

Estrelles a la Sagrada Família de Gaudí: un context nou per a estudiar poliedres

María de los Desamparados López de Briñas Ferragut

Institut El Til·ler (Les Franqueses del Vallès-Barcelona)

Grup Vilatzara (ICE-UAB)

mlope453@xtec.cat

Resum

Tradicionalment, s'ha sostingut que pràcticament no hi ha poliedres a l'obra de Gaudí. Però una ullada a determinats indrets de la façana del Naixement de la Sagrada Família permet entreveure l'existència de diversos tipus de poliedres. En concret, poliedres estrellats que representen estrelles amb significats diversos. La varietat de poliedres estrellats que trobem serveix de marc per aprofundir en algunes de les seves característiques, alhora que proporciona un nou context amb què treballar-los a l'aula.

Abstract

Traditionally it has been maintained that there are virtually no polyhedra to be found in Gaudi's work. But a glance at certain points of the Nativity facade of the Sagrada Familia hints at the existence of different types of polyhedra. Specifically, stellated polyhedra that represent stars with different meanings. The variety of stellated polyhedra found provides a framework for further investigation into some of their characteristics, and a new context with which to study them in the classroom.

Introducció

Tradicionalment, els poliedres s'han estudiat en objectes de la vida quotidiana, en l'àmbit científic (estructura de la coberta d'alguns virus, estructura de minerals...) i fins i tot en obres escultòriques o pictòriques o en l'arquitectura.

Però una revisió de determinats indrets de la façana del Naixement de la Sagrada Família de Barcelona permet entreveure l'existència de més poliedres. En concret, poliedres estrellats representant estrelles amb significats diversos i que ens proporcionen un nou context que es pot portar a l'aula per estudiar-los.

L'estrella de Betlem

Està situada a sobre d'una columna, just al mig de la façana del Naixement, al damunt de l'escena del Naixement i sota la de l'Anunciació (figura 1).



Figura 1. Detall del portal de la Caritat. L'estrella de Betlem és al centre de la imatge, a dalt, just a sobre de la columna que divideix la imatge en dues parts iguals.¹



Figura 2. (esquerra). Vista frontal ampliada.

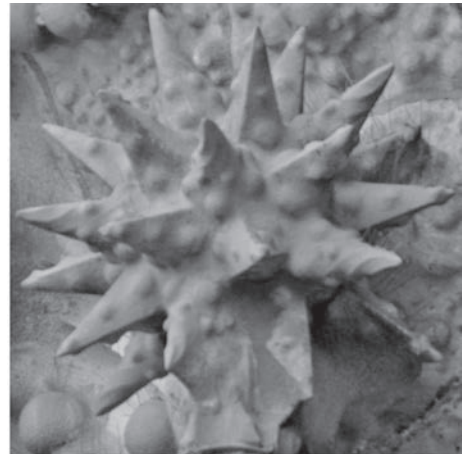


Figura 3. (dreta). Les piràmides espirals se situen al centre de cada cinc piràmides triangulars.

1. Totes les fotografies, a excepció d'aquelles que s'indica el contrari, són de l'autora.

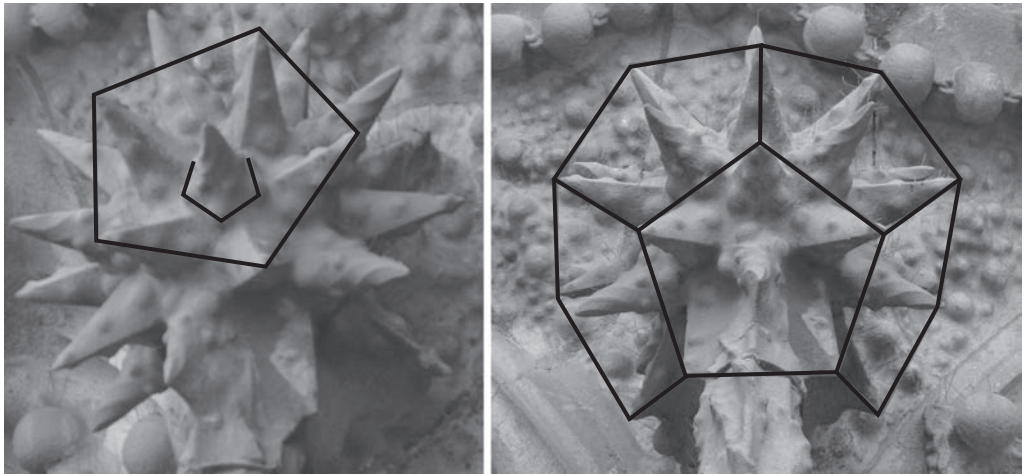


Figura 4. Agrupem les piràmides formant pentàgons amb el centre en una piràmide en espiral (esquerra). En repetir el procés per tota l'estrella obtenim l'estructura dodecaèdrica subjacent (dreta).

Una imatge ampliada (figura 2) ens permet observar la simetria i la regularitat en la distribució de les puntes. Aquest detall apunta cap a la possibilitat clara d'una distribució basada en una estructura polièdrica. D'altra banda, observem piràmides triangulars i piràmides en espiral. Aquestes darreres estan situades al centre, rodejades per cinc piràmides triangulars, com podem observar a les figures 2, 3 i 4.

Si agrupem les puntes triangulars formant pentàgons per tota l'estrella, obtenim la imatge de la figura 4. Clarament, la distribució de puntes de l'estrella de Betlem segueix la disposició dels vèrtexs d'un dodecaedre. Als centres de les cares d'aquest dodecaedre subjacent se situa una piràmide en espiral pentagonal.

Models teòrics a partir del dodecaedre

Si volem buscar un model teòric de poliedre que expliqui la major part dels detalls de l'estrella, ens haurem de basar en l'estructura dodecaèdrica. Els poliedres que li són associats són alguns arquimedians, com l'icosidodecaedre, l'icosaedre truncat, el petit rombosidodecaedre o el dodecaedre truncat.

Per tal d'esbrinar quin és el model teòric possible, hem d'aconseguir una imatge d'aquests poliedres que hem esmentat abans, però estrellats per complet. Aquestes imatges es poden obtenir gràcies a l'Applet de la Universitat Brasileira Federal Fluminense, la UFF, que s'anomena «A Plethora of Polyhedra» (<http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-en.html>).

D'aquests tres candidats, el darrer, el dodecaedre truncat, és el que descartem des d'un principi, ja que les piràmides triangulars obtingudes són massa petites comparades amb les altres i a l'estrella de Betlem tenen una mida força similar. A més, són decagonals i no pentagonals.

L'icosaedre truncat queda descartat, perquè la posició de les arestes de les piràmides hexagonals no coincideix.

El petit rombicosidodecaedre queda descartat en presentar cares quadrades, quan a l'estrella de Betlem no hi ha piràmides quadrangulars i és poc probable que aquestes cares de l'arquimedià no s'estrellin i la resta sí.

Finalment, ens queda l'icosidodecaedre, però novament la posició de les arestes de les piràmides triangulars no coincideix amb la de les de l'estrella de Betlem.

Per tant, tots aquests candidats queden descartats (figura 5).

Els del grup de poliedres de Johnson (aquells poliedres convexos les cares dels quals són polígons regulars, però no són platònics, ni arquimedians, ni prismes, ni antiprismes) també queden descartats, ja que no presenten la regularitat, ni la simetria, ni l'esfericitat en la distribució de les seves cares de la mateixa manera que es veu a l'estrella.

Els que presenten esfericitat contenen cares quadrades o triangulars contigües per les arestes, dos detalls que tampoc no apareixen a l'estrella de Betlem.

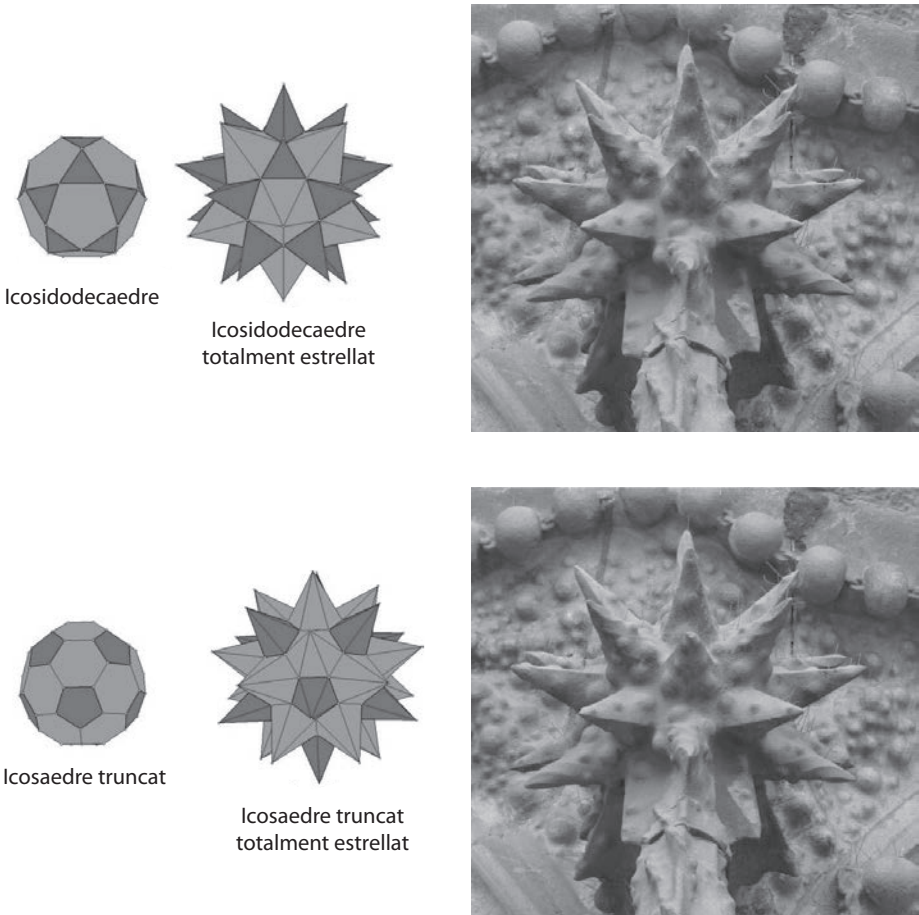


Figura 5. Comparació de l'icosaedre truncat i de l'icosidodecaedre estrellat amb l'estrella de Betlem. En ambdós casos, tots els detalls referents al nombre, la distribució i l'orientació de les piràmides no queden explicats, fet pel qual aquests models teòrics no són vàlids.

Model teòric final

Un cop descartats tots aquests candidats, encara ens queda una possibilitat que pugui aportar un model teòric vàlid per explicar la major part dels detalls de l'estrella de Betlem: és la composició de dos poliedres.

De la mateixa manera que l'Stella Octangula es pot entendre com un octaedre estrellat o com una intersecció de dos tetraedres, existeix una possibilitat per explicar l'estrella de Betlem per un procediment similar.

Quins poliedres es podrien intersecar per tal d'explicar-la?

L'agrupació en piràmides triangulars i l'estructura dodecaèdrica subjacent són característiques d'un dels poliedres de Kepler-Poinsot. Concretament, del gran dodecaedre estrellat de Kepler. Es pot entendre com un icosaedre estrellat o com una intersecció de dotze pentagrames (estrelles de cinc puntes) sobre les dotze seccions pentagonals que es poden realitzar en un icosaedre.

Una comparació amb l'estrella de Betlem (figura 6) ens permet comprovar la coincidència del nombre, la distribució i l'orientació de les piràmides triangulars del model teòric amb les de l'estrella. Per tant, seria un dels poliedres que la componen.

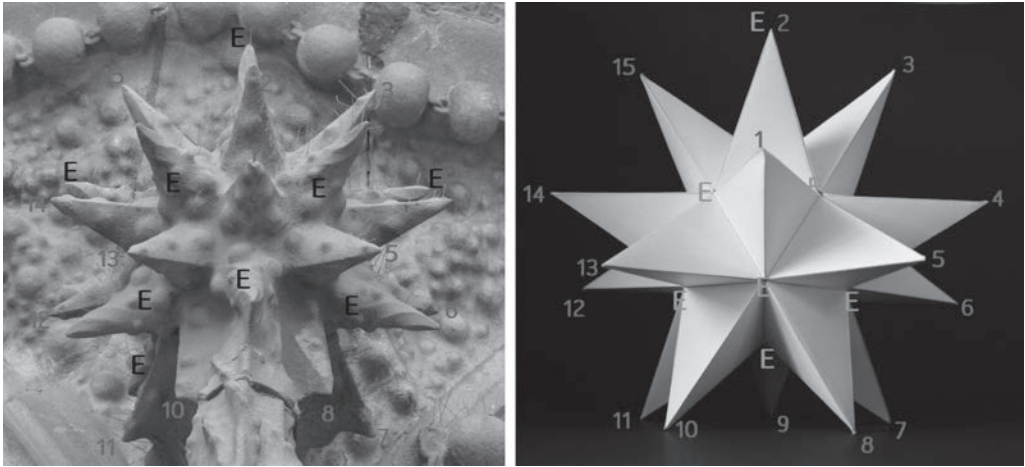


Figura 6. Comparació de l'estrella de Betlem amb el model del gran dodecaedre estrellat de Kepler.²

A la figura 6 podem observar les lletres E corresponents a «espiral».

Ja que les vint puntes del model teòric estan agrupades de manera que els seus vèrtexs estan situats just sobre els vèrtexs d'un dodecaedre i que al centre de cada grup de cinc piràmides triangulars se situa una piràmide pentagonal espiral, aquestes piràmides espirals estan distribuïdes sobre les cares d'un dodecaedre.

2. Totes les infografies de poliedres, a excepció de les que apareixen a les figures 7 i 8, han sigut obtingudes mitjançant A Plethora of Polyhedra.

Per tant, serien les puntes d'un dodecaedre estrellat de piràmides espirals. I aquest seria l'altre poliedre que forma l'estrella. Les espirals fan que les puntes no siguin poliedres. Les considerem com a part de l'ornamentació afegida a un dodecaedre estrellat.



Figura 7. Infografia: Jaume Serra Nogués.³

És a dir, l'estrella de Betlem es pot explicar mitjançant la composició d'un gran dodecaedre estrellat de Kepler amb un dodecaedre estrellat de piràmides en espiral.

A la figura 7 podem veure una imatge d'aquest model teòric proposat, resultat de compondre dos poliedres estrellats. En groc, el gran dodecaedre estrellat de Kepler. En vermell, un dodecaedre estrellat. Les piràmides en espiral serien una ornamentació afegida.

A la figura 8 podem comparar l'estrella de Betlem amb el model teòric proposat en la mateixa posició, observant la coincidència de totes les puntes dels dos poliedres compostos amb les de l'escultura, excepte d'una, la número 3, una punta en espiral.

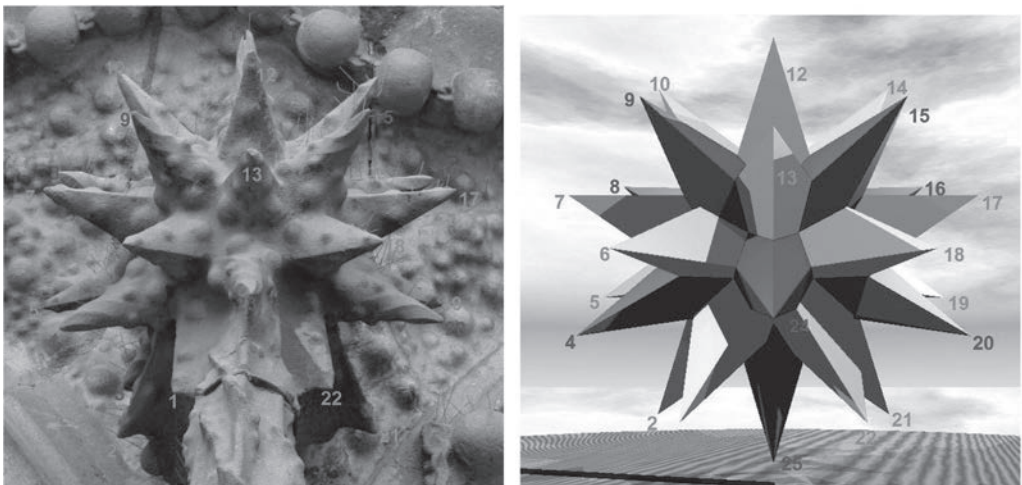


Figura 8. Vista frontal de l'estrella i comparació amb el model teòric. Infografia: Jaume Serra Nogués.

3. Jaume Serra Nogués és professor de matemàtiques a l'Institut Vilatzara de Vilassar de Mar (Barcelona).

Una fotografia ampliada de la part posterior de l'estrella (figura 9) ens permet constatar que aquesta punta en espiral no està en la posició correcta, potser per les dificultats en el moment d'assegurar-la i fixar-la a la paret de la façana. Per tant, el model teòric seria correcte.

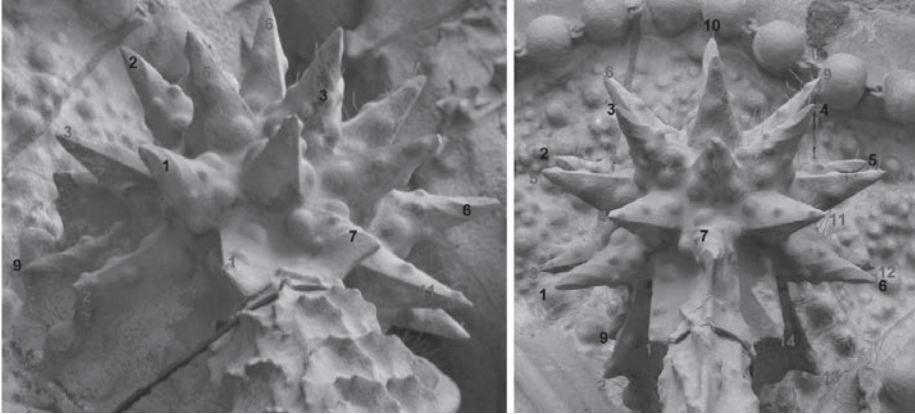


Figura 9. Vista de la part posterior de l'estrella, amb les puntes numerades com a la figura 8. La punta 3 no està ben situada.

Els pinacles dels balcons de les torres de la façana del Naixement

En cadascun dels balcons de les torres de la façana del Naixement hi ha un pinacle que constitueix l'extrem decoratiu superior de l'estàtua de l'apòstol a qui va dedicada cada torre. Cada pinacle està format per estrelles representant un cel estrellat a sobre de l'apòstol. En trobem cinc tipus diferents i per a cadascuna hi ha un model teòric de poliedre estrellat que explica els detalls que hi apareixen (figura 10).



Figura 10. Els dos tipus de pinacles estrellats a les torres de la façana del Naixement.

Models teòrics proposats

A la primera estrella (figura 11) podem observar onze puntes visibles, que són piràmides pentagonals estilitzades i amb puntes i arestes suavitzades. Cinc estan disposades al voltant d'una que es dirigeix cap a l'espectador i n'hi ha cinc més que apareixen per darrere, just entre cadascuna de les cinc que són en primer pla. La seva disposició i el seu nombre es corresponen als d'un dodecaedre estrellat (figura 11).

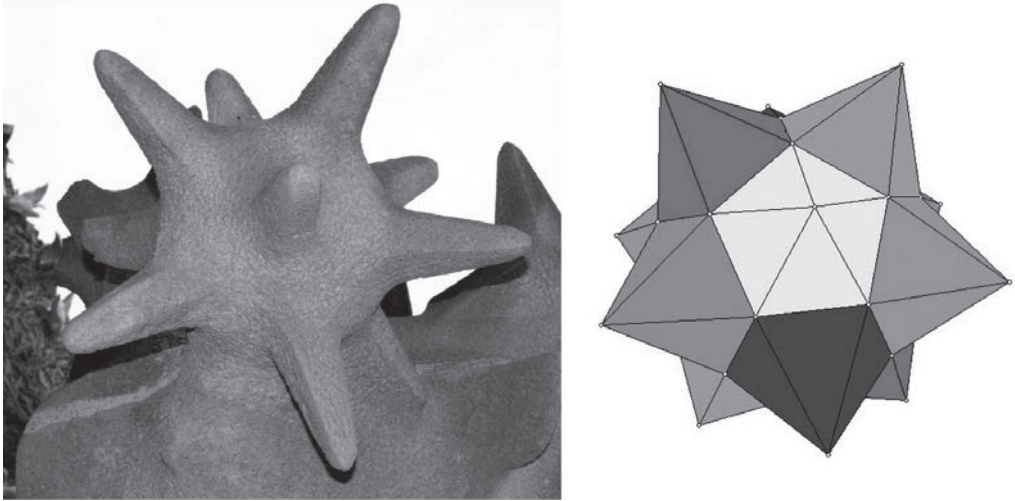


Figura 11. Estrella i model teòric proposat.

Una segona estrella és la de la figura 12. Com que les puntes de l'estrella són piràmides quadrades, en veiem cinc i estan disposades de manera ortogonal les unes amb les altres; el model teòric proposat és el d'un cub estrellat per agregació de piràmides.

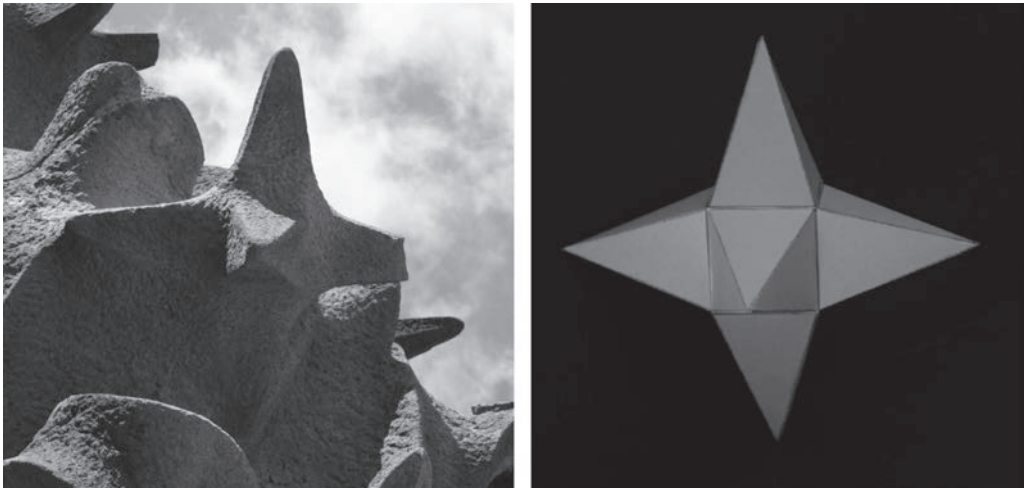


Figura 12. Estrella i model teòric proposat.

Per als altres tres tipus d'estrelles (figures 13, 14 i 15), només apareixen piràmides hexagonals en un nombre i una disposició que coincideixen amb els dels següents models proposats de poliedres arquimedians parcialment estrellats.

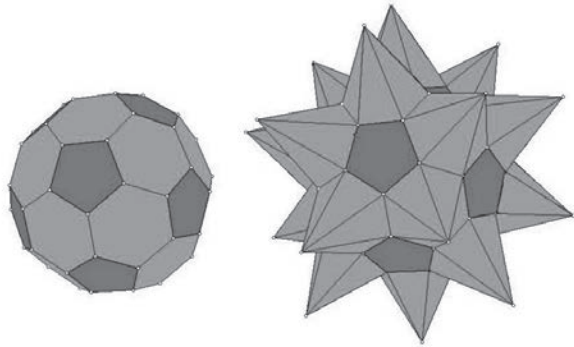


Figura 13. Icosaedre truncat estrellat per les cares hexagonals.

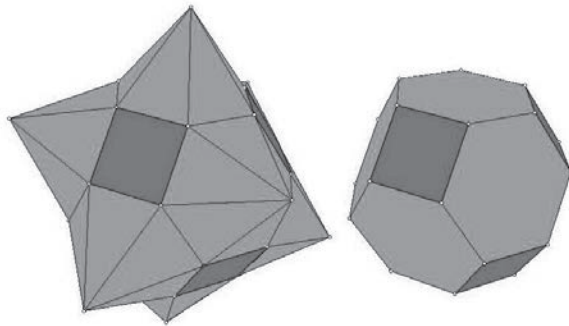


Figura 14. Octaedre truncat estrellat per les cares hexagonals.

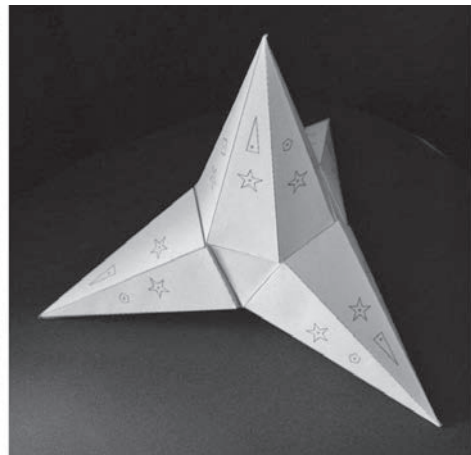


Figura 15. Tetraedre truncat estrellat per les cares hexagonals.

Però si fem una anàlisi més detallada comparant-los els uns amb els altres, podem observar que el nombre, el tipus i la distribució de les piràmides coincideixen, però no la seva orientació.

A la figura 15 es veu clarament que les arestes de les piràmides hexagonals contigües tenen dos i tres costats en comú, fet que és impossible si no és que les piràmides estan paral·leles les unes a les altres o en el mateix pla, però no és el cas. I d'altra banda, observem que tres arestes convergeixen en un únic punt, un detall que al model teòric de la dreta, també a la figura 15, no es compleix.

El mateix podem observar en les imatges de les figures 13 i 14. Les piràmides apareixen girades 30° respecte a les del poliedre proposat.

Tot i això, és possible trobar un model que expliqui aquest detall i, alhora, mantingui els anteriors, referents a les similituds amb alguns arquimedians. A la figura 16 queda il·lustrat per a un d'ells:

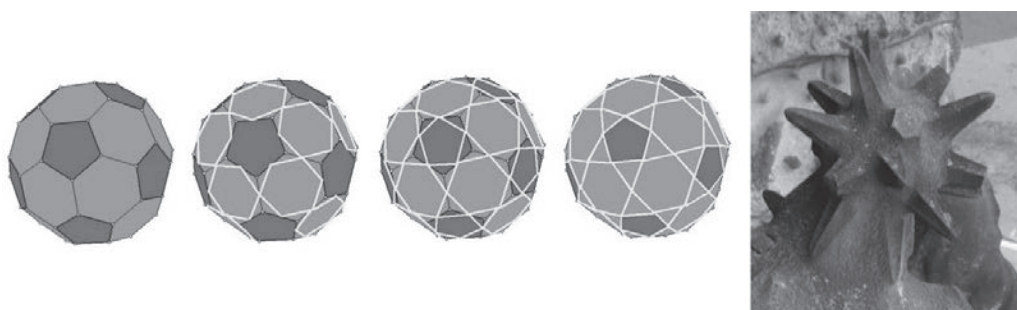


Figura 16

El procés seguit per a generar aquestes tres estrelles és el següent:

- Partim d'un poliedre platònic (tetraedre, octaedre o icosaedre) que convertim en arquimedià mitjançant un truncament pels punts mitjans.
- A continuació tornem a truncar l'arquimedià, novament pels punts mitjans de totes les seves arestes, i generem noves cares triangulars que no són equilàteres.
- Finalment, estrellem el poliedre agregant-hi piràmides, però només per les cares hexagonals.

Nombre i distribució d'estrelles a cada pinacle

Hi hem d'afegir un detall més, i és que els pinacles de totes les torres no són iguals. N'hi ha de dos tipus, estan distribuïts d'una manera asimètrica a la façana i, a més, la diferència entre l'un i l'altre està en el nombre d'estrelles (en un, n'hi ha una de més) i en la seva distribució, tal com podem comprovar a les figures 10 i 17.

A la figura 10, esquerra, tenim el pinacle de les torres de Sant Simó i Sant Mateu. El de la dreta correspon a les torres de Sant Bernabé i Sant Judes Tadeu. A tots dos hi ha dos cubs estrellats, dos dodecaedres estrellats, un únic icosaedre truncat estrellat, dos octaedres



Figura 17

truncats estrellats i dos tetraedres truncats estrellats (aquests tres darrers models, estrellats de la manera que hem explicat prèviament).

Però, a més, al pinacle de les torres de Sant Simó i Sant Mateu hi ha un tetraedre truncat estrellat de més, situat a la part frontal.

És a dir, Gaudí es basa en els cinc platònics i en truncaments d'alguns d'ells per a construir cinc tipus d'estrelles diferents, per agregació de piràmides.

Les estrelles de les constel·lacions a l'escena de l'Anunciació



Figura 18. Imatge de l'arc de les Constel·lacions, a sobre de l'escena de l'Anunciació.

El tercer indret de la façana del Naixement en què trobem estrelles està situat just a sobre de l'estrella de Betlem. Es tracta de l'arc de les Constel·lacions, que emmarca l'escena de l'Anunciació, en la qual l'arcàngel Gabriel comunica a la Verge que serà la mare de Jesús.

En aquest arc es representen sis de les constel·lacions zodiacals presents al cel nocturn en el moment del naixement de Jesús. Són: Verge, Lleó, Cranc, Bessons, Taure i Àries.

En cadascuna d'elles es representen diferents tipus d'estrelles. Apareixen menys definides que les estudiades als dos indrets anteriors, ja que hi ha poques arestes i cares clarament identificables, però el nombre i la distribució de les puntes que presenten fan possible assignar un poliedre concret a cadascuna.

Models teòrics proposats

Els cinc poliedres amb els quals es corresponen aquestes estrelles són poliedres estrellats obtinguts directament a partir dels cinc platònics. A les figures 19 a 23 les mostrem una per una amb el model teòric en la mateixa posició.

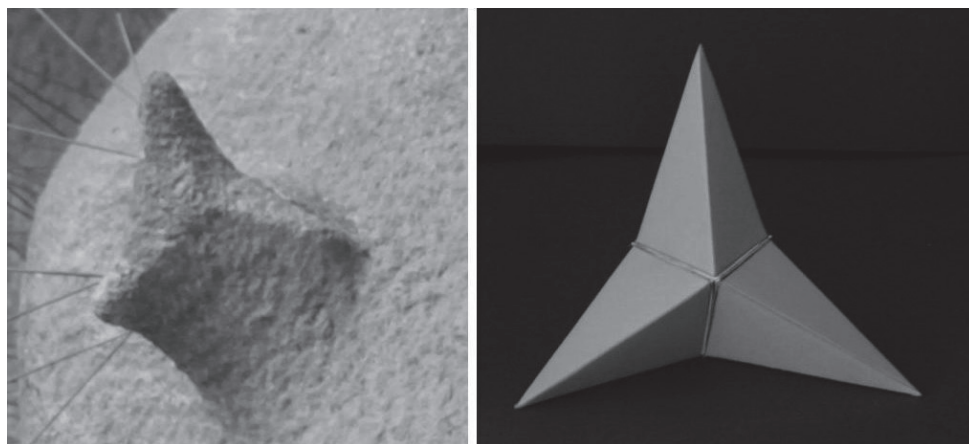


Figura 19. Estrella tetraèdrica i model teòric proposat.⁴

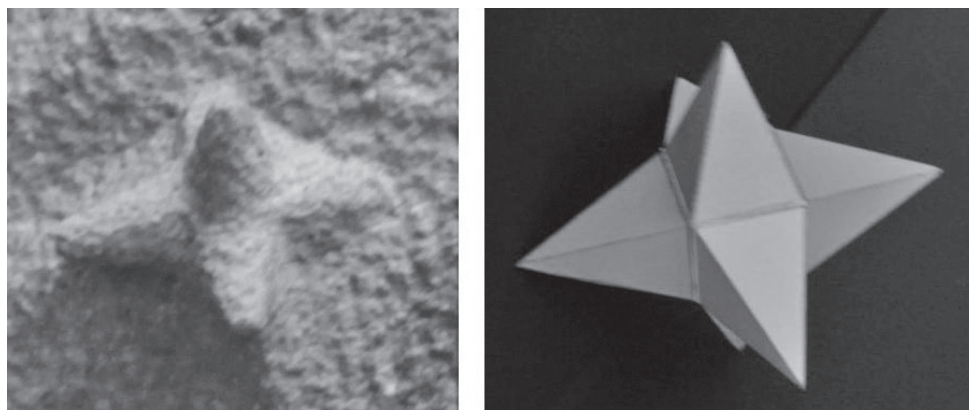


Figura 20. Estrella cúbica i model teòric proposat.⁵

4. La fotografia de l'estrella de la imatge esquerra és d'Alexander Menzinsky.

5. La fotografia de l'estrella de la imatge esquerra és d'Alexander Menzinsky.

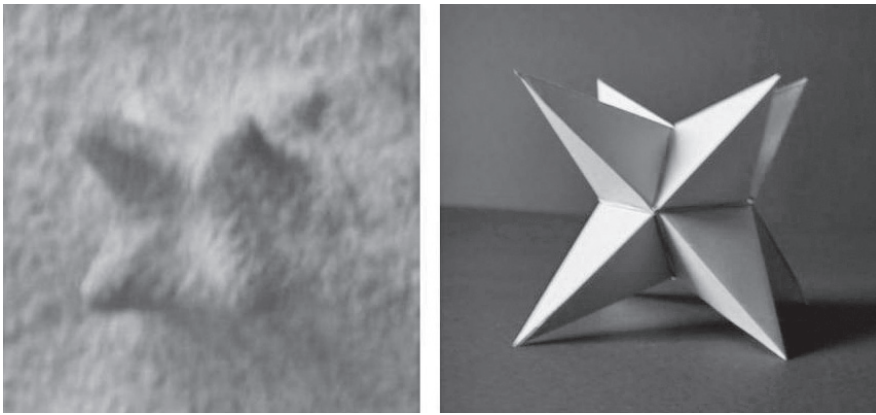


Figura 21. Estrella i model teòric de l'octaedre estrellat.

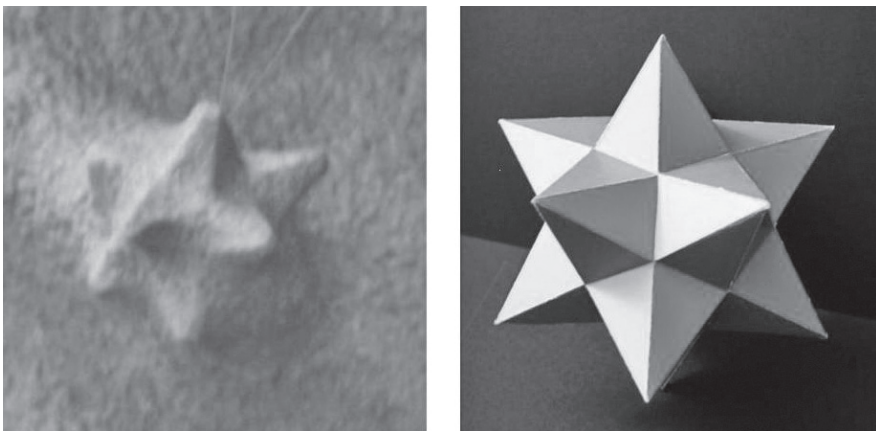


Figura 22. Estrella i model teòric del dodecaedre estrellat.

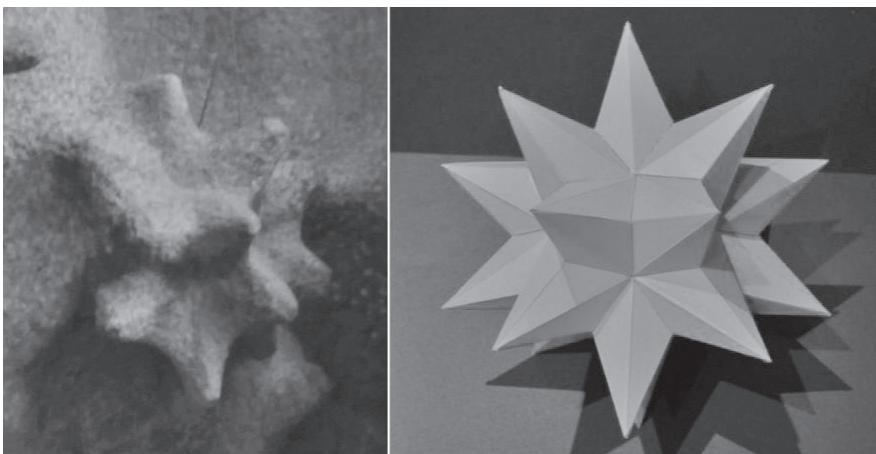


Figura 23. Estrella i model teòric de l'icosaedre estrellat.⁶

6. La fotografia de l'estrella de la imatge esquerra és d'Alexander Menzinsky.

Els quatre primers, del 19 al 22, tenen piràmides en què les cares laterals són triangles auris. En canvi, a la figura 23, el model escollit no és el gran dodecaedre estrellat de Kepler (un icosaedre estrellat les piràmides del qual tenen cares laterals que són triangles auris), sinó una altra de les cinquanta-nou formes possibles d'aconseguir un icosaedre estrellat i que presenta més similitud amb el que observem a l'arc.

Els estrellaments 19 al 21 s'aconsegueixen mitjançant agregació de piràmides al poliedre platònic original. El model 22 és el del petit dodecaedre estrellat de Kepler i s'aconsegueix o bé allargant les arestes del dodecaedre fins que es tallen o bé per intersecció de dotze pentagrames o estrelles de cinc puntes. El model 23 s'aconsegueix per extensió dels plans que contenen les cares de l'icosaedre fins que s'intersequen.

Relació entre els poliedres i les estrelles

La utilització de cinc poliedres diferents per a representar estrelles té, en aquesta cas de les constel·lacions, un significat addicional.

Si a cada estrella de les constel·lacions representades situem una inicial indicant el poliedre platònic corresponent a l'estrellat (T, tetraedre; C, cub; O, octaedre; D, dodecaedre; I, icosaedre) i comparem l'escultura amb un mapa estel·lar actual (en aquest cas, prenem com a referència els de la Unió Astronòmica Internacional), trobem que hi ha una gran similitud entre les unes i les altres, essent possible reproduir la mateixa estructura de línies traçades als mapes estel·lars (i que es fan servir per a reconèixer la constel·lació al cel real) en l'escultura, com podem observar en les figures 24 a 30.

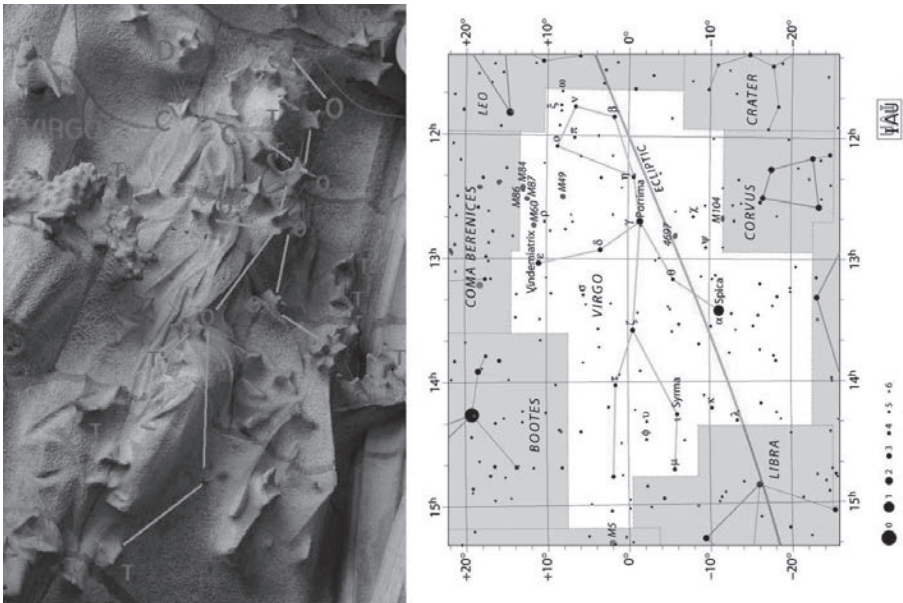


Figura 24. Comparació de la constel·lació de Verge.⁷

7. La fotografia de la constel·lació de Verge (imatge esquerra) és d'Alexander Menzinsky.

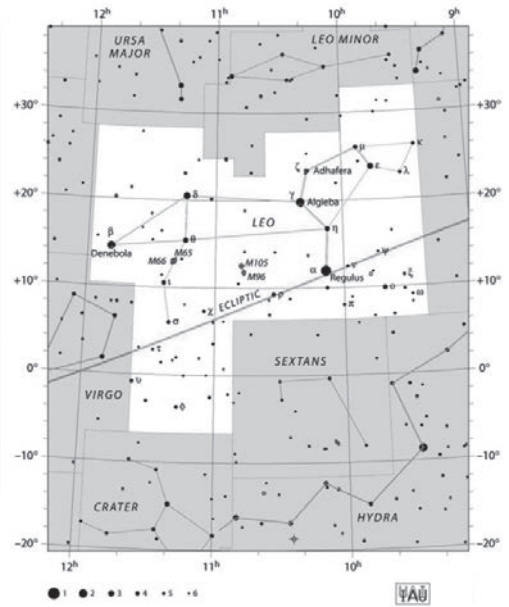
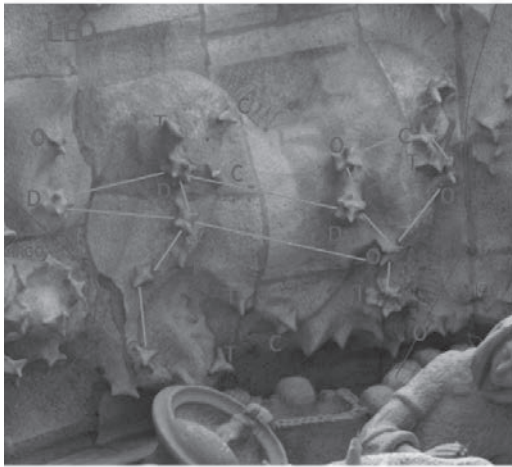


Figura 25. Comparació de la constel·lació de Lleó.

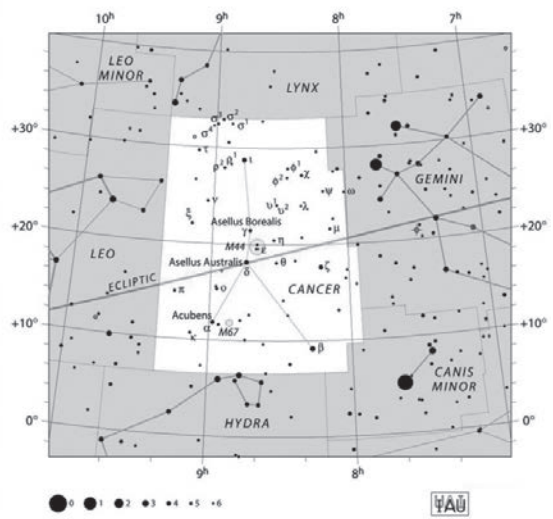


Figura 26. Comparació de la constel·lació de Cranc.

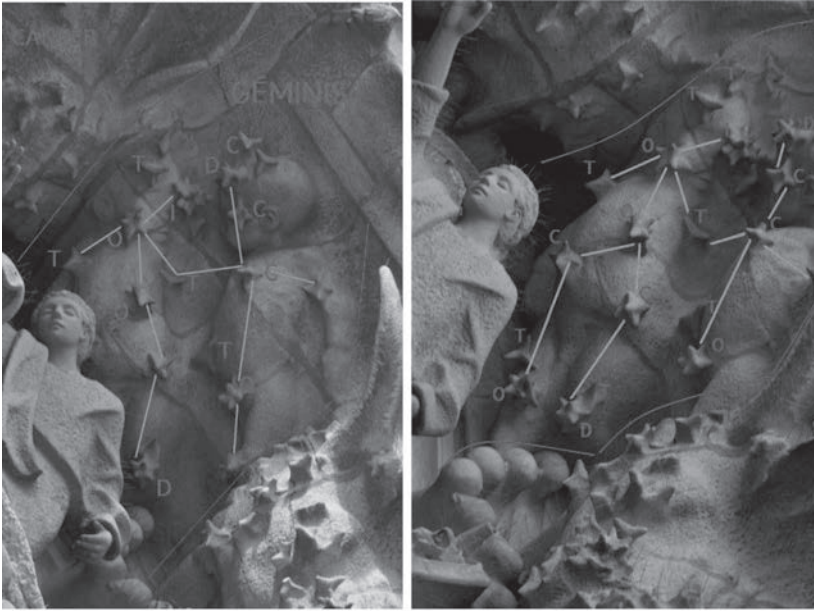


Figura 27. Comparació de la constel·lació de Bessons.⁸

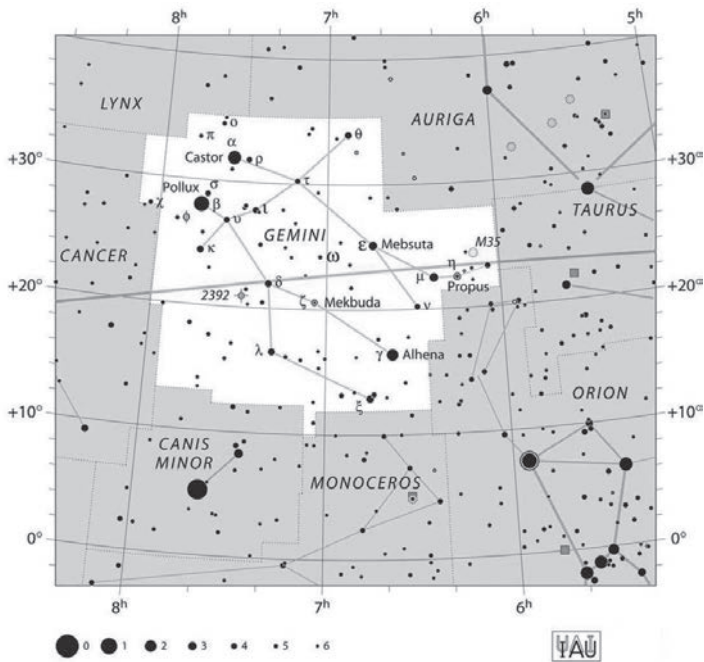


Figura 28. Mapa estel·lar actual de la constel·lació de Bessons.⁹

8. La fotografia de la constel·lació de Bessons (imatge esquerra) és d'Alexander Menzinsky.

9. Totes les imatges dels mapes estel·lars de la IAU (Unió Astronòmica Internacional) s'han obtingut de la Viquimèdia.

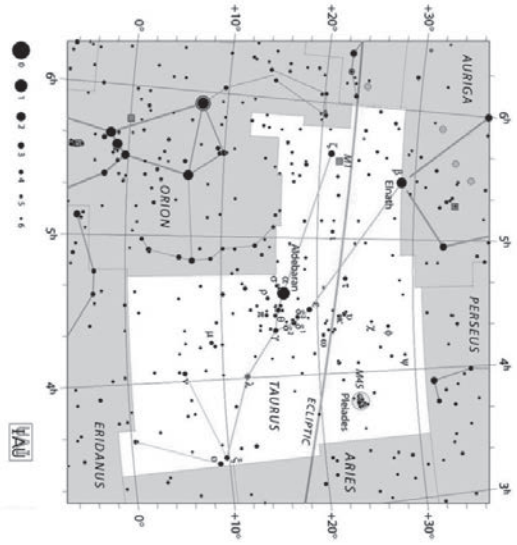


Figura 29. Comparació de la constel·lació de Taure.

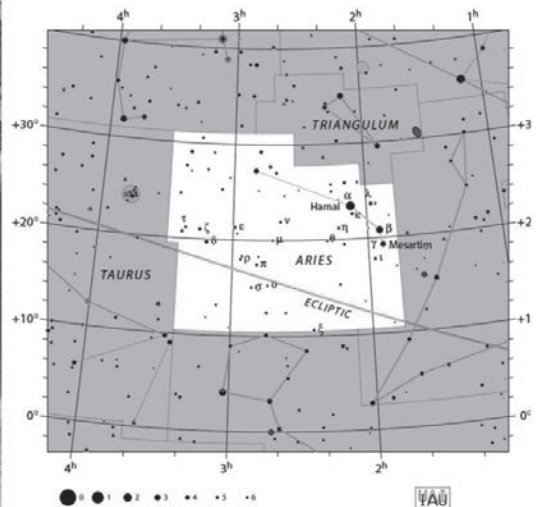


Figura 30. Comparació de la constel·lació d'Àries.¹⁰

10. La fotografia de la constel·lació d'Àries (imatge esquerra) és d'Alexander Menzinsky.

Aquesta similitud permet establir una relació directa entre la magnitud aparent de l'estrella (és a dir, la brillantor que té quan és observada des de la Terra) i el tipus de poliedre estrellat que es fa servir per a la seva representació en l'arc de les Constel·lacions.

Una anàlisi dels valors de magnituds visuals de les 49 estrelles identificables als mapes (del total de 136 representades a les sis constel·lacions, incloent aquelles més desdibuixades que es presten a classificació errònia) ens duu a establir l'assignació magnitud i poliedre estrellat següent:

Magnitud visual	Poliedre estrellat
0,98-1,35	Icosaedre (20 p.)
1,93-2,61	Dodecaedre (12 p.)
2,64-4,35	Octaedre (8 p.)
3,52-4,50	Cub (6 p.)
3,57-5,35	Tetraedre (4 p.)

Figura 31. Font: Dades de magnitud visual del Programa Cartes du Ciel.

Aquesta correspondència ens permet afirmar que Gaudí va fer servir els cinc poliedres platònics estrellats per a crear una escala de brillantor basada en el nombre de puntes de cadascun, de manera que la més brillant (menor magnitud visual) estaria representada per un icosaedre estrellat. Per a la següent, menys brillant, es faria servir un dodecaedre estrellat... i així fins a la menys brillant, representada per un tetraedre estrellat.

Les diferències de brillantor ja es representaven als mapes estel·lars antics, mitjançant dibuixos diferents per a cada tipus d'estrella. Però, a la Sagrada Família, aquest procediment es realitza fent servir figures en tres dimensions com són els poliedres estrellats.

Aplicacions didàctiques

La varietat de poliedres estrellats que es fa servir i el seu context ens serveixen de marc per a estudiar aspectes de dues disciplines com la geometria i l'astronomia, així com per a entendre la visió personal de Gaudí sobre el naixement de Jesús.

Alguns aspectes en els quals podem aprofundir són:

- Conèixer maneres de construir un poliedre/sòlid estrellat a partir d'un poliedre qualsevol:
 - per extensió dels plans que contenen les cares, o de les arestes;
 - per agregació de piràmides;
 - per intersecció de polígons, i
 - per composició de diversos poliedres.

- Conèixer possibles estrellaments dels poliedres platònics.
- Identificar diferents tipus de poliedres estrellats mitjançant:
 - la utilització de diverses vistes;
 - el recompte d'elements característics com les cares de les piràmides, les arestes i els vèrtexs, i
 - la representació d'elements geomètrics superposats en fotografies digitals.
- Conèixer com es generen dos dels poliedres de Kepler-Poinsot: el gran dodecaedre estrellat de Kepler i el petit dodecaedre estrellat de Kepler.
- Reconèixer quan un truncament d'un poliedre genera un poliedre arquimedià i quan no.
- Conèixer el concepte de brillantor o magnitud aparent d'una estrella.
- Conèixer la representació de sis constel·lacions zodiacals, tant l'artística clàssica com la utilitzada als manuals d'astronomia actuals, així com la dissenyada per Gaudí.
- Utilitzar el concepte de dualitat dels poliedres per a identificar els poliedres platònics estrellats a les constel·lacions.

