pensar

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

La diversitat d'activitats per fer gaudir de les matemàtiques als nostres alumnes que trobem avui al nostre entorn no para de créixer. Als ja coneguts, i quasi podríem dir tradicionals, concursos del Cangur, Fem matemàtiques, Problemes a l'esprint, l'Olimpíada matemàtica per petits i grans, i els concursos de dibuixos i de fotografia matemàtica, per citar els primers que em vénen al cap, juntament amb altres activitats extraescolars com Estalmat, que ja ha superat les deu promocions, o el més recent Anem per més mates, podem afegir-hi la recent estrenada Copa Cangur, un divertit i interessant concurs que s'ha celebrat enguany per primera vegada a casa nostra. Tos ells, malgrat la seva diversitat, tenen un punt en comú i és que ens proporcionen una inacabable col·lecció de problemes interessants per a diferents nivells i de dificultat molt diversa.

L'article d'avui és el meu petit homenatge a tots aquells que amb el vostre enginy, any rere any, aneu trobant, ideant i proposant problemes matemàtics amb la finalitat de fer gaudir els nostres alumnes del repte que suposa resoldre un problema, un joc, un enigma, al temps que mostrem la varietat, tant pel que fa a la temàtica com al nivell de dificultat, de la nostra ciència.

Segur que molts de vosaltres recordeu un problema del Cangur de fa algun temps en el qual es donava un rectangle i un punt interior unit amb els diferents vèrtexs del rectangle, de manera que es determinen quatre triangles. Conegudes les àrees de tres dels triangles, es tracta de trobar el quart. Si no el recordeu, no us costarà gaire resoldre'l, per mètodes elementals.

Fa pocs dies, la Lourdes Figueiras em va proposar un problema semblant. Ara el que coneixem són tres distàncies i volem trobar la quarta.

► **Problema 1.** Tenim un rectangle i un punt interior i coneixem les distàncies d'aquest punt a tres dels vèrtex del rectangle. Trobar la distància al quart vèrtex. Coneguda aquesta, què podem dir de les longituds dels costats del rectangle?

Resoldre el problema emprant equacions és força senzill; fer-ho per mètodes geomètrics no ho és tant i és un repte considerable.

Deixem la geometria per anar als jocs d'estratègia, que ja sabeu que és una de les meves aficions. Al VII Seminari de professors de les diferents seus d'Estalmat, que s'ha celebrat a Barcelona el passat mes d'abril, i en una sessió sobre activitats relacionades amb la paritat titulada «Paridad y magia», el professor Antonio Arroyo, d'Estalmat Castilla y León, va presentar el joc següent que correspon als anomenats petits jocs d'estratègia. És un joc de tipus Nim que introdueix una idea original, i poc habitual, i que té relació amb el fet de poder convertir les fitxes d'un color en fitxes de l'altre color.

La idea de la reversibilitat de les fitxes aparegué per primera vegada a finals del segle XIX quan es va formular per primer cop el magnífic joc d'estratègia conegut amb el nom de Reversi (també s'anomena Othello i, en alguns llocs, Yang). L'enunciat del joc és el següent:

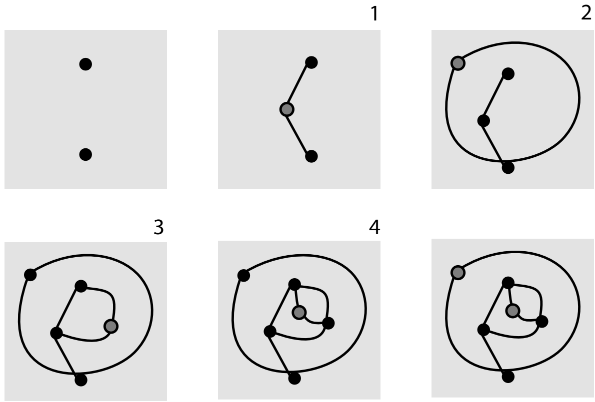
► **Problema 2.** Joc d'estratègia per a dos jugadors. Tenim 2013 fitxes reversibles (una cara blanca i l'altra negra) i en la posició inicial m fitxes mostren la cara blanca i $2013 - m$ la cara negra ($m, n > 1$). Al seu torn, un jugador pot fer una de les dues coses següents: A) retirar totes les fitxes que vulgui d'un mateix color (mínim 1). B) girar totes les fitxes que vulgui d'un color de manera que passin a ser de l'altre color. El jugador que aconsegueixi retirar l'última fitxa és el guanyador de la partida. Per a quin dels dos jugadors hi ha una estratègia guanyadora? Com ha de jugar aquest jugador per guanyar sempre? L'estratègia depèn dels valors de m i n? I del nombre total de fitxes?

Podeu trobar aquest joc, així com la resta de ponències d'aquest seminari, a l'adreça: https://sites.google.com/site/reunionestalmatcat

I ja que parlem de jocs, he retrobat un antic joc d'estratègia dels dits jocs de connexió, anomenat *Sprouts* (literalment, brots), creat per Conway i Paterson el 1967, darrere del qual hi ha un munt de matemàtiques. A vegades sorprèn que a partir d'un enunciat tan senzill com aquest s'hi amagui un problema tan complex. De fet, crec que si bé hi ha una conjectura sobre quin és el jugador que té una estratègia guanyadora segons la posició inicial, es tracta d'un problema obert, ja que aquesta conjectura encara no està demostrada.

► **Problema 3.** *Sprouts*, joc d'estratègia per a dos jugadors. Dibuixem un cert nombre de punts en un paper. Al seu torn, cada jugador uneix dos punts amb una línia (no necessàriament recta) amb les condicions següents: A) la línia no pot tallar cap altra línia ja dibuixada: B) de cada punt només poden sortir tres línies. Per completar la jugada, una vegada dibuixada la línia es marca un nou punt sobre aquesta. El jugador que no pot dibuixar una línia amb les condicions anteriors, perd la partida. És possible que una línia comenci i acabi en el mateix punt.

És interessant analitzar els casos amb pocs punts inicials (entre dos i cinc) que són els que permeten veure «coses interessants» sense complicar gaire les partides. Després de jugar una mica, es pot començar per veure que el joc és efectivament finit, després trobar quin és el màxim i el mínim nombre de jugades d'una partida i finalment intentar conjecturar qui guanya en aquests primers casos.



**Imatge 1. Una partida de *Sprouts* iniciada amb només dos punts.
Aquí guanya el primer jugador, però si el segon juga d'una manera diferent, sempre pot guanyar.**

Si el joc us agrada i en voleu saber més, la xarxa n'és plena d'informació (per exemple a: http://nrich.maths.org/2413, amb proposta per treballar-lo a classe) i també trobareu una curiosa variant (Brussels Sprouts-cols de Brussel·les) que inicialment sembla més complexa (ara en lloc de punts dibuixem creus, de manera que poden sortir quatre línies de cada punt, però aquestes estan prèviament fixades pel dibuix de les creus), però que en realitat no ho és. En efecte, podeu comprovar que en aquest cas el nombre de jugades queda determinat pel nombre inicial de creus, sense que els jugadors puguin fer res per variar-lo, per la qual cosa diem que es tracta d'un pseudojoc, és a dir, un joc determinat per les condicions inicials.

Ben segur que l'anàlisi del joc us suggerirà nombroses relacions amb els grafs, entre les quals la fórmula d'Euler en el pla, aquella que diu que la suma del nombre de regions i de vèrtexs equival al nombre de costats més 2 (si només comptem les regions tancades és 1). L'aplicació d'aquesta fórmula permet resoldre aquest segon joc, i trobarem que el nombre de moviments està determinat pel nombre de punts inicials, de manera que, si aquest és n, el nombre de moviments és $5n - 2$.

L'interès per aquest joc és molt gran, com confirmen les nombroses referències a la xarxa. Existeix fins i tot una associació dedicada al joc, World Game of Sprouts Association, http://www.wgosa.org i nombroses pàgines. En una d'elles, de la universitat de Utah, http://www.math.utah.edu/~alfeld/Sprouts, es pot descarregar un programet per jugar a l'*Sprouts*; en una altra, http://gameofsprouts.com/refs.html, hi trobareu una extensa bibliografia.

Acabaré l'article amb un bonic problema d'optimització que em va proposar l'amic Lluís Bibiloni ja fa un cert temps, que encara no havia tingut ocasió de proposar i amb qui, juntament amb en Xavier Valls, he tingut l'ocasió de comentar i discutir llargament, al voltant d'una taula, diverses maneres de trobar-ne la solució. Una vegada més els problemes geomètrics de màxims i mínims apareixen en aquesta secció, fruit, sens dubte, de l'interès que, al meu parer, tenen aquest tipus de problemes per la bellesa i sovint també la sorpresa de les seves solucions, com tindreu ocasió de comprovar si us endinseu en la resolució d'aquest problema que ara mateix us proposo.

► **Problema 4.** Dibuixeu una circumferència, un punt exterior i les dues tangents a la circumferència que passen per aquest punt. Escolliu un punt P sobre l'arc menor determinat en la circumferència i traceu la tangent que passa per aquest punt. Les tres tangents dibuixades determinen un triangle. Quin ha de ser el punt P per tal que l'àrea del triangle sigui màxima? Què podeu dir del perímetre d'aquesta família de triangles?

Encara que la solució del problema pugui ser l'esperada, es tracta de trobar un argument que la validi emprant tan sols geometria elemental. En canvi, no és tan esperada la solució a la segona pregunta del problema —quan la vaig descobrir així m'ho va semblar— i és a aquesta a la qual em referia abans. Si trobeu la resposta emprant reiteradament una única i ben coneguda propietat de les tangents a una circumferència, espero que entendreu la meva fascinació per aquesta solució i la referència que he fet a la bellesa que sovint trobem darrere les solucions elementals —que no sempre vol dir senzilles— d'aquest tipus de problemes.

Que gaudiu amb la resolució d'aquests i altres problemes de matemàtiques, tant com ho faig jo triant-los i tractant de resoldre'ls, i fins a una propera ocasió.

Bibliografia

Berlekamp, E., Conway i J. Guy, R. (1992), *Winning Ways for your Mathematical Plays*. A K Peters/CRC Press.

The Complete List of References for the Game of Sprouts, http://gameofsprouts.com/refs.html, World Game of Sprouts Association, http://www.wgosa.org

The University of Utah, The Game of Sprouts http://www.math.utah.edu/~alfeld/Sprouts