. Si $A = \pi$, llavors hem de tenir

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \varphi'(s)^2 \cdot \sin^2 s)\, ds = \frac{\pi}{2}$$

i, per tant, $\varphi'(s)^2 \cdot \sin^2 s = 0$, $0 < s \leq \pi$, que implica $\varphi'(s) = 0$, és a dir, $\varphi(s) = k$, k una constant, $0 \leq s \leq \pi$. D'altra banda, la igualtat a (7) implica que $x(s) = y'(s)$ i tenim, finalment,

$$x(s) = k \cdot \sin s, \quad y'(s) = k \cdot \sin s,$$

o bé:

$$x(s) = k \cdot \sin s, \quad y(s) = -k \cdot \cos s + h,$$

h constant, per a $0 \leq s \leq \pi$. Aquestes equacions són la parametrització d'un semicercle. Anàlogament obtindríem un altre semicercle per als valors del paràmetre s, $\pi \leq s \leq 2\pi$ i arribem a la conclusió desitjada que la igualtat isoperimètrica només es compleix per als cercles.

Referències

[1] Blåsjö, V. (2005). The isoperimetric problem, *Amer. Math. Monthly*, 112(6), 526-566.

[2] González Llorente, J. (2015). El problema de Dido, abelles, billars i principis de màxims i mínims, *NouBiaix*, 37, 8-28.

[3] Lax, P. D. (1995). A short path to the shortest path, *Amer. Math. Monthly*, 102(2), 158-159.

[4] Ziegler, G. M. (2016). Matar mosques a canonades, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 31(1) (en premsa).