Una petita història a partir d'un problema aparentment petit

El mes de maig del 2008 vam gaudir de la presència al nostre país d'Abraham Arcavi. Ens va venir a parlar de visualització i resolució de problemes. Des del Creamat vam poder organitzar una conferència i un seminari de tres sessions que ens van deixar uns records molt especials. Podeu veure l'enregistrament de la xerrada («Lo que entra por los ojos», http://goo.gl/rhk1UF) i descarregar els materials del seminari (http://goo.gl/PVICWm) des del nostre web. Però en aquest article, més que parlar de la seva visita, volem recuperar una petita història que va sorgir de la resolució d'un dels problemes que es van treballar al seminari.

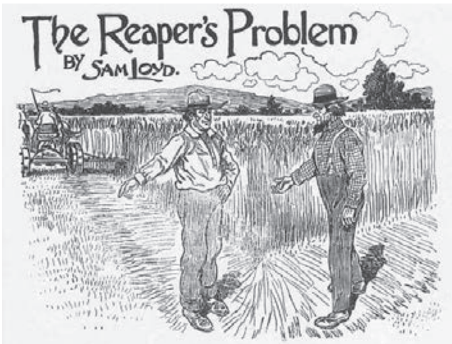
El problema en concret es va presentar a la segona sessió i el seu autor és el gran creador de trencaclosques americà Sam Loyd (1841-1911).

El problema del segador

Quina amplada ha de tenir la banda?

Els pagesos sense coneixements matemàtics particulars sovint resolen d'una manera pràctica alguns problemes molt difícils. Vull assenyalar als nostres aficionats l'astuta forma en què dos grangers van arreglar els seus afers.

Un ranxer de Texas, que posseïa més terra de la que podia sembrar, va cedir la meitat d'un camp a un veí. El camp tenia 2.000 iardes de llarg i 1.000 d'amplada, però a causa d'algunes zones de mala terra que el travessaven, es va decidir que s'obtindria una divisió més justa si se segava una banda al voltant del camp en comptes de dividir-lo per la meitat.

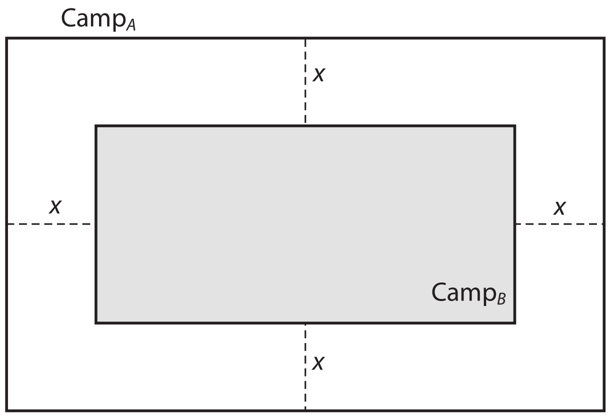


Suposo que els nostres aficionats no trobaran una gran dificultat a determinar l'amplada d'una banda que recorri tota la perifèria i que contingui exactament la meitat de la collita. Hi ha una regla simple que és aplicable a qualsevol camp rectangular.

A l'article d'Abraham Arcavi «Generating problemes from problems and solutions from solutions» (http://goo.gl/PnmqRs) s'analitzen amb amplitud les característiques del problema. En tot cas, com en molts altres reptes d'aquest estil, podem considerar anecdòtiques les dades concretes i interessar-nos més per investigar una solució general. Actuant així, entre moltes altres coses, podem posar de manifest les relacions entre les dades de partida i les solucions obtingudes. Aquestes relacions ens poden servir per a trobar una fórmula o un mètode que ens ajudi a resoldre tots els problemes semblants o bé, i aquest aspecte és més remarcable, a descobrir les possiblement interessants propietats matemàtiques que, d'una altra manera, queden amagades. A més, Loyd mateix ens convida a fer-ho quan diu que «hi ha una regla simple que és aplicable a qualsevol camp rectangular».

En el cas d'aquest problema, l'abordatge algèbric ens porta al sorprenent descobriment que una de les mesures que caracteritzen la resposta és la longitud de la diagonal del rectangle. L'aparició d'aquesta sobtada relació remourà en nosaltres la necessitat d'una investigació més profunda i amb una orientació més purament geomètrica, més basada en la visualització, que demostri, per una altra via, el resultat obtingut en primera instància. La petita història d'aquesta resolució encara guanya enters observant l'esperit cooperatiu dels resultors i resolutores del taller i com la petita insatisfacció de no haver acabat la sessió amb una solució prou senzilla i visual va fer que continuessin pensant en el problema.

Començarem per la solució algebraica. L'esquema següent és una representació gràfica del problema:



$$\text{Camp}_B = \frac{\text{Camp}_A}{2}$$

Una equació de segon grau, anomenant *a* i *b* els costats del rectangle, ens resol el problema:

$$(a - 2x) \cdot (b - 2x) = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Amb uns petits càlculs, obtenim la solució següent, vàlida per a la *x*:

$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4}.$$

Aquí trobem la primera sorpresa del problema: si interpretem algebraicament la solució, veurem que aquesta és un quart de la diferència entre la suma dels dos costats (el *semi-*

perímetre) i la longitud de la diagonal del rectangle de sortida. De fet, és la solució que ens proporciona Sam Loyd, sense justificar-la, amb el text següent:

> «[...] els segadors [...] van seguir una regla simple: "Un quart de la diferència entre la drecera passant pel mig del camp i el camí que circumda". Els matemàtics ho comprendran millor si diem: de la suma dels dos costats, resteu-ne la diagonal del camp i dividiu el resultat per quatre».

Al seminari es va continuar discutint sobre possibles solucions gràfiques del problema derivades d'aquesta descoberta algèbrica.

La segona sorpresa la descobreix Pili Royo en continuar treballant amb el problema un cop acabat el taller (la petita insatisfacció que no deixa descansar el cervell, l'emotivitat despertada per la implicació viscuda en el procés de resolució del problema...).

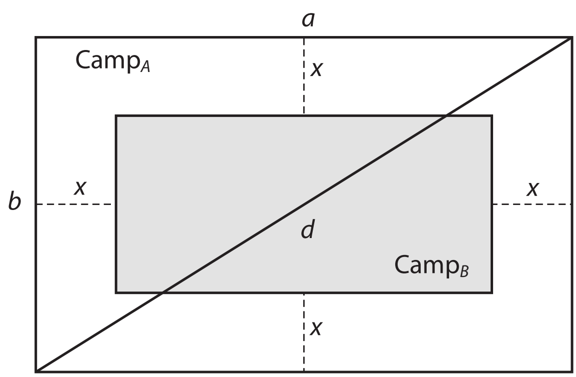
La seva aportació és la següent: si anomenem m i n els costats del rectangle meitat, podem calcular algebraicament els seus costats i quin és el valor de la seva suma:

$$\left.\begin{aligned} m = a - 2x = a - \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{a - b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \\ n = b - 2x = b - \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{2} = \frac{a - b + \sqrt{a^2 + b^2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad m + n = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

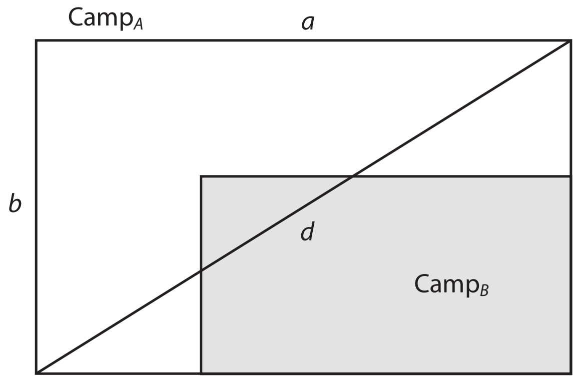
El semiperímetre del rectangle que es busca, que tingui la meitat de l'àrea de l'original i que equidisti dels costats, és igual a la diagonal del rectangle gran!

Pili Royo envia la seva solució a l'Anton Aubanell, que encara està pensant pel seu compte en el problema i busca algun tipus de solució geomètrica. L'Anton se'n va a dormir, però, com molt bé han explicat científics com Poincaré o Kekulé, el cervell continua treballant també d'una manera inconscient. De matinada, l'Anton troba l'enllaç entre les diferents idees i no pot evitar fer una primera transcripció. Aquesta versió que expliquem ara és una versió reelaborada sense les urgències de la matinada (suposem que l'Anton ens perdonarà la revelació pública d'aquestes intimitats nocturnes).

Observem aquest gràfic que torna a representar el problema i en el qual tenim la diagonal representada:

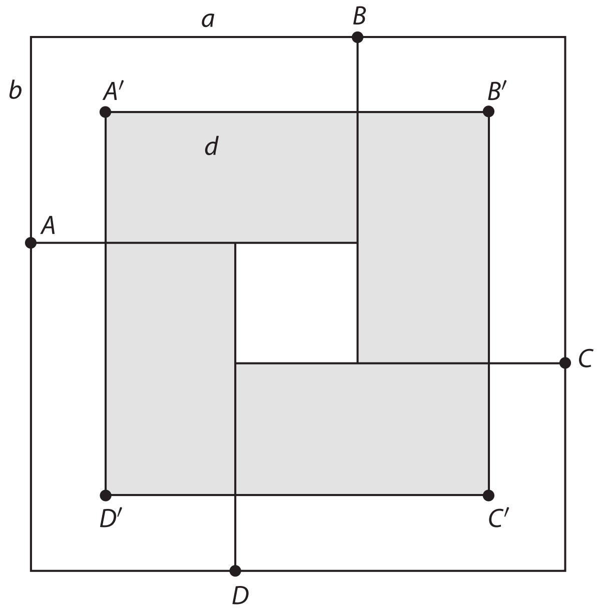


Apliquem una translació al rectangle per ajustar-lo amb el vèrtex inferior del rectangle gran.



Sabem que les àrees del rectangle i de la figura en forma de L són iguals perquè és la condició que ens imposa el problema.

Repetim aquesta construcció tres vegades més aplicant convenientment girs successius de 90°:



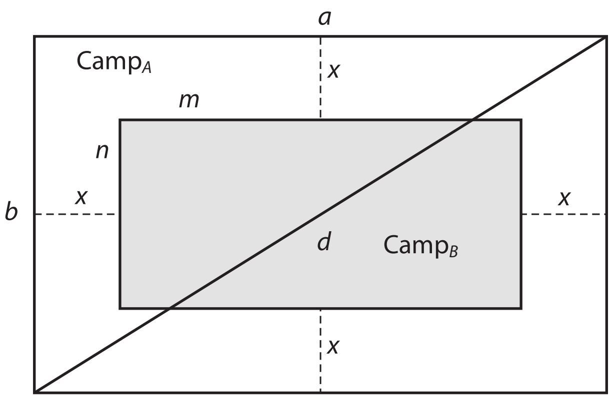
Fem ara algunes observacions:

- El quadrilàter *ABCD* és un quadrat, perquè els quatre costats són la diagonal del rectangle gran girada 90° cada vegada.
- El quadrilàter *A′B′C′D′* també és un quadrat. Tots quatre costats tenen una longitud igual a la suma dels dos costats del rectangle petit (el semiperímetre) i els quatre angles són rectes.

- L'àrea del quadrat *ABCD* és la suma del quadradet central i dels quatre triangles rectangles formats per la diagonal i els costats del rectangle gran, és a dir, quatre «mitges àrees» del rectangle gran més la del quadrat petit.
- L'àrea del quadrat $A'B'C'D'$ és la suma dels quatre rectangles petits i la del quadradet petit. Si recordem que el rectangle petit té la meitat de l'àrea del gran, trobem que la seva àrea és també quatre «mitges àrees» del rectangle gran més la del quadrat petit.

La conclusió és que tots dos quadrats tenen la mateixa àrea i, per tant, el mateix costat. Dit d'una altra manera: la diagonal del rectangle gran (el Camp_A) és igual al semiperímetre del rectangle petit (el Camp_B). Hem trobat una demostració visual clara i elegant d'aquesta igualtat. Podem sentir-nos ben satisfets. I el plural està ben utilitzat perquè, tot i que el problema és capaç de generar molts estímuls, encara són més grans els que es generen de la seva discussió col·lectiva dins el marc del taller en la qual intervenen més persones de les dues que s'esmenten en aquesta resolució. La solució és «una mica de tothom».

Només queda un detall per resoldre el problema original: calcular la distància de separació entre els camps. *Pecata minuta*: tornem a observar el primer dibuix:



Tenim que:

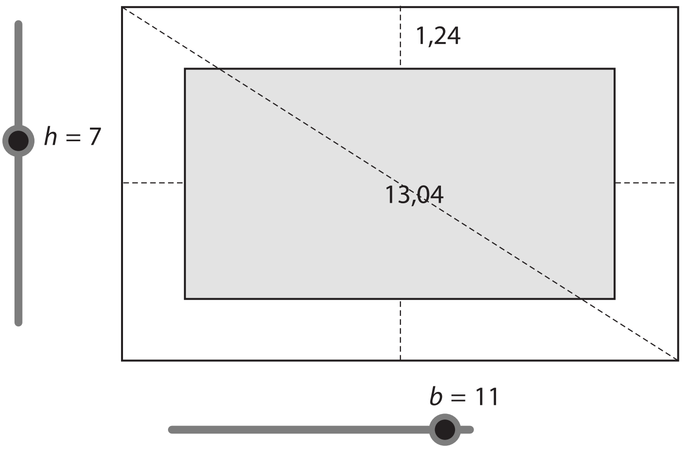
- El semiperímetre del rectangle gran és $a + b$.
- També aquest semiperímetre és $(m + 2x) + (n + 2x) = (m + n) + 4x$.
- Sabem que $m + n$ és igual a d, la diagonal del rectangle gran.

Amb les tres premisses podem plantejar una senzilla equació: $a + b = d + 4x$.

De la qual deduïm finalment que

$$x = \frac{a + b - d}{4}.$$

La implicació personal i la col·lectiva poden parar? Encara no... El problema va passant de boca a orella. El darrer capítol, fins ara, ens el va aportar Manuel Sada de Navarra (el trencaclosques de Loyd anava fent quilòmetres) amb una bella construcció interactiva amb GeoGebra que permetia visualitzar les solucions per diferents rectangles. En aquest enllaç, podeu veure una construcció inspirada en la seva (http://tube.geogebra.org/student/m1238301).



$$\text{Àrea}_{\text{gran}} = 77 \qquad \text{Àrea}_{\text{petita}} = 38{,}5$$

$$x = \frac{11 + 7\sqrt{11^2 + 7^2}}{4} = \frac{11 + 7 - 13{,}04}{4} = 1{,}24$$

Com bé haureu vist... un bon problema, una bona «visualització algebraica», una bonica demostració visual i un gran i agradable treball en equip. Una gran petita història.