Construir, conjecturar, comprovar i demostrar amb el GeoGebra

Pep Bujosa
Professor de matemàtiques.
President de l'Associació Catalana de GeoGebra.
Formador de GeoGebra. Autor de materials de formació
jbujosa@xtec.cat

Resum

Construir, conjecturar, comprovar i demostrar són quatre procediments que sovint haurem de fer servir per a resoldre problemes de geometria o per a estudiar alguna propietat. El GeoGebra permet resoldre aquestes situacions d'una manera molt creativa. En el present article repasso els nivells de Van Hiele per a la construcció del pensament geomètric i mostro exemples d'activitats dissenyades amb el GeoGebra que poden ajudar en el camí cap a la millora del seu aprenentatge. També faig una revisió del concepte de demostració per ajustar-lo al context de les nostres aules, donant molt valor a tot el procés que l'alumne ha de seguir fins a arribar a les portes de les demostracions finals.

Abstract

Construct, propose, verify and prove are four actions we often perform in solving problems of geometry or studying particular properties. GeoGebra allows us to resolve these situations in a very creative way. In this article I review the Van Hiele levels for the construction of geometric thinking and present some examples of activities designed with GeoGebra that can help us on the path toward improved learning. I also review the concept of demonstration and how to adapt it to the context of the classroom, emphasizing the value of the whole process students must follow in order to arrive at the point of a final proof.

Introducció

Quan ens disposem a resoldre qualsevol repte geomètric, segur que haurem de *comprovar* alguna propietat, *construir* alguna figura o *demostrar* alguna hipòtesi. Aquests tres procediments són bàsics per a avançar en el coneixement de la geometria i, per tant, són també molt necessaris en l'aprenentatge d'aquesta matèria pel nostre alumnat.

Un programa com el GeoGebra és una eina molt útil per a aquests procediments. El dinamisme del programa permet que l'alumnat pugui *explorar* i, sobretot, *conjecturar*. Aquests dos procediments faran que la metodologia per a posar en pràctica els altres tres sigui molt diferent de quan ho havíem fet abans de l'aparició del la geometria dinàmica, és a dir, només amb llapis i paper. En aquest article passaré revista a les possibilitats del GeoGebra a l'hora de construir, conjecturar, comprovar i demostrar, i les il·lustraré amb alguns exemples.

Construcció del pensament geomètric. Els nivells de Van Hiele

Abans d'entrar en els exemples concrets, deixeu-me que repassi la teoria de Van Hiele sobre els nivells de construcció del pensament geomètric.

Aquesta teoria, la comencen a desenvolupar a finals dels anys vuitanta Dina i Pierre Van Hiele. Tot i que han passat molts anys, encara ara es considera vàlida i és una referència per a molts autors. Fins i tot, l'aparició de la geometria dinàmica ha actualitzat les activitats que es consideren importants per avançar en la construcció del coneixement geomètric.

La idea bàsica de la teoria és que l'aprenentatge de la geometria s'aconsegueix passant per diversos nivells de pensament i coneixement, de manera seqüencial —i que no estan directament associats a l'edat— . Només quan s'ha assolit un nivell determinat es pot passar al següent. Els autors afirmen que hi ha dos elements importants en el procés: el llenguatge utilitzat i la significació dels seus continguts. El disseny de les activitats d'aprenentatge seran fonamentals per passar d'un nivell a un altre.

Aquests nivells es classifiquen de la manera següent:

Nivell	Nom	Descripció	Exemple
0	Visualització	Les figures geomètriques es perceben en el seu conjunt sense posar esment ni en les seves propietats ni en les seves parts.	Poden identificar un quadrat, però no identifiquen els costats iguals ni els angles rectes.
1	Anàlisi	Poden reconèixer les parts i les propietats de cada figura, però no poden classificar objectes ni figures a partir de les seves propietats.	Davant d'un paral·lelogram poden reconèixer els costats paral·lels, però no poden classificar tots els paral·lelograms.
2	Classificació	Poden assenyalar les propietats necessàries i suficients que tenen les figures. Ja poden classificar les figures per les seves propietats.	Entenen la definició de paral·lelogram a partir de les seves propietats.
3	Deducció formal	Ja poden fer demostracions, deduccions lògiques i formals. Veuen la necessitat d'aquestes demostracions per a justificar hipòtesis.	Poden demostrar teoremes i resoldre formalment problemes geomètrics.
4	Rigor	Coneixen diferents sistemes axiomàtics i comparen i analitzen situacions en diverses geometries.	Relacionen postulats i axiomes d'una manera totalment abstracta.

És evident que en l'ensenyament no universitari només s'arriba al nivell 3.

El professorat ha d'aconseguir que, amb unes activitats ben triades, el nostre alumnat pugui anar passant d'un nivell a un altre. També hem de ser conscients del nivell de cada alumne: no tothom podrà arribar a una demostració formal (nivell 3) si no ha superat correctament el nivell 2.

El teorema de Pitàgores en dibuixos animats

Sens dubte, aquest és un dels teoremes bàsics en l'aprenentatge de la geometria a secundària. Amb el GeoGebra es poden fer diferents comprovacions del teorema i també es poden veure animacions que el justifiquen. Em referiré ara a alguna d'aquestes animacions.

Segurament, molts de vosaltres coneixeu algunes de les demostracions visuals del teorema. Ara n'esmentaré dues en concret: la de Pappus i la de Perigal.

A la magnífica web de Manuel Sada (http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/), hi trobem moltíssimes i molt bones aplicacions del GeoGebra a diverses parts de les matemàtiques. Té una secció especial dedicada a les demostracions visuals del teorema de Pitàgores. Si ens fixem en la de Pappus, trobarem una animació que reprodueixo a continuació:

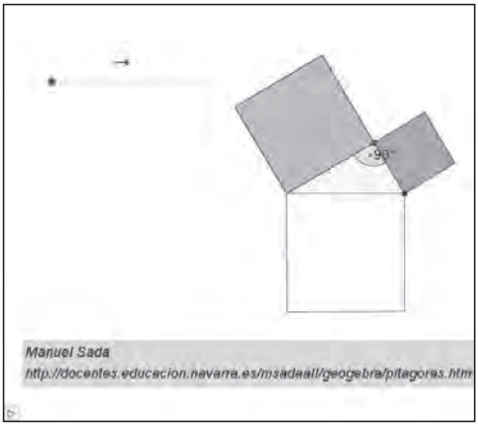

Figura 1

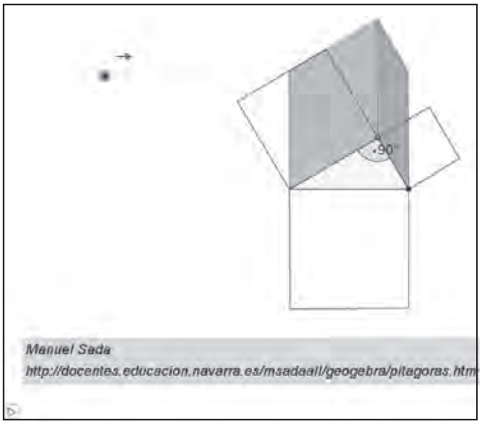

Figura 2

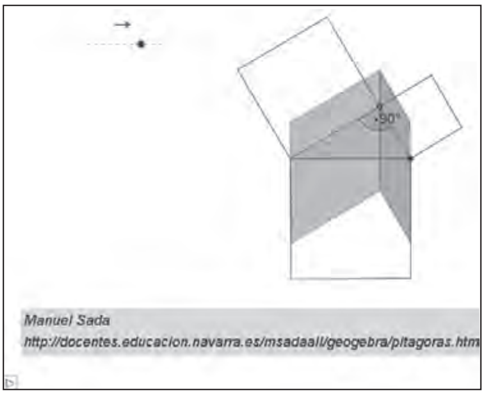

Figura 3

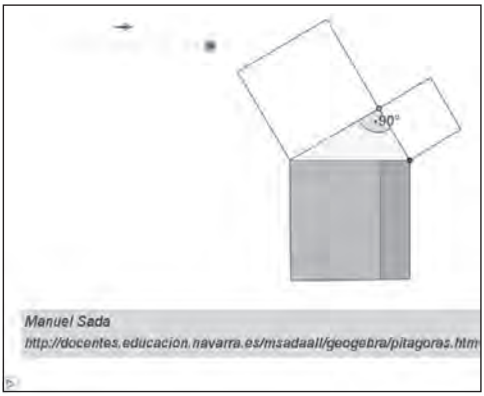

Figura 4

L'usuari, desplaçant el punt lliscant de la part superior, fa que es moguin les figures i comprova visualment que la suma de les àrees dels quadrats que tenen per costats els catets és igual a l'àrea del quadrat que té per costat la hipotenusa.

D'una manera molt similar, es pot veure l'animació de la demostració visual de Perigal:

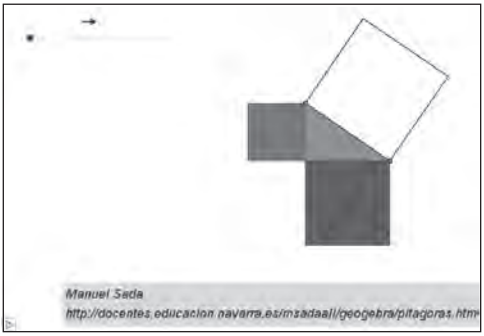

Figura 5

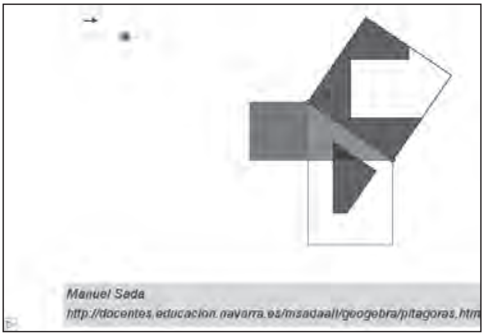

Figura 6

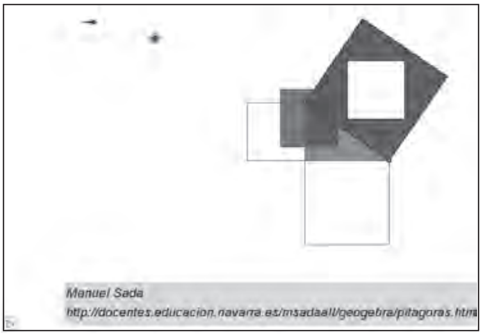

Figura 7

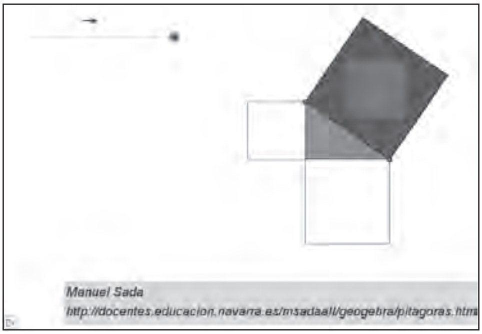

Figura 8

Tothom queda ben convençut de la veracitat del teorema de Pitàgores.

Però, si proposem que s'observi aquesta animació:

Figura 9

Figura 10

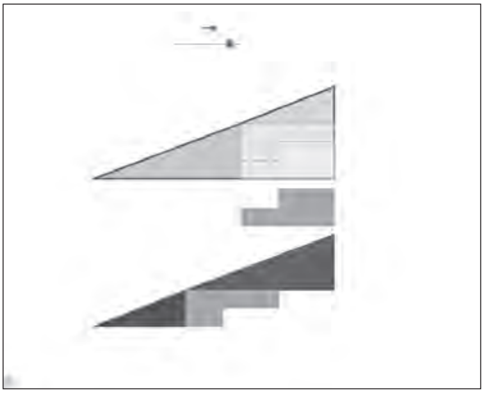

Figura 11

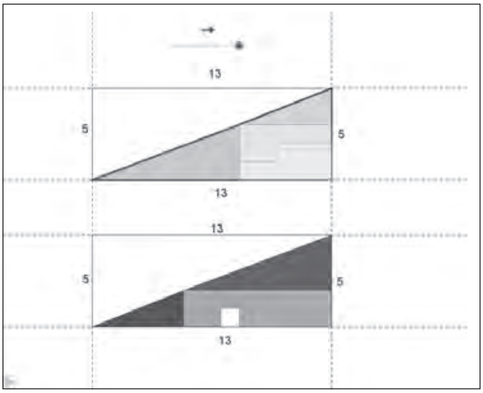

Figura 12

Què poden creure? I si veuen aquesta?

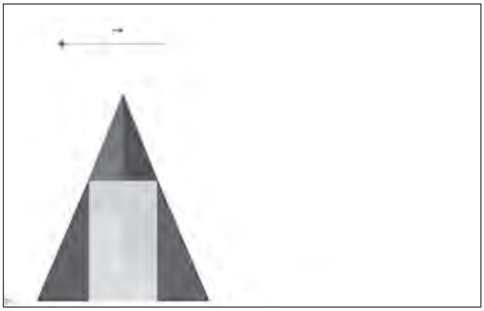

Figura 13

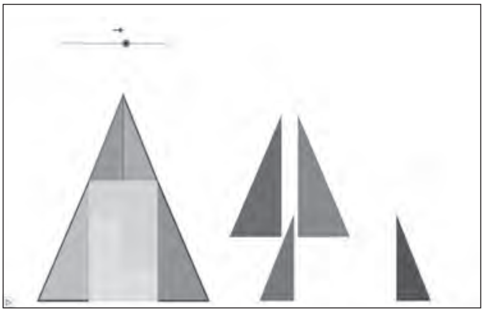

Figura 14

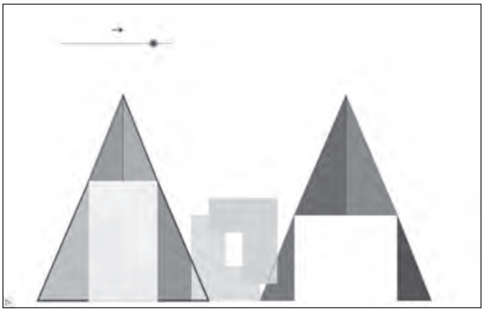

Figura 15

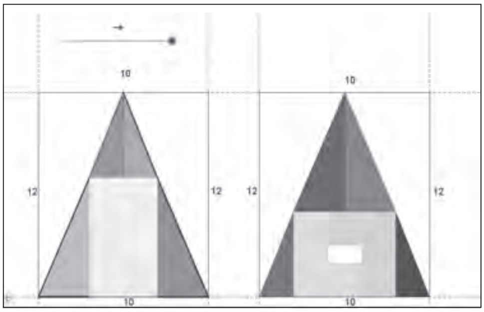

Figura 16

Així doncs, no n'hi ha prou de veure, passivament, unes animacions molt ben fetes per estar convençut de la veracitat d'un teorema o d'una propietat. Cal que el nostre alumnat sigui més crític i pugui actuar, és a dir, *construir*, *conjecturar*, *comprovar* i *demostrar*.

Anàlisi de la demostració de Pappus

Una vegada vista l'animació de la demostració de Papus, proposo que l'analitzem, de manera que l'alumnat la pugui seguir amb tots els detalls i la vagi construint. És difícil reproduir en paper tots el passos que han d'anar fent amb el GeoGebra. Precisament aquesta és la gran diferència! Podeu seguir tota la construcció a: http://geogebra.pepbujosa.info/geometriaplana/Pitag.htm.

L'aplicació es presenta amb una doble finestra. A la de l'esquerra es pot seguir la demostració visual de Pappus, però amb més detalls i estructurada en tres parts, que crec que són les peces clau. Si seguiu la construcció a l'enllaç anterior, veureu que cada part té un punt lliscant diferent. La finestra de la dreta és l'espai on l'alumnat ha de fer la seva construcció per reproduir la demostració. Però no tan sols ha d'imitar la construcció de l'altra finestra, sinó que ha de contestar una sèrie de preguntes, que haurà d'anotar a la seva llibreta de classe, per entendre realment tot el procés. Reprodueixo a continuació algunes d'aquestes preguntes:

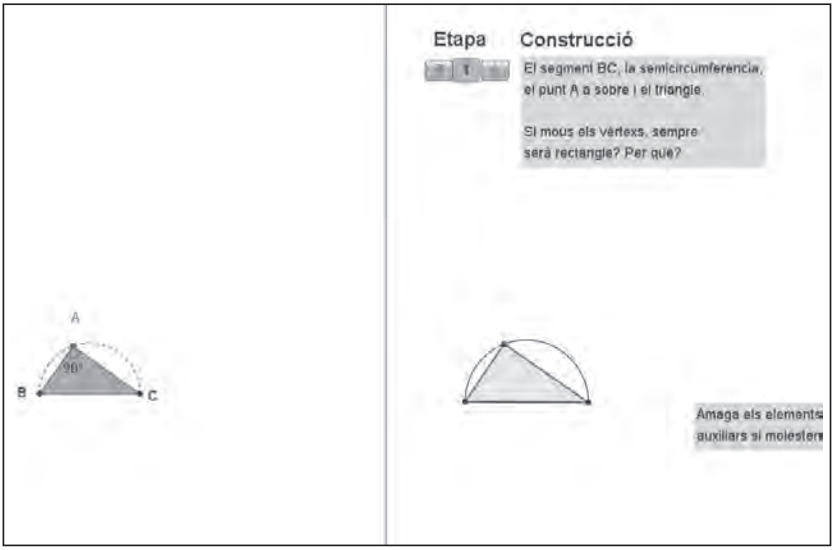

Figura 17

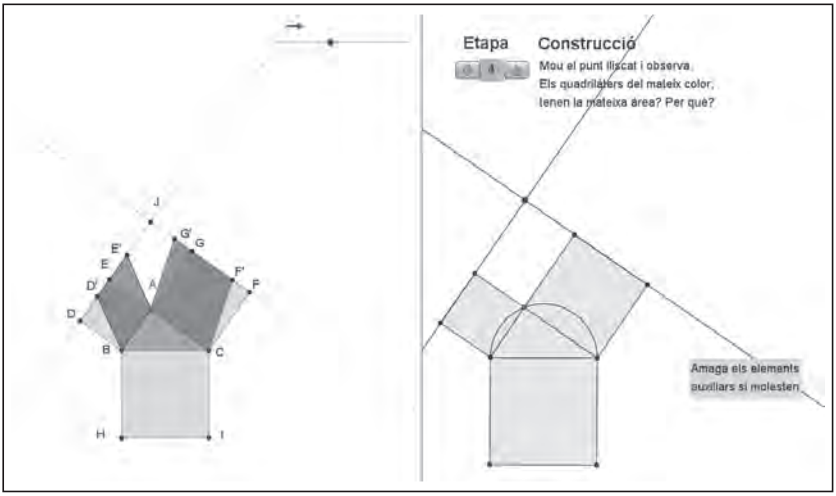

Figura 18

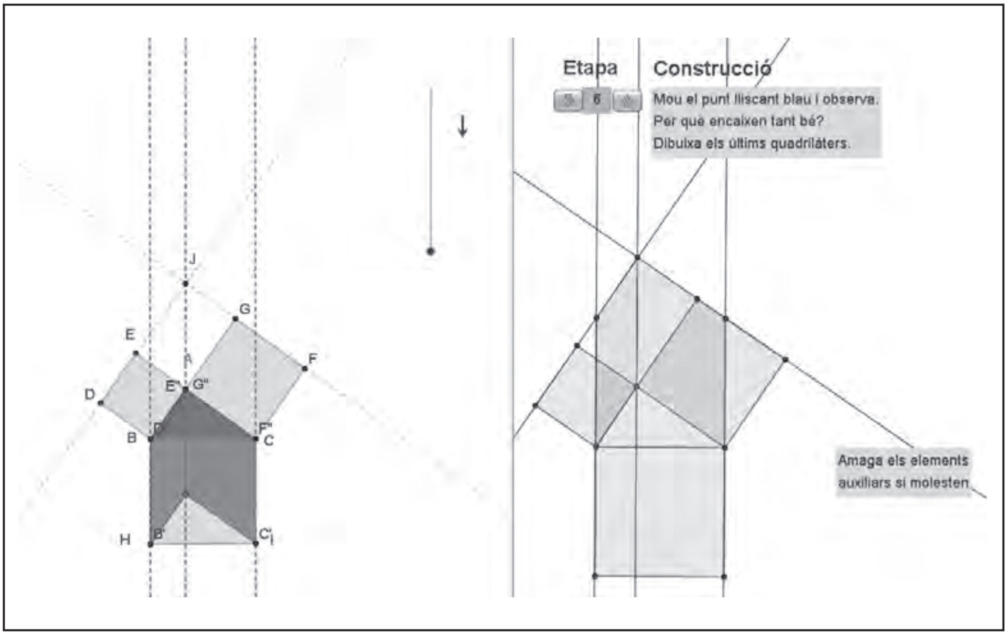

Figura 19

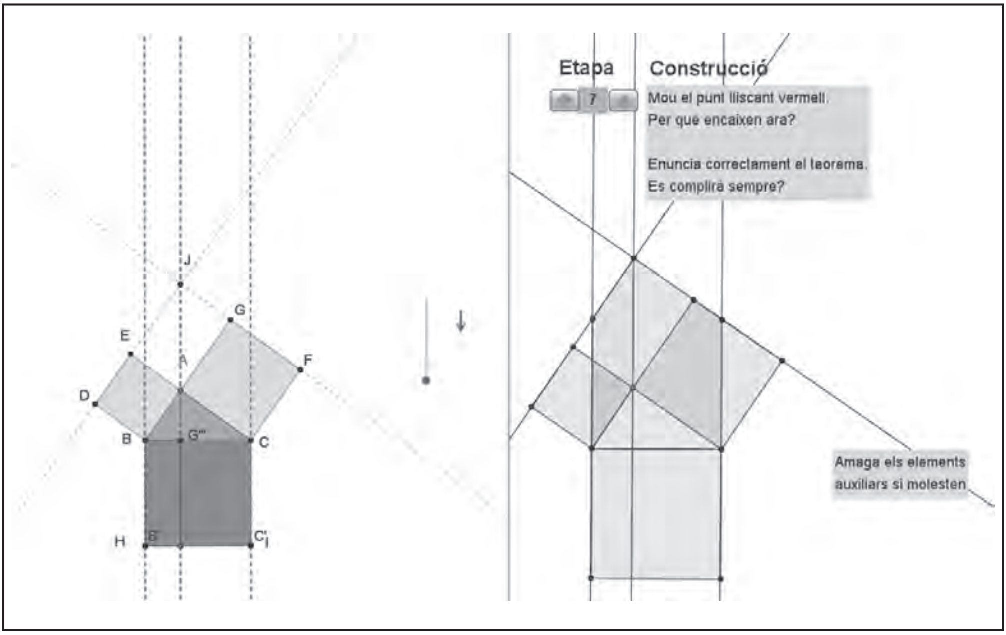

Figura 20

Anàlisi de la demostració de Perigal

D'una manera similar, es pot analitzar la demostració de Perigal. Aquesta anàlisi es pot trobar a la mateixa adreça abans citada. Reprodueixo, a continuació, dues de les preguntes que es proposen a l'alumnat en dues de les etapes de la demostració:

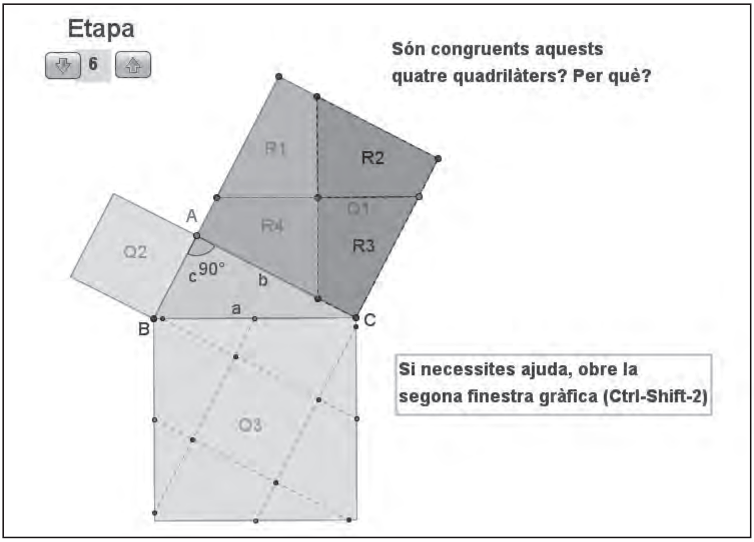

Figura 21

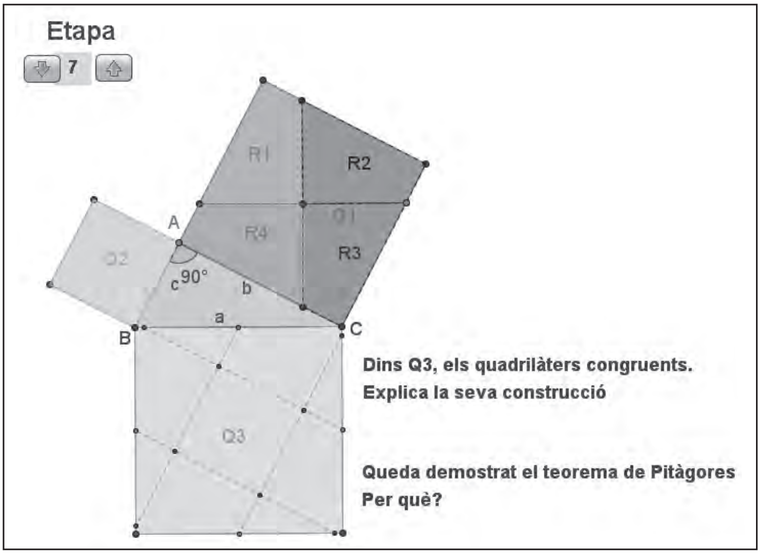

Figura 22

Per respondre a les preguntes plantejades en ambdues demostracions, cal fer servir unes determinades propietats geomètriques. Caldrà que l'alumnat que les hagi de contestar ja hi estigui familiaritzat.

En aquest procés, l'alumnat haurà:

- analitzat les parts de la demostració;
- construït les figures necessàries;
- comprovat les seves propietats fonamentals;
- demostrat el teorema, fent servir aquestes propietats.

Tot i que aquest procés ha estat dirigit, i per tant hi ha poques conjectures, l'alumnat no ha estat passiu mirant l'animació i ha hagut d'intervenir per a la comprensió de la demostració.

Activitats directes i recíproques

En tota construcció de coneixement s'ha d'insistir que els enllaços conceptuals s'hagin relacionat en més d'un sentit. Les activitats anteriors estan pensades per analitzar una demostració que ja estava feta i acabada. L'objectiu era la seva comprensió fent servir les propietats geomètriques necessàries. Ara plantejo un pas més: comprovar i, en alguns casos, demostrar propietats amb activitats directes i recíproques.

La seqüència d'activitats que proposo està basada en una recerca feta per Víctor Larios Osorio a Mèxic el 2006 i que jo he adaptat per al nostre alumnat. Es tracta d'estudiar la relació que hi ha entre un polígon (aquí només ho presento per a triangles i quadrilàters, però es podria fer també amb polígons amb més costats) i el que es construeix amb els punts mitjans dels costats. En el cas dels quadrilàters, estarem estudiant el teorema de Varignon. Però la part més especial d'aquestes activitats és que n'hi haurà de directes i de recíproques. Així doncs, l'alumnat haurà de fer servir el GeoGebra per:

Construir els polígons, observar i comprovar* propietats geomètriques de paral·lelisme	I després →	Construir la figura original a partir de les propietats observades

* Segons el nivell de l'alumnat es podrà arribar a les demostracions o no.

Propietat del triangle

Comencem per una propietat senzilla:

- Construeix un triangle qualsevol.
- Troba els punts mitjans dels seus costats.
- Construeix el triangle que tingui per vèrtexs aquests punts mitjans.

En aquesta primera part, l'alumnat ha construït la figura.

- Desplaça els vèrtexs del triangle gran i observa com varia el triangle interior.
- Escriu totes les propietats que observis que relacionin els costats del triangle interior amb els de l'exterior.
- Comprova-les.

Fent servir els arrossegaments dels vèrtexs es poden començar a fer conjectures. Ens interessa que es fixin en la propietat del paral·lelisme dels costats. Podem fer preguntes que els condueixin cap a l'observació.

- Observes algun paral·lelisme entre els costats del triangle interior i els de l'exterior?
- Descriu amb detall el que observes.
- Creus que es complirà sempre? Per què?

Com ho comproven? Hi ha diferents possibilitats, però una que és prou convincent és definir una paral·lela que passi per *F* i comprovar que passa sempre per *D*, facin el moviment que facin.

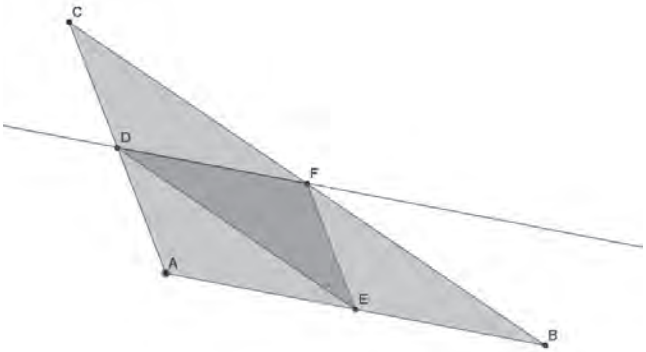

Figura 23

Es pot repetir el procediment amb els altres dos costats interiors.

Aquí cal que s'escrigui molt clarament quina propietat s'ha après, perquè la faran servir de seguida.

Ús de la propietat apresa

A continuació, la construcció recíproca.

- Construeix un triangle qualsevol.
- Construeix un altre triangle de manera que els vèrtexs del primer siguin els punts mitjans del segon.

En aquesta activitat hauran d'utilitzar la propietat apresa en l'activitat anterior com a hipòtesi per a la construcció.

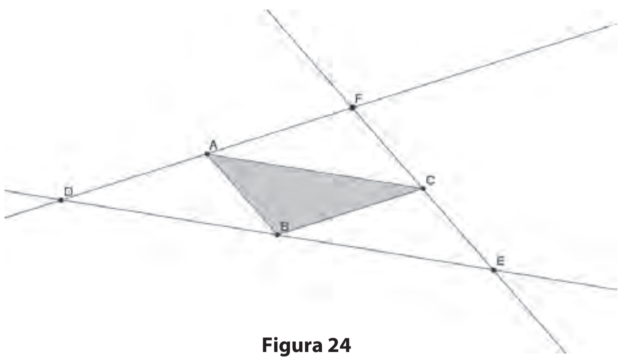

Figura 24

- Comprova que efectivament el vèrtexs del triangle inicial són els punts mitjans dels costats del nou triangle.
- Arrossega els vèrtexs i observa. Es complirà sempre? Per què?

Aquesta comprovació es pot fer dibuixant una circumferència de centre A, per exemple, que passi pels vèrtexs corresponents del triangle gran.

Propietat dels quadrilàters

A continuació plantegem una situació similar per als quadrilàters. Arribarem, doncs, al teorema de Varignon.

- Construeix un quadrilàter qualsevol.
- Troba els punts mitjans dels seus costats.
- Construeix el quadrilàter que tingui per vèrtexs aquests punts mitjans.
- Arrossega els vèrtexs del quadrilàter extern i observa com es modifica la forma del quadrilàter intern.
- Explica en què s'assemblen tots els quadrilàters interns.
- Es complirà sempre?
- Comprova aquesta propietat.

En aquest cas, per a la comprovació de la propietat que tots els quadrilàters interns sempre són paral·lelograms s'hauria d'aconseguir que apliquessin la propietat apresa de l'activitat dels triangles. Ja podem parlar de *demostració*.

- Demostra que els costats oposats del quadrilàter anterior sempre són paral·lels.

  Indicació: dibuixa les diagonals del quadrilàter exterior i aplica la propietat de l'activitat anterior.

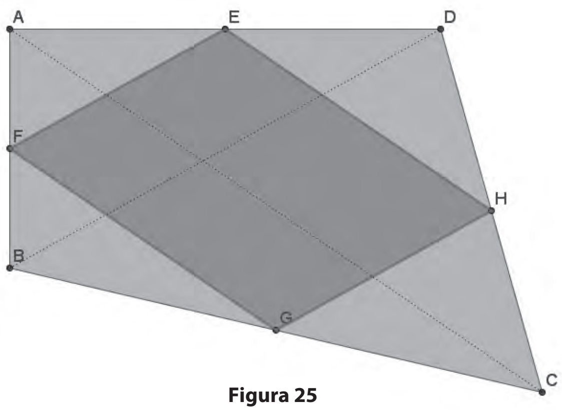

Figura 25

- Aquesta propietat es coneix com a teorema de Varignon.

Aquesta serà una vertadera demostració, perquè s'aplicarà una propietat anterior. En canvi, la demostració rigorosa de la propietat del triangle dependrà del nivell de l'alumnat.

Construcció recíproca a partir del teorema de Varignon

Com en el cas anterior, aquí interessa que facin la construcció recíproca.

- Construeix un paral·lelogram qualsevol.
- Construeix un altre quadrilàter de manera que els vèrtexs del primer siguin els punts mitjans del segon.

Segurament, aquesta és la construcció més difícil de tota la seqüència. Segons el nivell i la realitat de l'aula, s'haurien de donar algunes indicacions que jo ara no fixo i deixo a la voluntat dels usuaris.

Aquest podria ser un camí per arribar a la construcció:

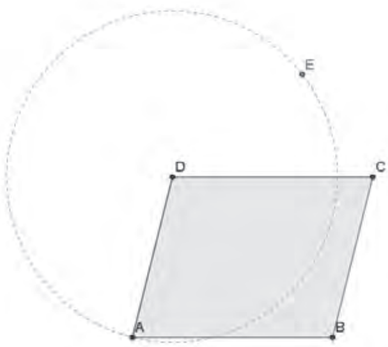

Figura 26. Dibuixeu una circumferència de centre *D* i radi *DA*. Dibuixeu un punt qualsevol *E* a sobre de la circumferència.

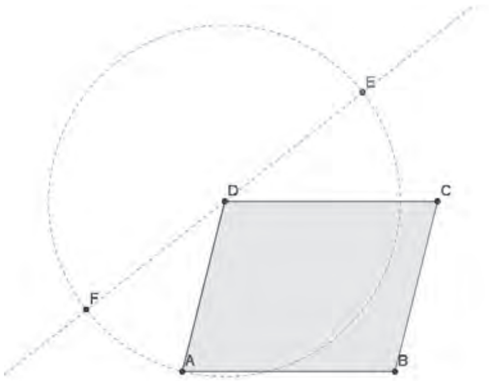

Figura 27. Dibuixeu la recta que passa per *D* i *E*. Dibuixeu el punt d'intersecció *F*.

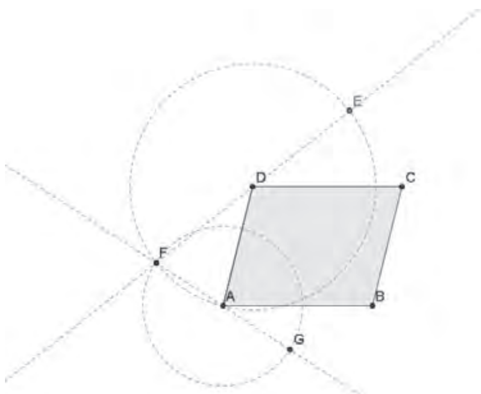

Figura 28. Repetiu el procés anterior amb una circumferència de centre *A* i radi *AF*.

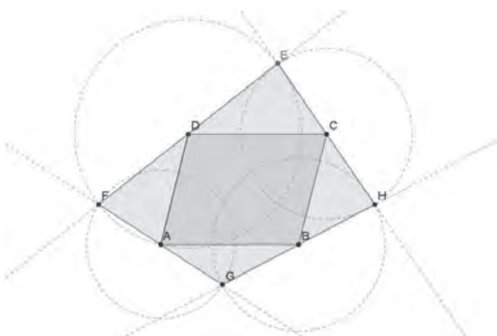

Figura 29. Seguiu el procés fins a arribar a completar el quadrilàter.

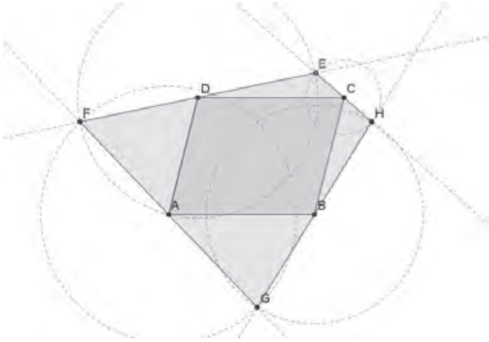

Figura 30. 'Es important veure que hi ha infinites solucions que depenen del lloc on està situat el punt *E*.

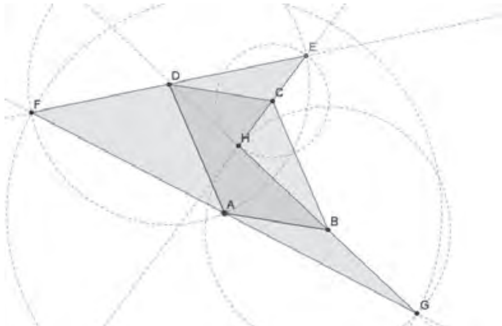

Figura 31. Si modifiqueu el paral·lelogram inicial hi apareixen quadrilàters còncaus que també compleixen el teorema de Varignon.

Relació entre el tipus de quadrilàters interior i exterior

A continuació, plantegem preguntes com aquesta:

- Com ha de ser el polígon exterior perquè l'interior sigui un quadrat? I perquè sigui un rombe?

En aquest cas, també es farà ús del GeoGebra per arrossegar els vèrtexs dels polígons inicials, tant en la construcció directa com en la recíproca. A continuació especificaré els diferents tipus d'arrossegaments que l'alumnat farà servir, utilitzant la nomenclatura de l'article d'Arzarello *et al.* (2002). Si ens fixem en la primera pregunta, les fases del procés són:

- Exploració. Faran primer arrossegaments improvisats (*Wandering dragging*), per adonar-se que hi ha solució i, després, arrossegaments més guiats amb l'objectiu de formar, en algun moment, el quadrat o el rombe interior (*Guided dragging*).
- Elaboració d'una conjectura. Una vegada han aconseguit que el polígon interior sigui un quadrat, els arrossegaments voldran mantenir aquesta figura a l'interior (*Dommy locus dragging*). És com si es desplacessin sobre un lloc geomètric invisible.
- Comprovació. Faran servir, a més dels arrossegaments de test (*Draggig test*), altres eines del GeoGebra, com la mesura d'angles i de costats per comprovar que la conjectura es compleix.

Propietats dels centres d'un triangle

Un altre tema en què es pot treballar amb el GeoGebra per estudiar propietats geomètriques és el de la construcció dels quatre primers centres d'un triangle. Em refereixo al circumcentre, l'incentre, l'ortocentre i el baricentre.

No entro en els detalls de la seva construcció amb el programa, perquè és ben coneguda. Una vegada construïts és ben important que l'alumnat en dedueixi les propietats i construeixi la recta d'Euler i que comprovi per quins centres passa sempre.

Comentaré ara una d'aquestes propietats que em sembla molt interessant, perquè per a la seva justificació es pot fer servir una de les característiques més importants del GeoGebra: la interconnexió entre les diferents parts de les matemàtiques i, en particular, entre la geometria i l'anàlisi.

Presentem a l'alumnat una construcció en la qual apareixen els quatre punts notables que ja han treballat anteriorment, de manera que un dels vèrtexs (A) del triangle està situat a sobre d'una recta paral·lela al costat contrari.

- Arrossega el vèrtex *A* sobre la recta i identifica cadascun dels quatre centres que s'aniran movent. Si vols, pots activar i desactivar el traç dels punts.

En aquesta primera activitat, l'alumnat haurà de posar en pràctica les propietats apreses que caracteritzen cada centre. Amb el traç activat faran una seqüència com aquesta:

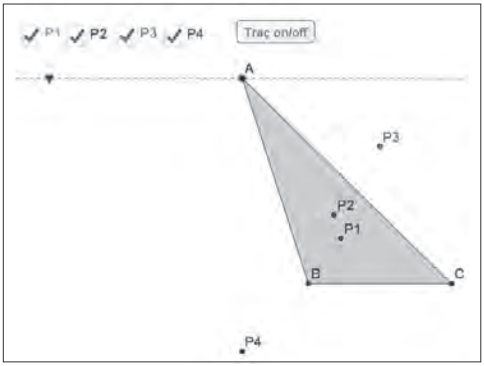

Figura 32

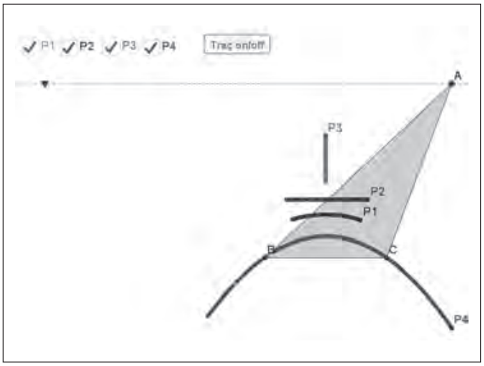

Figura 33

Les trajectòries de la figura 32 representen els llocs geomètrics generats per cada centre quan desplacem el vèrtex A per sobre la recta.

Una vegada l'alumnat ha identificat els quatre centres, dibuixant fins i tot la recta d'Euler per assegurar-se'n, ens fixarem en l'ortocentre (P4) i la seva trajectòria.

- Fixa't en la corba que dibuixa l'ortocentre. La reconeixes? Com s'anomenen aquests tipus de corbes?
- Modifica les mides del triangle i torna a desplaçar el vèrtex *A* per sobre la recta. Quina corba apareix? En què es diferència de l'anterior?
- Continua fent proves i explica si hi ha alguna relació entre aquesta corba i les mides del triangle.

Aquestes són unes activitats en què l'alumnat podrà elaborar alguna conjectura sobre la relació entre l'altura del triangle, que es manté constant en arrossegar A, i la forma de la paràbola. Aquestes conjectures podrien començar a entrar en el camp de l'anàlisi de funcions.

Es presenta aquest *applet* (figura 33) on es poden modificar les mides del triangle i es pot dibuixar la paràbola que descriu l'ortocentre per a cada triangle. Amb el punt lliscant *A*,

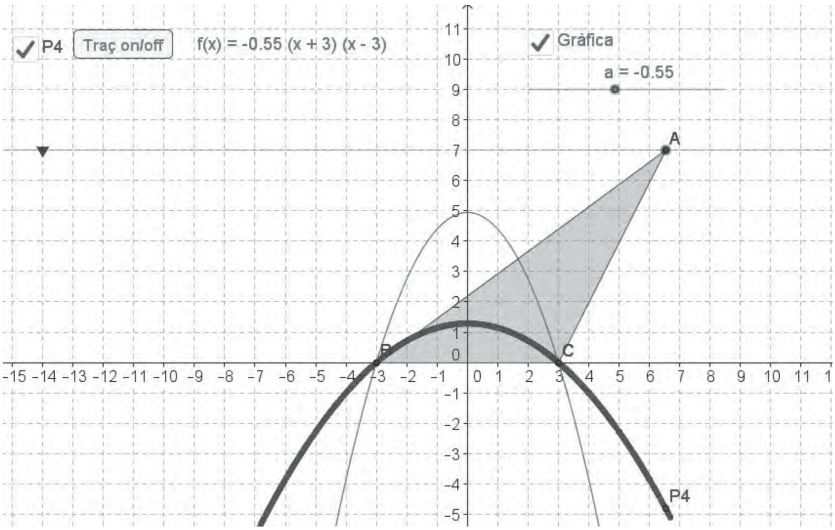

Figura 34

l'alumnat pot ajustar la gràfica de la paràbola a la corba de l'ortocentre i conjecturar de què depèn l'expressió de la funció.

En aquest cas, la demostració de la propietat es pot deduir d'una generalització del teorema de l'altura. Amb aquest *applet* es pot veure que la segona coordenada de l'ortocentre D depèn de l'altura del triangle.

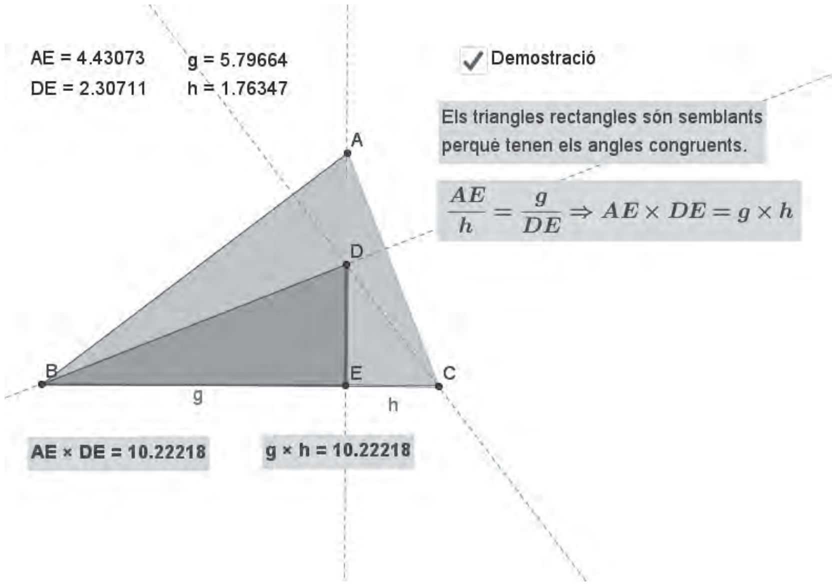

Figura 35

I les demostracions, quan?

En totes les activitats proposades i descrites fins ara, l'alumnat, sobretot, ha de construir, conjecturar i comprovar. Les demostracions que he presentat, o bé són guiades (teorema de Pitàgores), o bé són parcials (de la propietat dels triangles, no demostrada, s'arriba a la demostració del teorema de Varignon). La part de les demostracions és la més elevada, per al nostre alumnat, en el sentit dels nivells de Van Hiele que he exposat al principi. L'alumnat ha d'estar preparat i haver assolit els altres nivells anteriors, que, sens dubte, amb les construccions, conjectures i comprovacions que li permet el GeoGebra pot assolir.

A més, el concepte de demostració no és el mateix en tots els ambients en què el citem. Em referiré ara a l'article de Godino i Recio (2001) en el qual s'analitzen els significats de la idea de demostració en diversos contextos institucionals que resumeixo a continuació.

- Lògica i fonaments de la matemàtica. En aquest entorn es parteix d'un sistema axiomàtic amb afirmacions sense demostrar que són la base de tots els altres enunciats que es dedueixen mitjançant un conjunt de regles de transformació.
- Matemàtica professional actual. Una part de les demostracions matemàtiques professionals en l'actualitat ja han superat el simplisme de la lògica deductiva clàssica i s'han convertit en deduccions no sempre formals, reforçades amb l'ús d'ordinadors. Alguns autors (Lakatos entre d'altres) veuen que el concepte de demostració té característiques diferents de les clàssiques i arriben a afirmar que la veracitat d'algunes proposicions matemàtiques avançades no queda plenament garantida.
- Ciències experimentals. En aquest context, la demostració es basa principalment en pràctiques empiricodeductives i analògiques. Aquí l'experimentació és fonamental per deduir una teoria.
- Vida quotidiana. Les argumentacions que fem servir per a convèncer algú d'una afirmació són informals. En aquest tipus de raonament, l'analogia ocupa un paper molt important. Aquest raonament informal es fa servir en tots els dominis del coneixement, fins i tot en les matemàtiques.
- Classes de matemàtiques. En les classes de matemàtiques de primària i de secundària poden predominar les pràctiques augmentatives no analítiques, extrapolades d'altres contextos com la vida quotidiana i les ciències experimentals.

Amb tot, aquells autors conclouen que cal tenir en compte que no hi ha un sol concepte de demostració i que l'alumnat, que està present en diversos contextos, inicialment farà servir esquemes argumentatius diferents. Afirmen que l'argumentació analítica ha de quedar integrada com una fase més del procés matemàtic, però no l'única. El concepte de demostració ha d'anar evolucionant en el curs de l'escolaritat i aquest procés necessita temps i contextos adients.

És en aquest sentit que la geometria dinàmica i el GeoGebra en particular poden jugar un paper fonamental. Les construccions, conjectures i comprovacions poden ser un bon punt de partida per a raonaments més formals, ja que l'alumnat estarà segur que va per bon camí i que probablement no intenta demostrar una propietat falsa. L'autoconvenciment és bàsic per convèncer els altres.

Les demostracions en les últimes versions del GeoGebra

Una de les eines que ha tingut sempre el GeoGebra, des de la primera versió que va sortir durant el curs 2001-2002, va ser l'anomenada «Relació entre objectes» ().

Figura 36

A la figura 36, en què es reprodueix la versió 1.0, podeu veure que ens indica que les rectes *s* i *q*, que s'han construït aplicant el teorema de Varignon, són paral·leles. Per tant, amb aquesta eina, determinades propietats quedaven «demostrades» per l'autoritat del programa, que les comprovava de manera numèrica Aquest no podia ser un argument definitiu per a una demostració, però de cara a l'alumnat sí que servia per a confirmar, en el context que he comentat abans, algunes conjectures. Tot i això, es produïen diversos «falsos positius», a causa dels errors de precisió dels càlculs efectuats.

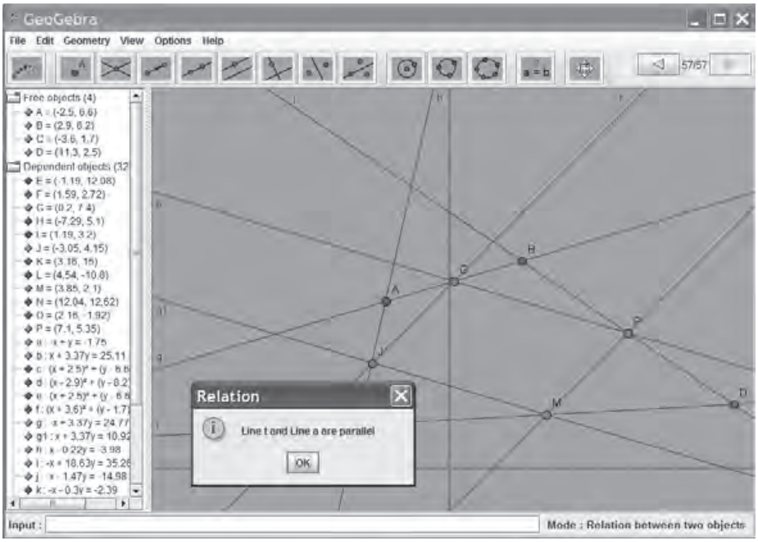

Figura 37

En el curs 2014-2015 ha sortit la versió 5.0 del programa, en la qual, entre moltes altres incorporacions importants, com el treball en 3D, s'ha millorat força aquesta eina. Això comença a ser el fruït d'un projecte anomenat Automated Theorem Proving, que pretén la demostració automàtica de teoremes de geometria. En aquest projecte hi treballen científics tan importants com Francisco Botana (Universitat de Vigo), Markus Hohenwarter (Universitat Johannes Kepler de Linz i creador del GeoGebra), Predrag Janicic (Universitat de Belgrad), Zoltán Kovács (Universitat Johannes Kepler de Linz), Ivan Petrovic (Universitat de Belgrad), Tomás Recio (Universitat de Cantàbria) i Simon Weitzhofer (Universitat Johannes Kepler de Linz). A la versió 5.0 ja s'han incorporat alguns dels algoritmes que fan que la demostració de determinades propietats i teoremes ja sigui prou fiable.

En aquesta versió, per exemple, si dibuixem un quadrilàter amb el paral·lelogram interior complint el teorema de Varignon, triem l'eina «Relació entre dos objectes» i seleccionem dos costats oposats de la figura interior, ens apareixen inicialment aquests missatges:

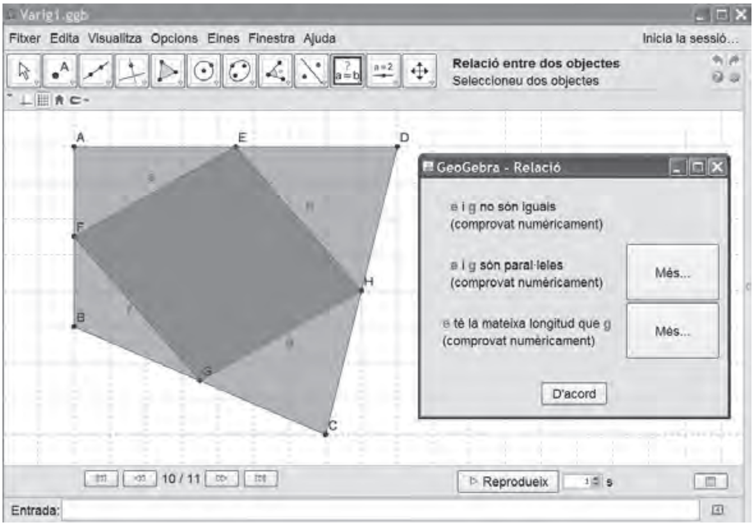

Figura 38

Com podeu observar, les afirmacions estan comprovades de manera numèrica, segurament amb la metodologia tradicional. En canvi, si premem els botons de «Més...», apareixen els missatges següents:

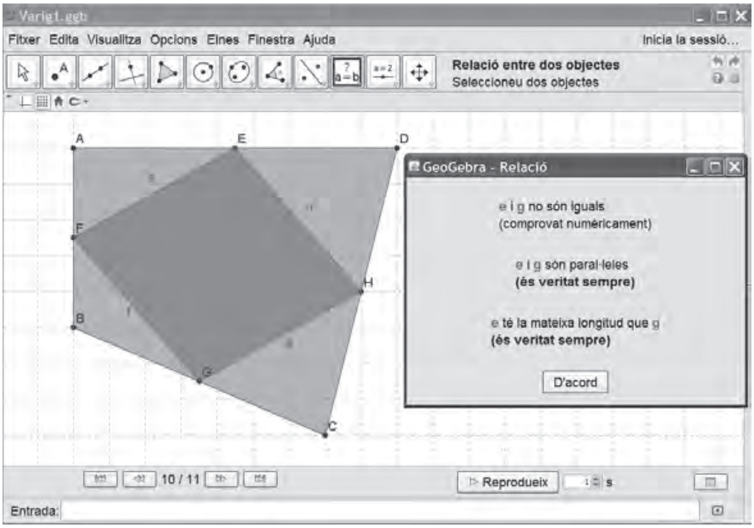

Figura 39

Les afirmacions que la propietat citada *és sempre veritat* ja corresponen a l'aplicació del nou mètode de demostració automàtica. Això significa que podem moure la figura i que sempre es complirà la propietat que s'està comprovant.

Quan aquest mètode estigui totalment implementat en properes versions, crec que serà tot un repte veure com l'apliquem a les nostres classes si volem mantenir el «suspens» de la necessitat de la demostració formal per a aquell alumnat que pugui arribar-hi. Jo penso que, de cara a l'alumnat mitjà, no suposarà cap canvi de paradigma, però que els qui vulguin arribar més enllà de la comprovació automàtica estaran motivats per esbrinar per què *és sempre certa* una determinada propietat.

Consideracions finals

És prou evident que l'aparició de programes com el GeoGebra fa que l'ensenyament i l'aprenentatge de la geometria hagin canviat molt. La possibilitat de l'arrossegament d'elements per observar quines propietats són estables i quines no ha fet que dels casos particulars del dibuix de figures en llapis i paper s'hagi passat a la generalització de tipus de figures. Aquí, doncs, l'assoliment de la classificació de figures en el sentit del nivell 2 de Van Hiele es pot veure molt beneficiat.

No obstant això, cal tenir present que no podem cremar etapes a tota velocitat, perquè el nostre alumnat necessita temps per reflexionar i actuar. En aquest sentit, no és suficient la presentació d'unes animacions molt convincents per a la resolució de determinades situacions. L'alumnat ha de construir, conjecturar i comprovar les seves conjectures, cosa que el dinamisme del GeoGebra li permet, ajustant-se a unes bones activitats triades pel professorat.

El cas de les demostracions mereix una atenció especial. Hem vist que el concepte varia segons el context; el que pot ser una bona demostració, en el sentit de certesa en un context, pot no ser-ho en un altre. El que sembla clar és que no podem de cap manera reduir cap part de les matemàtiques a un conjunt de proposicions, teoremes i demostracions. Això desvirtua el sentit real de les diferents parts i tira enrere molt alumnat.

La geometria tractada amb el GeoGebra pot tenir un aspecte lúdic de recerca que cal potenciar. La feina de mestres i professors és fonamental per aconseguir les activitats i el clima que afavoreixi aquesta recerca constant. En definitiva, deixem que l'alumnat gaudeixi de la geometria i que en l'entorn de la classe quedi convençut de la certesa de les seves comprovacions. I que tot el camí que el portarà a les portes de les demostracions finals sigui ric de coneixement i de creativitat.

Referències

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM*, 34 (3), 66-72.

Bujosa, P. (2014). http://geogebra.pepbujosa.info/geometriaplana/Pitag.htm

Fouz, F. (2006). Test geométrico aplicando el modelo de Van Hiele. *Sigma*, 28, 33-56.

Godino, J. D., Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (3), 405-414.

Larios Osorio, V. (2006). La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. *Relime*, 9 (3), 361-382.

Rynhart, P. (2012). http://proactiveplay.com/the-van-hieles-model-of-geometric-thinking

Sada, M. (2009). http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/pitagoras.htm

Zoltán, K. (2014). The portafolio prover in GeoGebra 5. *ADG 2014*, 191-206.

Zoltán, K., Recio, T., Weitzhofer, S. (2012). Implementing theorem proving in GeoGebra by exact check of a statement in a bounded number of test cases. Dins J. Rafael Sendra Pons i C. Villarino Cabellos (ed.). *Libro de Resúmenes del XIII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones* (EACA 2012) (p. 123-126). Alcalá de Henares: Universidad de Alcalá.