Variacions sobre Fibonacci i el nombre d'or

Josep Rey, Manuel Udina

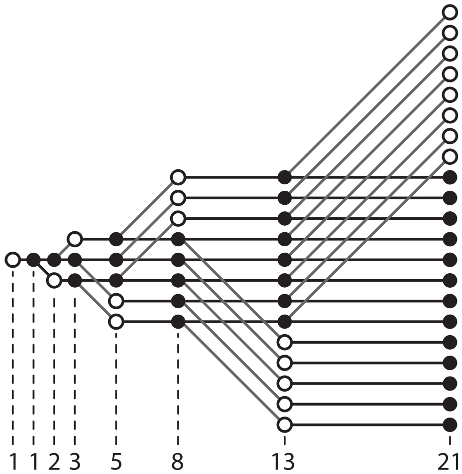
En aquest article volem referir-nos a alguns dels mòduls de les exposicions del Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) relacionats amb Fibonacci i el nombre d'or. En alguns casos es tracta de mòduls interactius, i en d'altres, d'informació que es presenta en els pòsters de l'exposició. Pensem que els uns i els altres poden aportar idees per al possible treball a classe d'aquesta temàtica.

La successió de Fibonacci

La successió de Fibonacci té l'origen en el tractat *Liber abaci* de Leonardo de Pisa (1170-1250), conegut com *Fibonacci*.

En aquest llibre planteja la successió que s'obté a partir del «problema dels conills»: «Un home va posar una parella de conills envoltats per tots els llocs per una paret. Quantes parelles de conills es poden produir a partir d'aquesta parella durant un any si se suposa que tots els mesos cada parella engendra una nova parella i que només es poden reproduir des del segon mes?».

Aquest problema es pot il·lustrar amb l’esquema següent en què cada cercle significa una parella de conills, en blanc per a la parella jove i en negre per a quan ja es pot reproduir.



Cada columna representa un mes. El nombre de parelles que tenim cada mes és la successió de Fibonacci, en la qual es pot obtenir cada terme de manera recursiva fent la suma dels dos anteriors:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
1+1 &=& \mathbf{2}, & 1+2 &=& \mathbf{3},\\
2+3 &=& \mathbf{5}, & 3+5 &=& \mathbf{8},\\
5+8 &=& \mathbf{13}, & 8+13 &=& \mathbf{21},\\
13+21 &=& \mathbf{34}, & 21+34 &=& \mathbf{55},\\
34+55 &=& \mathbf{89}, & 55+89 &=& \mathbf{144}...
\end{array}
$$

Si per veure la proporció de creixement del nombre de parelles de conills mes a mes, dividim les d’un mes per les del mes anterior, obtenim resultats diferents, però cada vegada s’assemblen més i tendeixen al nombre

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887498948482045868343656381177203 09$$

anomenat nombre d’or o proporció àuria:

1/1 = **1**	5/3 = **1,6666666**	21/13 = **1,615384615**
89/55 = **1,6181818**	2/1 = **2**	8/5 = **1,6**
34/21 = **1,619047619**	144/89 = **1,617977528**	3/2 = **1,5**
13/8 = **1,625**	55/34 = **1,617647059**	233/144 = **1,618055555**

Si volem calcular aquest límit, veiem que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}}$$

Ara observem que tant és límit d'aquesta successió el límit de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ com el límit de $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ (un terme dividit pel seu anterior). Així,

$$L = 1 + \frac{1}{L},$$

d'on $L^2 = L + 1$ i $L^2 - L - 1 = 0$. Resolent l'equació

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \Phi$$

(considerant només la solució positiva).

Rectangles de Fibonacci

Si construïm rectangles amb costats de nombres consecutius de la successió de Fibonacci, la proporció dels seu costats s'aproxima cada vegada més a la proporció àuria Φ.

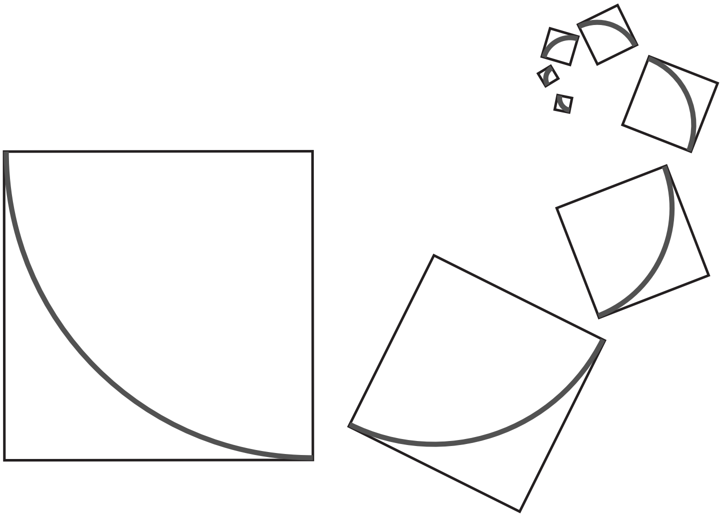
Això ho podem experimentar en un mòdul físic de l'exposició.

Partim del fet que si sobreposem dos rectangles semblants fent coincidir, per exemple, dos costats i el vèrtex inferior esquerre, les diagonals coincideixen. Justament si ho mirem com en un sistema de coordenades amb origen en aquest vèrtex coincident, el pendent de la recta corresponent a la diagonal dels rectangles és aquesta proporció (de fet, segons si hem posat aquests rectangles en posició vertical o horitzontal, el pendent serà aquesta proporció Φ o la fracció recíproca $1/\Phi$).

El mòdul disposa d'un tauler amb dos eixos de coordenades en el qual s'han dibuixat les rectes $y = \Phi x$ i $y = (1/\Phi)x$, i d'uns quants rectangles que tenen per costats els de la successió de Fibonacci. Es pot anar comprovant com, a mesura que avancem en la successió, cada vegada més el vèrtex lliure del rectangle s'ajusta a una de les dues rectes (segons que posem el costat llarg horitzontal o vertical).

L'espiral de Fibonacci

Una representació amb rectangles de la successió de Fibonacci ens va donant, en créixer, una aproximació cada cop més ajustada del rectangle auri. Presentem un mòdul en què els successius quadrats són peces de fusta, i, a partir dels dos quadrats inicials, es poden anar afegint quadrats fins a obtenir un rectangle molt pròxim al rectangle auri. A més, en cada un d'aquests quadrats hi ha gravat un quart de cercle que, en fer la construcció dels rectangles, va construint una espiral, l'espiral de Fibonacci.



Aquesta espiral és una aproximació a l'espiral àuria, una espiral logarítmica (les que donen un model del creixement d'alguns caragols) que no es correspon, com de vegades es diu, a la del *nautilus*, que s'aproxima a una de logarítmica però no a l'àuria.

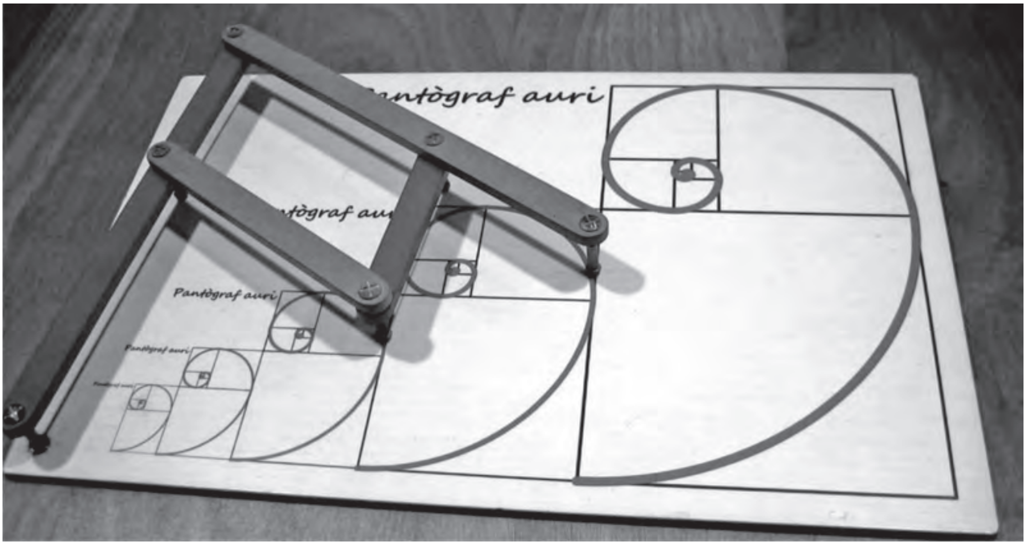
També es disposa d'un «compàs auri» (instrument articulat que té tres puntes que sempre estan en proporció àuria) amb el qual podem veure com en els rectangles més grans les mides dels costats s'ajusten més i més a la proporció àuria.

Amb el mateix compàs podem comprovar com moltes mesures del cos humà també segueixen aquesta proporció.

Pantògraf auri

Un pantògraf és un instrument de dibuix que serveix per a copiar dibuixos a escala. Al MMACA hem optat per fer pantògrafs on els dos dibuixos ja són fets, l'original i la còpia, i el visitant pot experimentar amb el seu funcionament.

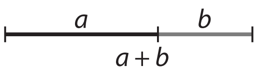
En el cas del pantògraf auri (d'escala 1:Φ), hem optat per posar-hi el dibuix de l'espiral àuria, i a més de posar-hi aquell del qual és còpia, hi hem posat també l'anterior del qual seria còpia aquest, i l'anterior, i l'anterior... (mireu la imatge). El pantògraf serveix per a tots.



En realitat, és una progressió geomètrica de dibuixos, de raó Φ. Com que les progressions geomètriques que s'acostumen a estudiar són numèriques, podem dir que el que es presenta en aquest mòdul és una progressió geomètrica-*geomètrica*.

Secció àuria

Es tracta de dividir un segment en dues parts a i b de manera que $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$.

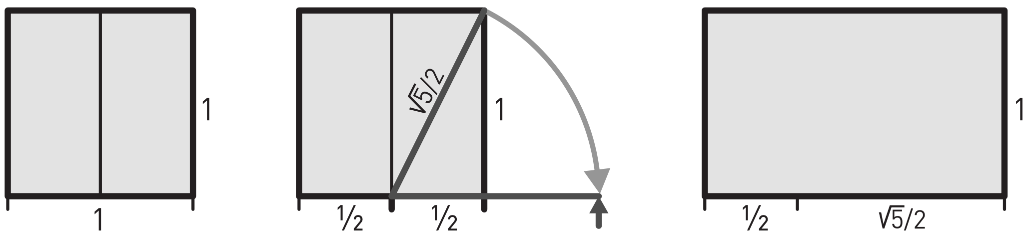


Fixem-nos que $\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$ d'on

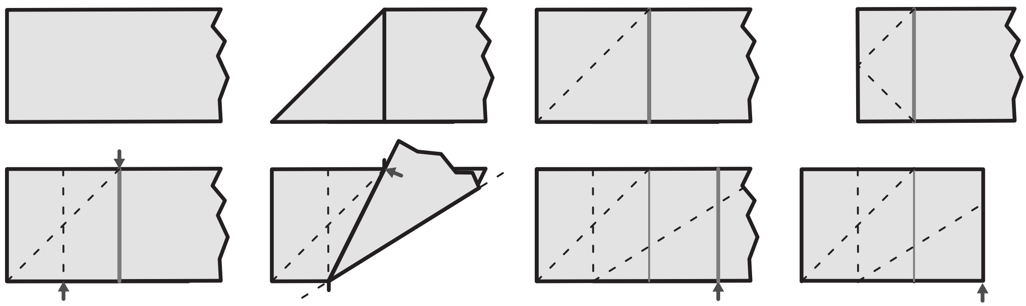
$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{b}}$$

i tal com hem vist abans, $\frac{a}{b} = \Phi$.

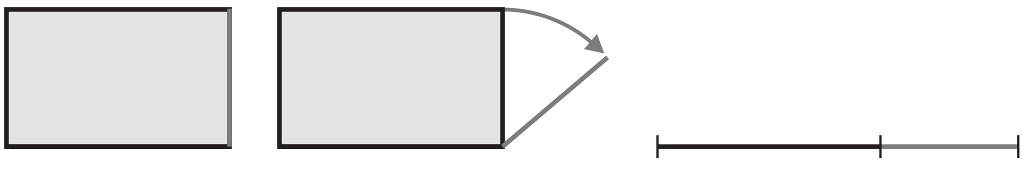
Construcció del rectangle auri amb regle i compàs



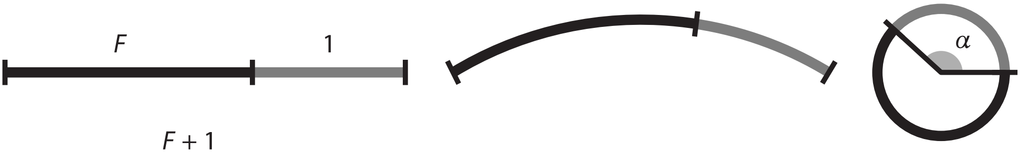
Construcció del rectangle auri plegant paper



Del rectangle auri a la secció àuria



De la secció àuria a l'angle auri



$$\frac{360^\circ}{\Phi + 1} = \frac{\alpha}{1} \text{ i d'aquí } \alpha = 137{,}50776.$$

La margarida

És sabut que el nombre d'or és present a la naturalesa. Al MMACA hem volgut fer un mòdul per experimentar-ho. Hem escollit una margarida.

Les flors acostumen a tenir els seus pètals ben distribuïts en cercle i en molts casos els pètals apareixen en simetries d'ordre 3, 4, 5... etc. Segurament aquesta simetria és un dels components de la seva bellesa.

Aquest no és el cas de la margarida. De fet, no és una flor. És una flor composta i el que serien els pètals en realitat són flors exteriors que fan de pètals i s'anomenen lígules. A més, aquestes lígules no estan repartides simètricament i fins i tot es veuen desordenades. Pot semblar que estan repartides caòticament.

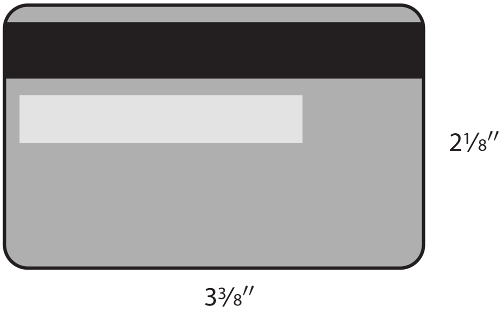
De fet, en botànica s'anomena angle de divergència aquell que forma una lígula amb la següent (també s'utilitza el nom per a designar l'angle entre branques successives d'un arbre o la disposició de fulles al llarg d'una tija). Segons aquest angle, es poden obtenir diferents configuracions. Perquè la distribució sigui òptima, «l'angle de divergència hauria de ser un múltiple irracional de 360°: com més irracional més eficient. En teoria de nombres es considera que el nombre auri és el més irracional de tots els nombres» (Ian Stewart, Deshojando la margarita, *Investigación y Ciencia*, 222).

Al mòdul s'hi pot veure la fotografia d'una margarida amb les lígules numerades de manera que la número 1 és la més allunyada i la 13 és la més propera o recent. Hi ha un arc que fa 137,5° i que és aproximadament l'angle auri. El visitant experimenta fent lliscar aquest arc al voltant de la margarida i comprovant com a partir d'una lígula sempre s'arriba a la següent.

En cas que es vulgui portar a terme aquesta comprovació a classe amb l'alumnat, es pot fer a partir de fotos fetes pels mateixos alumnes a alguna margarida o flor similar. En una reproducció de mida din A4 i havent retallat un angle de 137,5° en una transparència i punxant el vèrtex en el centre de la margarida es poden fer les mateixes comprovacions. De fet, és divertit descobrir quina és la primera i quina la darrera, ja que a vegades no és ben clar. Només cal anar seguint el procés fins que falli. Aleshores, vol dir que la lígula anterior era la darrera que anava bé. Fent el procés a la inversa, s'arriba, ara sí, fins a la primera.

La targeta de crèdit

Les targetes de crèdit tenen unes proporcions similars a l'àuria. Si bé la intenció devia ser que fos àuria, es va fixar la norma amb mesures anglosaxones amb una aproximació raonable.



$$\frac{3{,}375''}{2{,}125''} = 1{,}58823529\ldots \approx \Phi$$

El nombre d'or com a fracció contínua

Com hem vist abans, $\Phi^2 = \Phi + 1$, dividint per Φ tenim $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, d'on es dedueix que el desenvolupament del nombre auri en fracció contínua serà

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

Podem comprovar que agafant l'aproximació donada per un nombre finit de fraccions obtenim una de les fraccions de Fibonacci.