pensar

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Quan em trobo acabant aquest article, he tingut coneixement que el proper mes de juliol de 2016 se celebrarà a Barcelona el Congrés Català d'Educació Matemàtica, el logotip del qual conté l'expressió c^2em, que ens recorda la coneguda fórmula d'Einstein. Des d'aquí, animo a tots els lectors del *Noubiaix* a preparar les seves contribucions i a participar activament al congrés, pel bé de l'educació matemàtica del nostre país.

I pensant en el 2016 m'adono que és un múltiple de 4 i, per tant, any de traspàs. Després de tres anys esfènics (les descomposicions en factors primers de 2013, 2014 i 2015 tenen tots els exponents iguals a 1), la descomposició de 2016 no sembla gaire especial, però ens podem adonar ràpidament que és un nombre amb una quantitat notable de divisors i abundant (la suma dels seus divisors supera el doble del nombre). I aquest fet em permet suggerir-vos un petit problema per iniciar l'article.

► **Problema 1.** És possible expressar 2016 com a suma d'alguns dels seus divisors (llevat del propi de 2016)? Quantes solucions diferents hi ha? Quina és la que utilitza menys divisors? I la que n'utilitza més?

Quan trobeu la solució que utilitza menys divisors i constateu que el nombre de divisors emprats és el menor possible, no us serà gaire difícil trobar la condició que ha de verificar un nombre enter per tal que es pugui expressar d'una manera similar, és a dir, sumant el menor nombre possible de divisors propis. A partir d'aquí, us podeu embrancar per terrenys força més complexos: n'hi ha prou de considerar només els nombres senars i fer-se preguntes similars.

► **Problema 2.** Trobeu el menor nombre senar que es pugui expressar com a suma d'alguns dels seus divisors propis. Quin és el mínim nombre de divisors necessari?

Parlant de nombres enters i divisibilitat, a la darrera prova de selecció per formar part d'Estalmat, el programa per a l'estímul del talent matemàtic, celebrada el 6 de juny de 2015, es va plantejar un problema l'enunciat del qual és el següent:

▶ **Problema 3.** Formar un nombre de 10 xifres, totes diferents, és a dir, utilitzant cada xifra una sola vegada, de manera que, quan posem la primera xifra, el nombre sigui múltiple de 1; quan posem la segona xifra, a la dreta de la primera, el nombre de dues xifres resultant sigui múltiple de 2; quan posem la tercera xifra, el nombre sigui múltiple de 3, i així fins a posar la darrera xifra, que ens donarà un nombre de deu xifres que haurà de ser múltiple de 10. Per exemple: 123654 podria ser un bon inici, ja que 1 és múltiple de 1, 12 ho és de 2, 123 de 3, 1236 de 4, 12365 és múltiple de 5 i 123654 és múltiple de 6.

Tanmateix, aquest inici prometedor queda bloquejat quan intentem posar la setena xifra, de manera que la solució, que existeix, no comença per aquestes xifres. Si teniu en compte els criteris de divisibilitat, les possibilitats es redueixen molt i només cal fer algunes proves (moltes menys de les que pot semblar) per trobar una solució. Quan l'hagueu trobat, determineu si és única o bé n'hi ha alguna més.

Tot i que el problema no sembla gaire difícil, als nois i noies que volien formar part d'Estalmat els va costar molt resoldre'l i podem dir que cap d'ells va ser capaç d'arribar fins al final. Alguns alumnes van arribar fins a sis xifres i van establir que la novena podia ser qualsevol xifra, perquè la desena havia de ser el 0, de manera que es van encallar en haver de posar la setena i la vuitena xifra. Cal dir que no podien emprar la calculadora, i no cal que us digui que recordar, o deduir, el criteri de divisibilitat per 7 no és una cosa elemental per a alumnes d'11 anys, encara que tinguin talent per a les matemàtiques, com és el cas.

Seguint amb els nombres enters i passant al terreny de les successions, segur que molts de vosaltres coneixeu la successió els primers termes de la qual són: 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, etc. Certament, trobar el terme següent, que equival a conèixer la regla de formació, és molt difícil pel fet que combina dues interpretacions de les xifres que formen els nombres. Per aquells qui no la coneixeu, us diré que dins de cada nombre, d'esquerra a dreta, es van alternant nombres que indiquen la quantitat de vegades que es repeteix una xifra, i aquesta xifra, en el nombre anterior. Així, després de l'1 tenim 11, que indica: un 1. Després vindrà el 21, que indica dos uns, i després 1211, que llegirem així: un 2 i dos 1. La successió creix ràpidament: per exemple, el terme 16 té ja més de 100 xifres, amb predomini d'uns i presència de dosos i tresos. Sabríeu demostrar que, en tota la successió, només apareixen les xifres 1, 2 i 3?

Al llibre *The Math Book*, de Clifford A. Pickover (versió en castellà: *El libro de las matemáticas*), he trobat que aquesta successió, i d'altres amb lleis de formació similars, va ser àmpliament estudiada pel gran matemàtic John H. Conway (1937), que les va anomenar successions «audioactives». Un dels resultats sorprenents és que el terme enèsim tendeix a C^n, on C és l'anomenada constant de Conway ($C = 1{,}30357\ldots$), que aparentment no té relació amb la successió.

▶ **Problema 4.** El primers termes d'una successió són: 123, 111213, 411213, 14311213... Tenint en compte que té una llei de formació similar a la de la successió anterior, sabríeu trobar els termes següents? El creixement d'aquesta successió és similar a l'anterior o bé passa alguna cosa que fa que es redueixi?

Per una vegada, en lloc d'acabar l'article amb un problema, ho faré amb una curiositat d'aquelles que deixa meravellat qualsevol que apreciï la bellesa dels nombres enters. El professor i company d'Estalmat Guillermo Pérez em va fer conèixer un nombre de 100 xifres que m'ha deixat absolutament fascinat. El nombre és:

3139971973 7866347113 9144865157 7269485891 7594191229
3874459187 7656925789 7479749143 1942288961 1373939731

Es tracta d'un nombre primer que, a més, és un primer reversible, com ho són 37 i 73. Això vol dir que el nombre:

1379393731 1698822491 3419479747 9875296567 7819544783
9221914957 1985849627 7515684419 3117436687 3791799313

que es forma a partir de l'anterior, però llegit de dreta a esquerra, també és primer. La història d'aquest nombre fascinant no s'acaba aquí, sinó que tot just comença. Si fragmentem el nombre en 10 nombres de 10 xifres cadascun, i els disposem en una taula com la següent:

3 1 3 9 9 7 1 9 7 3
7 8 6 6 3 4 7 1 1 3
9 1 4 4 8 6 5 1 5 7
7 2 6 9 4 8 5 8 9 1
7 5 9 4 1 9 1 2 2 9
3 8 7 4 4 5 9 1 8 7
7 6 5 6 9 2 5 7 8 9
7 4 7 9 7 4 9 1 4 3
1 9 4 2 2 8 8 9 6 1
1 3 7 3 9 3 9 7 3 1

resulta que tots són primers, i si invertim l'ordre de les xifres, els altres 10 nombres obtinguts també són primers. Però, si considerem els nombres que resulten de cada columna, tenim el mateix: 10 nombres primers reversibles. I encara, si formem les diagonals, seguim trobant nombres primers reversibles. Total, que el nostre nombre inicial de 100 xifres ens ha generat una pila de nombres primers reversibles que quasi fa venir mal de cap! Que tingueu un bon curs 2015-2016 i ens retrobem al proper número.

Bibliografia

Pickover, Clifford A. (2011). *El libro de las matemáticas*. Madrid: Ilus Books, S.L.