

Epícliques, hipocícloides i engranatges

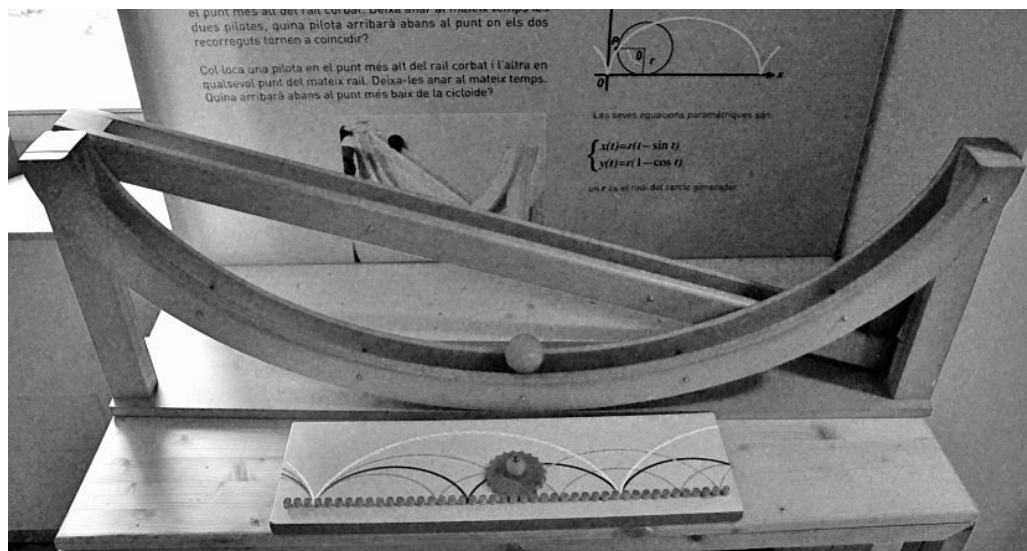
Josep Rey, Manuel Udina

Entre els mòduls que es proposen en l'exposició «Experiències matemàtiques» n'hi ha que són més pròxims a temàtiques del currículum de l'ensenyament obligatori i d'altres que, tot i no ser-ho tant, permeten fer referència a aspectes que poden ser d'interès transversal. Les corbes definides a partir de moviments, com a traces d'algun punt de l'objecte mòbil, tenen una força emotiva que pot ajudar a la reflexió sobre aspectes matemàtics i que facilita la conversa sobre alguns punts d'interès.

Els mòduls d'engranatges són molt suggerents, perquè permeten visualitzar una sèrie de corbes i no sols visualitzar-les, sinó també «seguir-les amb el moviment de la mà» tot experimentant com es generen. Partim d'una circumferència fixa (circumferència base) formada per piús que permetran engranar-hi circumferències mòbils (rodetes) per fer voltes per fora (tot descrivint epícliques) o per l'interior (generant hipocícloides). En el cas de les epícliques, es pot comprovar que el gest que fem quan les resseguim és «natural», perquè els dos moviments (de gir i de rotació) tenen el mateix sentit. En el cas de les hipocícloides, quan movem la rodeta es produeix algun moment de dubte, perquè els dos moviments van en sentit oposat. En els dos casos, l'experiència ens ajudarà a entendre que la variació de l'angle d'un radi de la circumferència mòbil és la suma de les variacions dels angles de rotació i de gir.

► **Cicloide.** Si fem rodar (sense lliscar) una circumferència al llarg d'una línia recta qualsevol punt de la circumferència descriu una cicloide. Presentem un mòdul que permet visualitzar diverses cicloides amb rodes dentades de diferents radis tot situant-les en una pista-engranatge amb piús que permet el moviment «sense lliscar» de les rodetes.

El mòdul es presenta al costat d'una cicloide en forma de *tobogan* al costat d'una pista recta per on poden baixar dues boles i on és fàcil explicar i experimentar algunes propietats de la cicloide: és braquistòcrona (corba de recorregut més ràpid entre dos punts) i tautòcrona (el temps necessari per arribar al punt més baix no depèn de l'alçada del punt des d'on es deixa anar). Tot i la seva senzillesa, el mòdul provoca un impacte fort en el visitant, perquè coneix i pot parlar de les propietats tot experimentant-les fins a cert punt. D'altra banda, permet fer referència a aspectes històrics i a l'aportació de Galileu, Newton, els germans Bernoulli, etc.



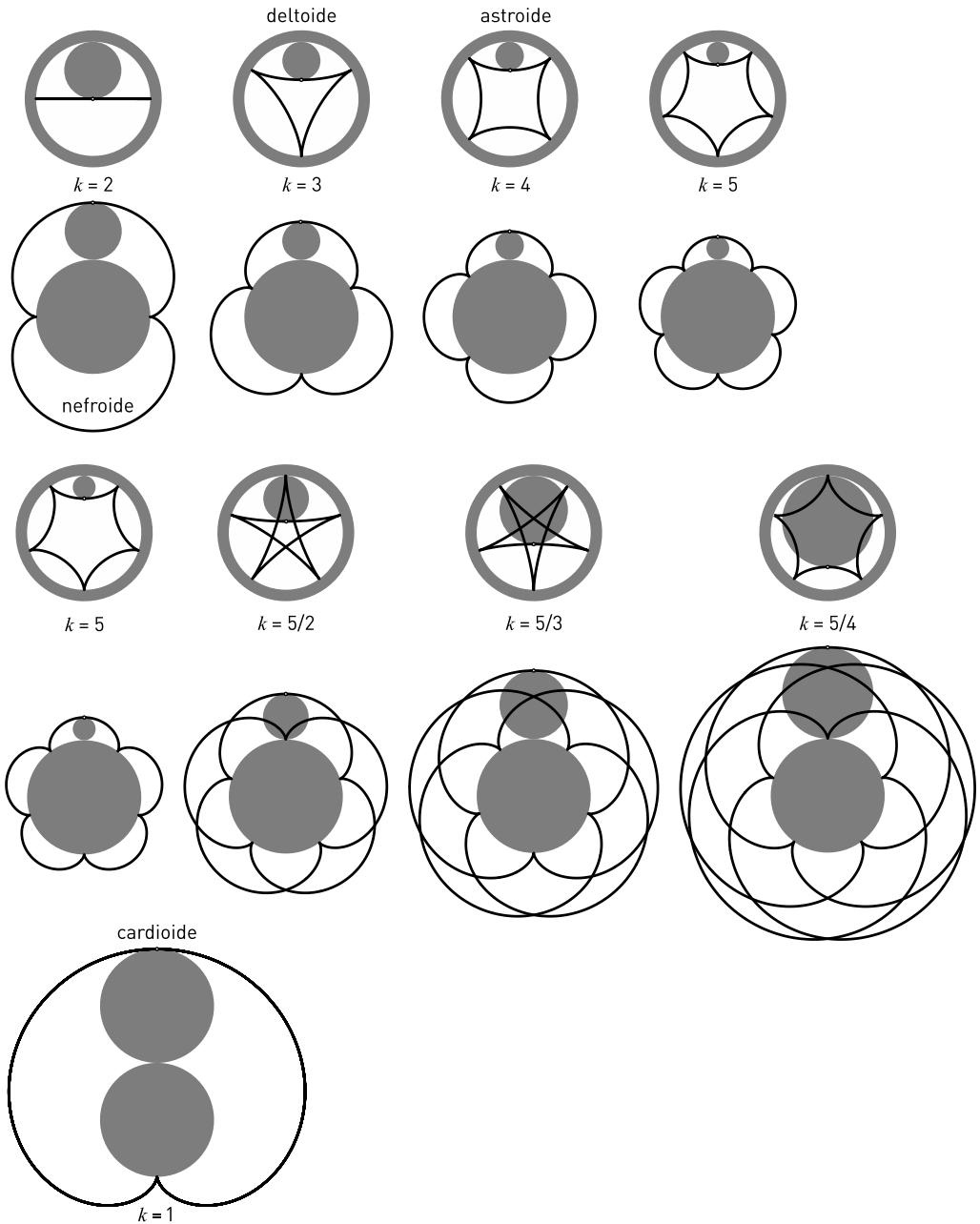
Cicloide.

► **Hipocicloides i epicloides.** Quan fem rodar, sense lliscar, circumferències de radi més petit per dins (o per fora) d'una circumferència fixa més gran, qualsevol punt de la circumferència interior descriu una hipocicloide (o una epicloide). En el mòdul hem optat per assenyalar la traça d'un punt i el visitant pot comprovar com, tot fent el moviment de gir al voltant de la circumferència fixa (i de rotació de la petita), el punt assenyalat va seguint la traça. Segons la relació entre els radis de les dues circumferències, les traces produeixen diferents tipus de corbes. Destaquem entre les hipocicloides, la deltoide i l'astroide (quan el radi de la circumferència mòbil és $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{4}$ del radi de la fixa), i entre les epicloides, la cardioide i la nefroide (radi de la circumferència mòbil $\frac{1}{2}$ o igual que el de la fixa).

És clar que el nombre de bagues de les corbes generades depèn de la relació entre els radis en joc. El mòdul presenta relacions senzilles, perquè permeten entendre qüestions de divisibilitat. De fet, hi ha un cert paral·lelisme entre els polígons estrellats i les hipocicloides (en el sentit que tenen el mateix nombre de vèrtexs i canvien els costats per arcs d'hipocicloide).

En la realització física del mòdul, la circumferència fixa es configura partir dels pius de manera que les rodetes funcionen tant per dins com per fora tot permetent en la mateixa base l'estudi de les epi i les hipocicloides. A més, la configuració amb el pius facilita una certa mesura del perímetre de la circumferència, de la mateixa manera que el nombre de dents de les rodetes s'adiu amb el seu perímetre. Es disposa de dues bases amb circumferències fixes de 60 i 40 pius, i s'hi han assenyalat les traces que segueixen diverses rodetes que es manipulen amb el suport situat al centre del color de la traça a seguir.

Una propietat a destacar en les hipocicloides i que és fàcil de comprovar experimentalment en aquest mòdul, en disposar de les traces dibuixades, és que per rodetes complementàries, és a dir, rodetes tals que la suma dels radis sigui el radi de la circumferència base, les traces coincideixen (tot i que són descrites en sentits contraris). Això vol dir, per exemple, que l'astroide pot ser generada tant per una circumferència de radi $\frac{1}{4}$ de la circumferència base com per la de radi $\frac{3}{4}$ de la mateixa circumferència.



Hipocicloides i epicloides.

Un altre element de sorpresa que incorpora el mòdul és el fet que, si fem girar a la vegada dues rodets per l'interior i per l'exterior de la circumferència fixa, el moviment de rotació de l'exterior és molt més ràpid que el de la interior. És un fenomen que s'explica pel fet que la variació de l'angle en la circumferència mòbil és la suma de les variacions de l'angle de gir i de rotació i, en el cas de les epicloides, els dos angles (de gir i de rotació) tenen el mateix sentit, i en les hipocicloides, són de sentit contrari.

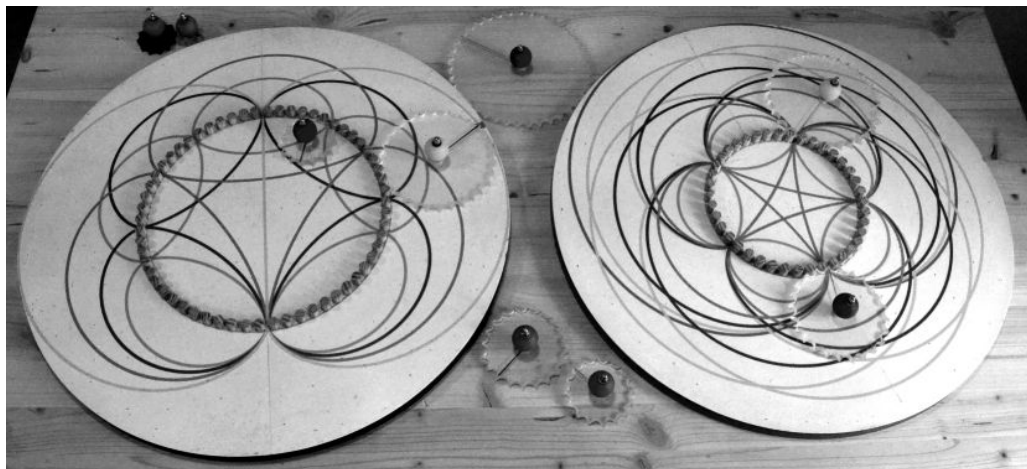


Foto del mòdul.

► **Pentàgon atrapat.** Ens basem en el fet que per a una hipocicloide amb relació dels radis 2:1 la trajectòria de qualsevol punt de la circumferència interior és una línia recta. Si marquem cinc punts de la circumferència mòbil interior que formen un pentàgon regular, podem veure com aquest pentàgon gira per dins de la circumferència de manera que les trajectòries dels vèrtexs són cinc diàmetres de la circumferència gran (el fet que el rodament sigui sense lliscament es realitza físicament amb els engranatges). En el mòdul que presenta aquest fenomen, la circumferència gran està formada per un engranatge amb cinquanta dents i la interior, de diàmetre la meitat, té vint-i-cinc dents. Per estabilitzar el moviment s'ha fet una rasa per on es mou el centre de la circumferència mòbil (que disposa d'un piú que encaixa en la rasa).

Ara podem dualitzar en cert sentit el mòdul: si obliguem els cinc vèrtexs del pentàgon a mantenir-se en els cinc diàmetres citats (ara les rases de la base corresponen a aquests segments, i el pentàgon mòbil té uns piús que el forçaran a mantenir-s'hi), el moviment del pentàgon és el mateix que abans: el pentàgon va donant voltes per l'interior de la circumferència com si estigués lligat als engranatges, però el que abans era trajectòria ara és lligam i viceversa. Aquí ja no cal mostrar la circumferència fixa i l'impacte del moviment permet fer-se preguntes i causa un efecte sorprenent.

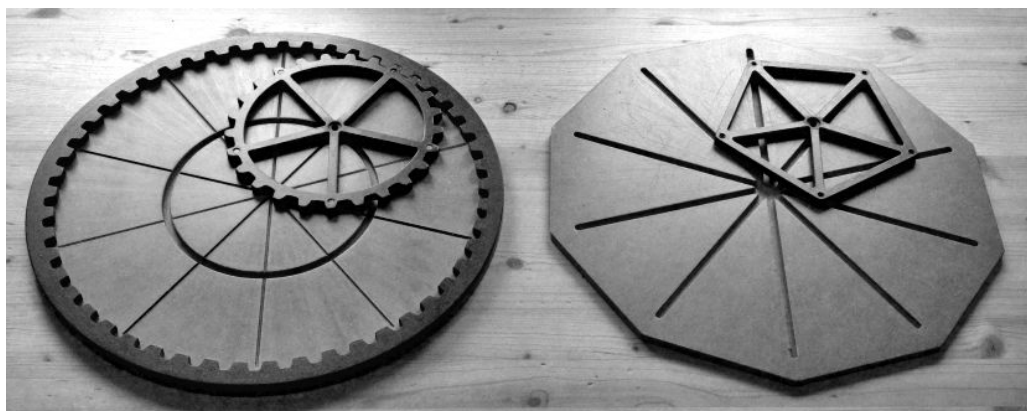


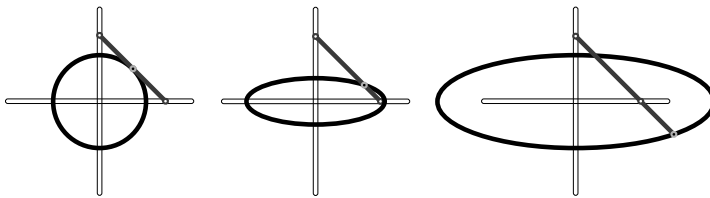
Foto del pentàgon atrapat.

► **El·lipsògrafs.** En l'apartat anterior hem considerat una hipocicloide amb la relació dels radis 2:1 i hem observat que la trajectòria de qualsevol punt de la circumferència interior és un segment de línia recta. Ara observem que les trajectòries d'altres punts d'aquesta circumferència o lligats a ella (les anomenades hipotrocoides) són el·lipses.



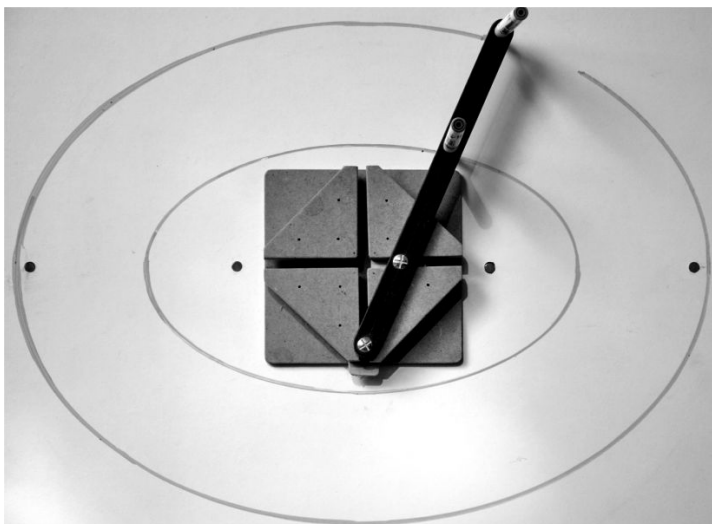
Dibuixos el·lipses hipotrocoides.

Així com en els pentàgons atrapats consideràvem cinc punts de la circumferència interior, ara només en considerem dos de diametralment oposats que delimiten un segment i que lliguem a unes rases que es corresponen amb els seus trajectes. Ens oblidem de les circumferències i gràcies a aquests lligams obtenim el mateix efecte. Els extrems del segment estan forçats a seguir rectes, el punt mig segueix una circumferència (el·lipse degenerada) i tots els altres punts del segment o de la seva prolongació segueixen el·lipses.



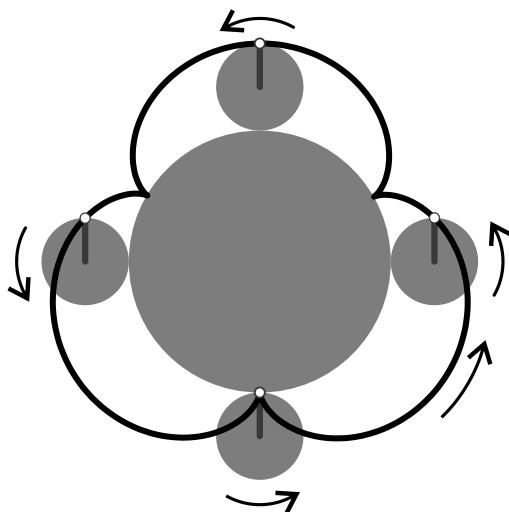
El·lipsògraf.

Aquest tipus d'el·lipsògraf (atribuït a Arquímedes) ha estat molt utilitzat. Es podria anomenar *el·lipsògraf del fuster*, ja que en aquest ofici l'utilitzen tot posant una fresadora manual al lloc del traç que, en lloc de dibuixar, talla.



El·lipsògraf MMACA.

► **Moviment terra-sol.** Una altra aplicació d'aquest mòdul és que permet fer una analogia amb el moviment terra-sol en què hi ha un moviment de gir i un moviment de rotació. En un gir complet (corresponent a un «any»), el nombre de punts en què la rodeta mira cap al centre de la circumferència fixa fins que torna a la posició inicial correspondria al «nombre de dies de l'any» (per exemple, si utilitzem la rodeta de vint dents en la base de seixanta pius, diríem que *un any té tres dies*). Però si ens fixem en quantes vegades el radi assenyalat mira en la direcció inicial, veurem que són quatre (que correspondrien als «dies sideris»). La senzillesa del material físic farà que aquest fenomen ens permeti entendre la resposta a la pregunta «quantas voltes fa la terra sobre ella mateixa en un any?». En aquest sentit, el mòdul serveix per a fer una analogia de la diferència entre dia solar i dia sideri i permet veure com en un any de n dies el satèl·lit haurà fet $n+1$ rotacions (*dies sideris*). (Si s'objectés que en el moviment dels astres no hi ha engranatges ni «no-lliscament», podríem respondre que les lleis de Newton són les que creen les restriccions al moviment, i que en tot cas, l'analogia és font de coneixement).



Epicloides siderals.

Una de les satisfaccions que hem tingut és comprovar com, moltes vegades després d'haver comentat amb algun visitant algun dels aspectes esmentats, sovint veiem que al cap d'una estona qui abans ens escoltava ara fa les explicacions a un tercer. És el que en diem «s'encomanen les ganes d'explicar». En definitiva, el que pretenem amb aquest mòdul és atraure l'interès del visitant que pot aproximar-s'hi a diferents nivells: simplement gaudint de la regularitat d'un moviment complex, intentant anticipar quines corbes corresponen a quines rodets, buscant les relacions de divisibilitat implícites, etc. En tot cas, és un bon exemple de com es pot induir els visitants a parlar de i sobre matemàtiques.

Notes

1. Un dels *applets* cinderella presentat en l'exposició [imaginary.org](http://www.imaginary.org/program/cinderella-applets) (<http://www.imaginary.org/program/cinderella-applets>) en què es presenta un pentàgon que gira tot mantenint els vèrtexs en uns segments (que són diàmetres de la circumferència per on gira el pentàgon) ens va suggerir la possibilitat de realitzar físicament aquest fenomen.

2. També es podrien estudiar trajectòries de punts lligats a la circumferència mòbil. De fet, el joc molt conegut *spirograph* permet dibuixar moltes d'aquestes corbes i fer figures que tenen un atractiu que han sabut explotar els creadors del joc. Les corbes que es produeixen es diuen epi i hipotrocoides, perquè pel disseny del joc no es poden utilitzar punts del perímetre de les rodetes.
3. Hi ha molts programes que permeten generar digitalment aquest tipus de corbes. En l'apartat «Descàrregues» de la web del MMACA en podeu trobar alguns proposats per Josep Rey.

