# El teorema de l'Empordà (de F. Macau) vist amb el GeoGebra

**Lluís Sabater Anticó**
Professor de Matemàtiques
INS de Llançà
lsabate1@xtec.cat

**Resum**

El 14 de setembre de 2012, la badia de Roses va ser inclosa al club de les badies més belles del món, una distinció de caràcter turístic a nivell mundial avalada per la Unesco.
A més de les evidències paisatgístiques, culturals..., un article de Frederic Macau, publicat l'any 1964 als *Annals de l'Institut d'Estudis Empordanesos* sobre la geometria de la badia, va ajudar també a l'acceptació de la candidatura.
Actualment, i gràcies a eines com el GeoGebra, les revistes, Internet, el GeoGebraTube..., estem en condicions de fer una més àmplia difusió del que F. Macau va anomenar teorema de l'Empordà, així com de l'explicació que donava del fet que els grecs s'instal·lessin a Empúries.

**Abstract**

*On September 14th 2012, Roses Bay joined the Most Beautiful Bays in the World Club, a worldwide tourism distinction that carries the endorsement of the Unesco.*
*Among the landscape and cultural evidences that supported Roses Bay' candidacy, there was an article by Frederic Macau, published in 1964 in the Annals de l'Institut d'Estudis Empordanesos, about the Geometry of the Bay.*
*Today, thanks to tools such as GeoGebra, the different magazines, the Internet, GeoGebraTube, ..., we are able to provide a wider diffusion of what Mr Macau called Theorem of l'Empordà as well as of the explanation he provided for the fact that the Greeks settled in Empúries.*

Als *Annals de l'Institut d'Estudis Empordanesos*, al volum 5, any 1964, hi trobem l'article de Frederic Macau i Vilar (Figueres, 1917—Barcelona, 1970)[1] «L'Alt Empordà geometritzat per la tramuntana».

1. El senyor Frederic Macau, enginyer de camins i geòleg, fou fins a la seva mort un dels professors de la càtedra de Geologia a l'Escola d'Enginyers de Camins de Madrid, i com a director de Carreteres de Girona hi planejà la modernització dels principals vials. Entre les seves obres trobem un estudi de la costa del golf de Roses: *Geología, viento y geometría* (1966).

En aquest article, hi trobem dues propostes a tenir en compte, ambdues referides al fet que al golf de Roses «podem veure-hi dues el·lipses: una de petita cap a Roses, i una de gran cap a l'Escala. Els eixos petits d'aquestes el·lipses del golf de Roses coincideixen amb la direcció de la tramuntana i la continuïtat cap a dins del mar de la direcció que porten els rius Muga i Fluvià», com podem veure a la figura 1.


**Figura 1. Mapa de la badia de Roses.**

En primer lloc, que els grecs es varen instal·lar a Roses i Empúries per la bellesa de la platja, i en segon lloc, el que ell va anomenar com a teorema de L'Empordà,[2] que diu:

> donades dues famílies d'el·lipses, tangents en un punt *P*, i tals que llur ratlla dels centres sigui paral·lela a la tangent comuna, cada un dels altres dos punts d'intersecció de cada parell d'el·lipses *F* i *E* i el punt *P* determinen dues rectes sobre les quals es tallen els parells de tangents a les el·lipses, paral·leles als diàmetres que passen pel punt *P*.

Ambdues propostes es troben perfectament justificades a l'article.

Per a la primera, els grecs es varen instal·lar a Empúries per la influència sobre el seu subconscient del nombre d'or, ja que el resultat de la divisió entre les longituds dels semieixos majors de les dues el·lipses (el·lipse gran: 13,9 km, el·lipse petita: 8,6 km) és gairebé el nombre d'or:

2. Li va donar aquest nom perquè va constatar que no figurava en la bibliografia que va consultar i perquè ningú a qui ho demanava (matemàtics, s'entén) el coneixia.

$$\frac{13{,}9}{8{,}6} = 1{,}616279\ldots \approx \varphi = 1{,}6180339\ldots$$

I aquest és el motiu de l'extraordinària bellesa del golf de Roses i del fet que els grecs decidissin instal·lar-s'hi.

Cal tenir present precisament que el nom $\varphi$ que es dóna al nombre d'or és la inicial de l'escultor, arquitecte i pintor grec Fídies (segle V aC), i que els grecs buscaven la màxima perfecció i bellesa en les seves obres, tant en l'art com en les construccions oficials... i això ho havien de tenir molt interioritzat.

Si es vol, és una justificació sentimental (l'amor a la pàtria), però també fonamentada matemàticament pel nombre d'or.

Però, per a la segona proposta, el senyor Frederic Macau fa servir eines matemàtiques potents:

La demostració[3] que en fa (en un apèndix de l'article) es basa en l'equació de les còniques del feix format per les còniques que passen per dos punts $A$ i $B$ (que determinen una recta $r$) i les tangents en cada un d'ells ($t_A$ i $t_B$) i aleshores l'equació és

$$\alpha \cdot r^2 + \beta \cdot t_A \cdot t_B = 0.$$

I encara més: hi fa una altra demostració usant afinitats.

Com diu Josep Pla a *El meu País*: «...els estudis del senyor Macau han donat una síntesi científica de l'Empordà, literalment excepcional».

La intenció d'aquest article és la d'aportar una comprovació gràfica, amb l'ajuda del GeoGebra, del «teorema de l'Empordà»:

Al GeoGebraTube hi ha la construcció *Teorema de l'Empordà (bellesa natural de la Badia de Roses)* (escriviu al cercador en castellà «macau», «roses», «empordà» o «*sabater*»)[4] (darrera visita, 25-11-2013), en la qual movent els punts lliscants podem entrar diverses parelles d'el·lipses de les famílies

$$(y - mx)^2 + \alpha \cdot (y - 2a) \cdot y = 0 \quad \text{i} \quad (y - nx)^2 + \beta \cdot (y - 2a) \cdot y = 0$$

(amb $m$ i $n$ diferents i amb $a$, $m$ i $n$ diferents de 0).

Per exemple, i per a fer més entenedor el gràfic, prenem $m = 1 > 0$ i $n = -1 < 0$ i prenem les el·lipses de les famílies corresponents a $\alpha = 2$ i $\beta = 1$ i amb centres a altura $a = 2$:

$$\varepsilon_1 : \ (y - x)^2 + 2 \cdot (y - 4) \cdot y = 0 \quad \text{i} \quad \varepsilon_2 : \ (y + x)^2 + (y - 4) \cdot y = 0$$

Tal com mostra la figura 2, obtindrem dues el·lipses, una d'orientada cap a la dreta i l'altra cap a l'esquerra, tangents en un punt (s'observa millor apropant-nos a la imatge).

3. Consulteu a *Annals de l'Institut d'Estudis Empordanesos*, al volum 5, any 1964, l'article «L'Alt Empordà geometritzat per la tramuntana».
4. També ho trobareu directament a http://www.geogebratube.org/student/m46316

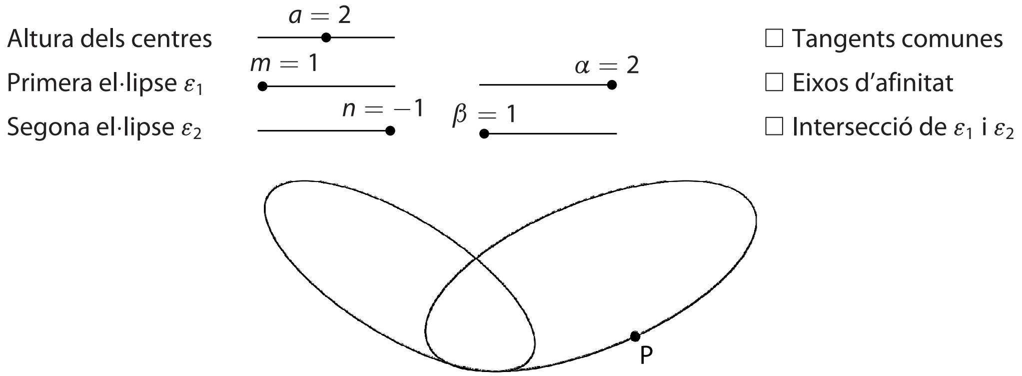


**Figura 2. Representació de dues el·lipses de les famílies amb el GeoGebra.**

Observem que tenen dues rectes tangents paral·leles (la distància entre les quals és en aquest cas $2a = 4$):

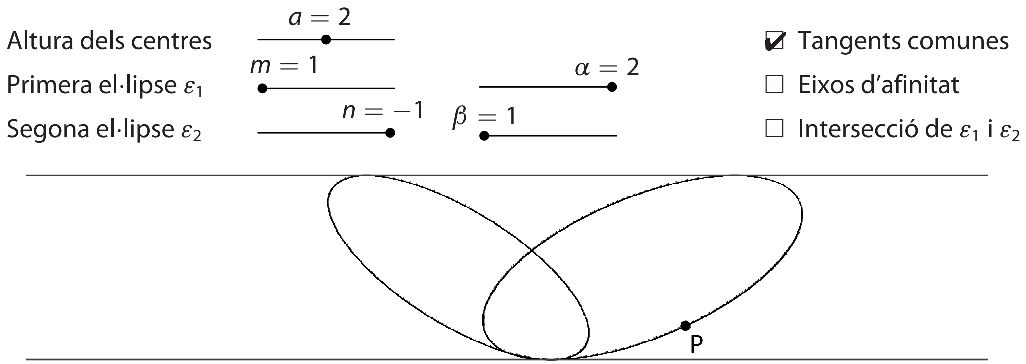


**Figura 3. Representació de les dues rectes tangents.**

Continuarem ara fent una construcció amb el GeoGebra, entrant a la línia d'ordres les equacions de les dues el·lipses, $\varepsilon_1$ i $\varepsilon_2$, per a veure amb més detall el procés:

Les dues el·lipses s'intersequen en tres punts *A*, *B* i *D* (aquest és el punt doble, on ambdues són tangents), que determinen els dos eixos d'afinitat:

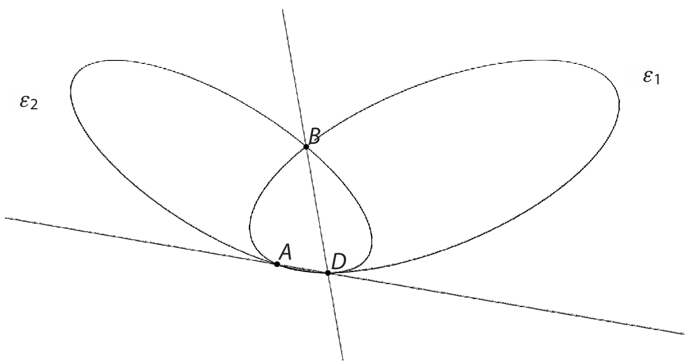


**Figura 4. Punts d'intersecció entre les dues el·lipses i eixos d'afinitat.**

Si prenem a $= 2$, $m = 1$, $n = -2$, $\alpha = 2$, i $\beta = 2$ obtenim la figura 5, on es veuen millor els eixos d'afinitat i les interseccions i tangència entre les el·lipses:

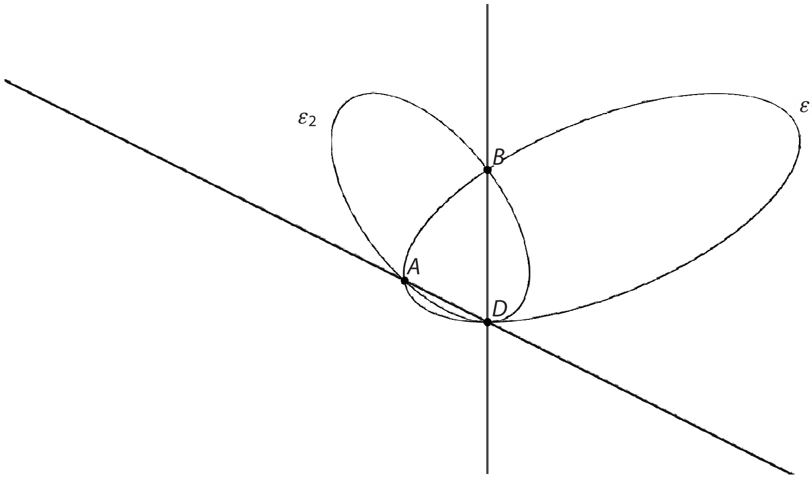


**Figura 5. Punts d'intersecció entre les dues el·lipses i eixos d'afinitat.**

Aleshores, agafant un punt $P$ sobre la primera el·lipse i considerant la recta $r$ que passa per $P$ i és paral·lela a les tangents comunes, aquesta recta talla l'el·lipse $\varepsilon_1$ en un altre punt $Q$ i també talla l'eix d'afinitat 1 en un punt $M$ i l'el·lipse $\varepsilon_2$ en els afins de $P$ i $Q$, $P'$ i $Q'$, de manera que

$$\frac{MP}{MP'} = \frac{MQ}{MQ'}$$

i aleshores les rectes tangents a les el·lipses pels punts $P$ i $P'$ es tallen sobre l'eix d'afinitat com es veu a la figura 6:

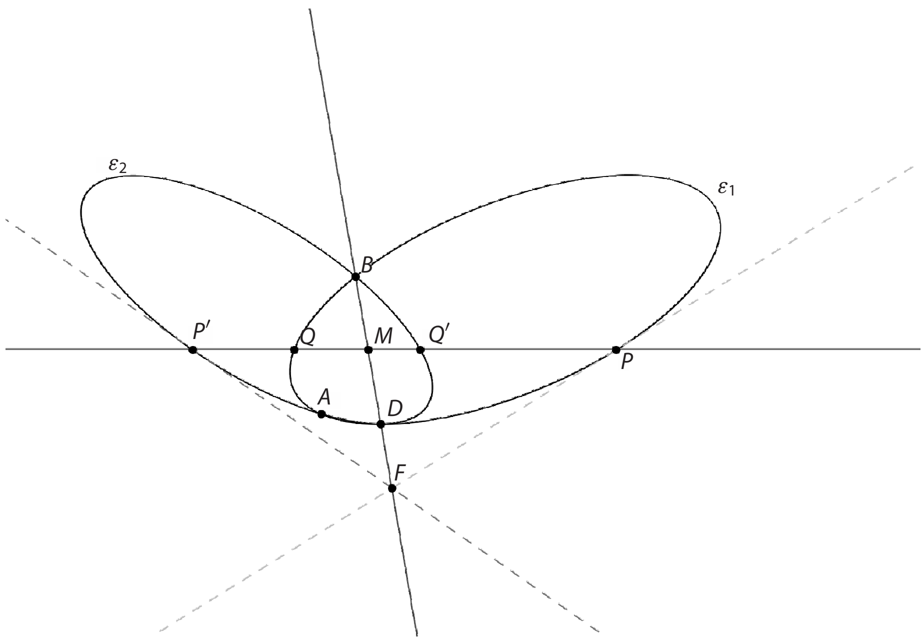


**Figura 6. Punt afí de *P*, *P*′, i rectes tangents per *P* i *P*′ intersecant-se sobre l'eix d'afinitat 1.**

I naturalment també amb les tangents pels punts $Q$ i $Q'$ (figura 7):

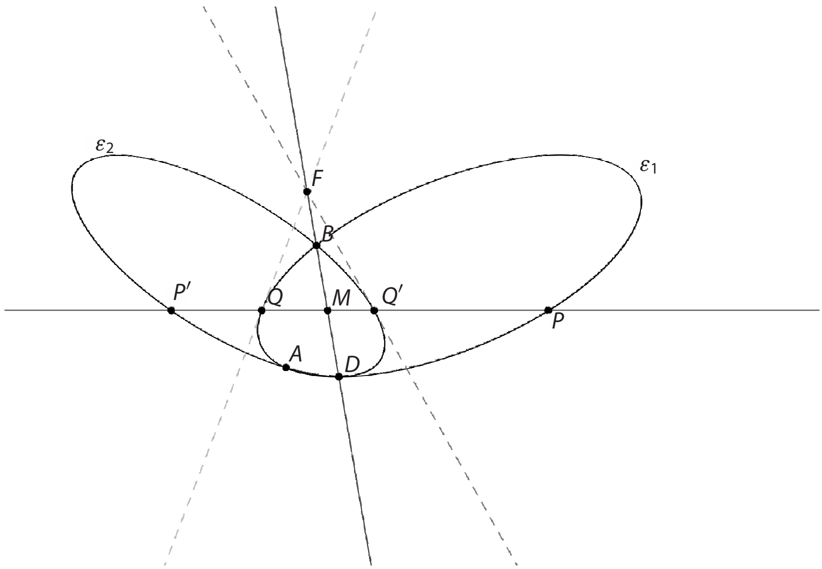


**Figura 7. Punt afí de *Q*, *Q′*, i rectes tangents per *Q* i *Q′* intersecant-se sobre l'eix d'afinitat 1.**

I si considerem el punt de tall $N$ de la recta $r$ amb l'eix d'afinitat 2, de manera que ara

$$\frac{NP}{NQ'} = \frac{NQ}{NP'}$$

resultarà que també les rectes tangents a les el·lipses pels punts $P$ i $Q'$ es tallen sobre l'eix d'afinitat (ara, $Q'$ és l'afí de $P$ i $P'$ és l'afí de $Q$) com es veu a la figura 8:

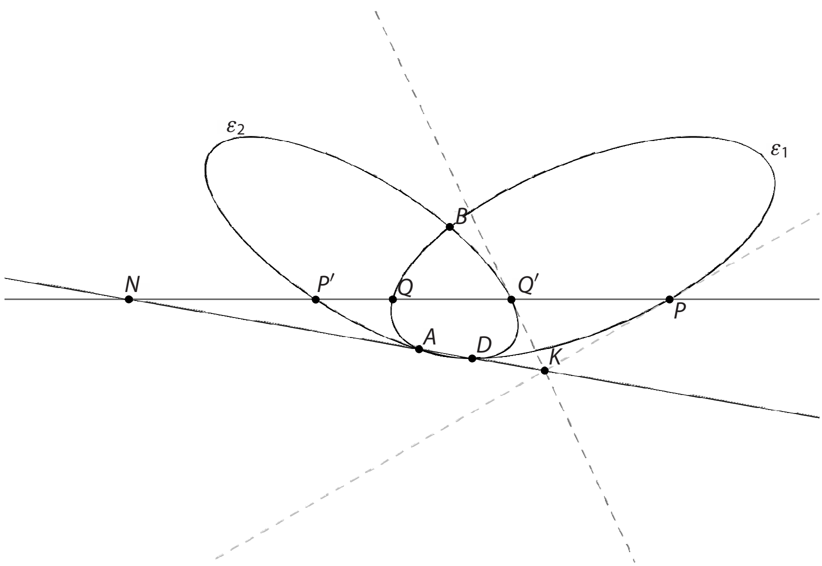


**Figura 8. Punt afí de *P*, *Q′*, i rectes tangents per *P* i *Q′* intersecant-se sobre l'eix d'afinitat 2.**

I naturalment, també amb les tangents pels punts $P'$ i $Q$ (figura 9):

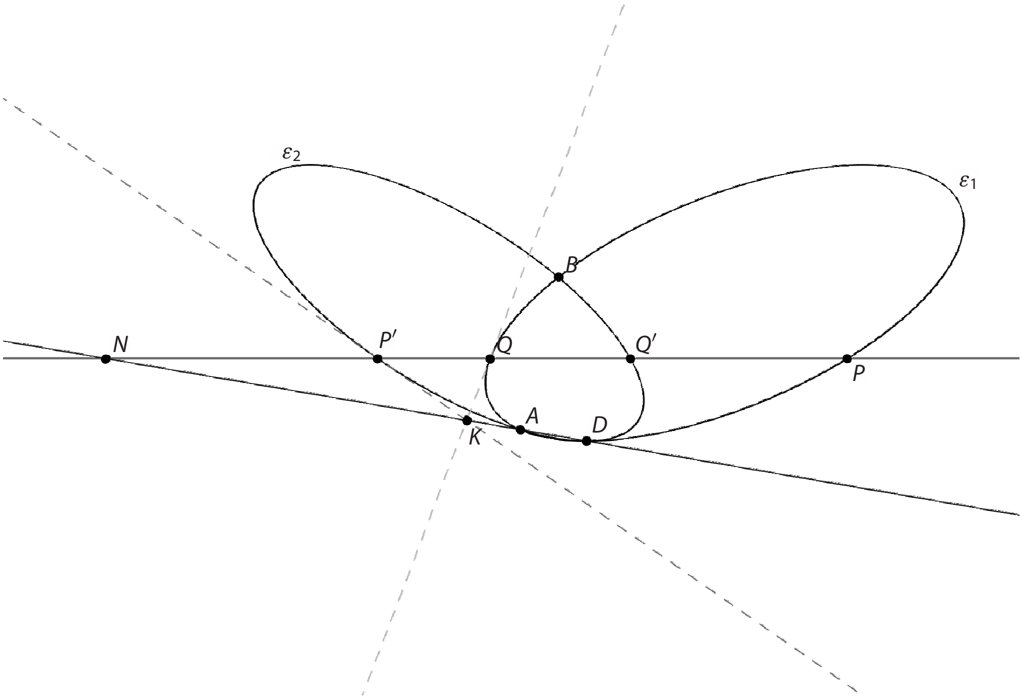


**Figura 9. Punt afí de $Q$, $P'$, i rectes tangents per $Q$ i $P'$ intersecant-se sobre l'eix d'afinitat 2.**

Si es volen provar altres valors fins a obtenir els diàmetres que fan que la seva raó sigui el nombre d'or, caldrà fer una nova construcció amb el GeoGebra, ja que els valors donats als paràmetres $a, m, n, \alpha$ i $\beta$ de la construcció del GeoGebraTube «Teorema de l'Empordà (bellesa natural de la Badia de Roses)» no ho permeten.

Així mateix, cal destacar que no es poden donar determinats valors a $\alpha$ i/o $\beta$, ja que en lloc d'el·lipses apareixerien hipèrboles (per exemple, si $\beta = -1$

$$\varepsilon: \ (y+x)^2 - (y-2) \cdot y = 0).$$

Tot això queda per a una possible ampliació de les seves utilitats didàctiques.

Així mateix, seria interessant estudiar-ne un ús turístic (promoció de Roses, l'Escala-Empúries, Sant Pere Pescador i Castelló d'Empúries-Empuriabrava),[5] com fan periòdicament els diaris comarcals (*Diari de Girona*, *Hora Nova*...), i més si tenim en compte que el passat 14 de setembre de 2012 la badia de Roses va rebre el diploma, corroborat per la Unesco, que la inclou al club de les badies més belles del món.

5. Visiteu la pàgina http://santpere.net/content/la-badia-de-roses-entra-al-club-de-les-badies-m%C3%83%C2%A9s-belles-del-m%C3%83%C2%B3n i us n'acabareu de convèncer! (darrera visita, 25-11-2013).

## Bibliografia

L'Alt Empordà geometritzat per la tramuntana. *Annals de l'Institut d'Estudis Empordanesos*, vol. 5, any 1964.

Universitat de la Corunya, Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación: caminos.udc.es/info/asignaturas/101/pdfs/teoria18.pdf (darrera visita, 25-11-2013).

Gran enciclopèdia catalana: http://www.enciclopedia.cat/enciclop%C3%A8dies/gran-enciclop%C3%A8dia-catalana/EC-GEC-0038897.xml#.UpB_Cax_hP0
(darrera visita, 25-11-2013).

Josep Pla. *Obra completa*, vol. 7, *El meu país*. Barcelona: Destino.