A classe... amb corbata!

Pedro Cobo Lozano

Resum

En aquest article mostrem com els alumnes resolen un problema produint les seves pròpies representacions del procediment de construir un nus de corbata. Els alumnes fan servir aquestes representacions per a generar nous nusos i per a calcular el nombre de nusos de corbata en funció dels moviments necessaris per construir-los. Tot això dins el marc d'una metodologia que afavoreix els processos comunicatius a l'aula.

Abstract

This paper shows how students solve a problem creating their own representations of the process of doing a tie knot. Students use these representations to generate new knots and to calculate the number of tie knots depending on the required movements to tie them. This is done in the context of a methodology that benefits the communication process in the classroom.

1. Introducció

Un dia d'estiu, passejant pel carrer Laugavegur de Reykjavík, vam veure una fotografia gran (figura 1) en la qual s'esquematitzava, mitjançant imatges, la forma de fer diversos nusos de corbata.

Ens vam demanar si seria possible, sota determinades condicions, que els nostres alumnes arribessin a resoldre els problemes de construir i generar nous nusos de corbata i a calcular el nombre de nusos de corbata en funció del nombre de moviments utilitzats per a la seva construcció.

Pensem que per solucionar aquests problemes hem de proposar als alumnes tasques que afavoreixin la integració de tres competències matemàtiques principalment, com són la representació, la modelització i la comunicació. L'associació de professors de matemàtiques dels Estats Units (NCTM, 2003) resumeix aquesta integració de la forma: «Les representacions haurien de tractar-se com a elements essencials per sustentar la comprensió dels conceptes i relacions matemàtiques, perquè els alumnes comuniquin els seus enfocaments, arguments i coneixements, per reconèixer les connexions entre conceptes matemàtics i per aplicar les matemàtiques a problemes reals a través de la modelització» (p. 71).

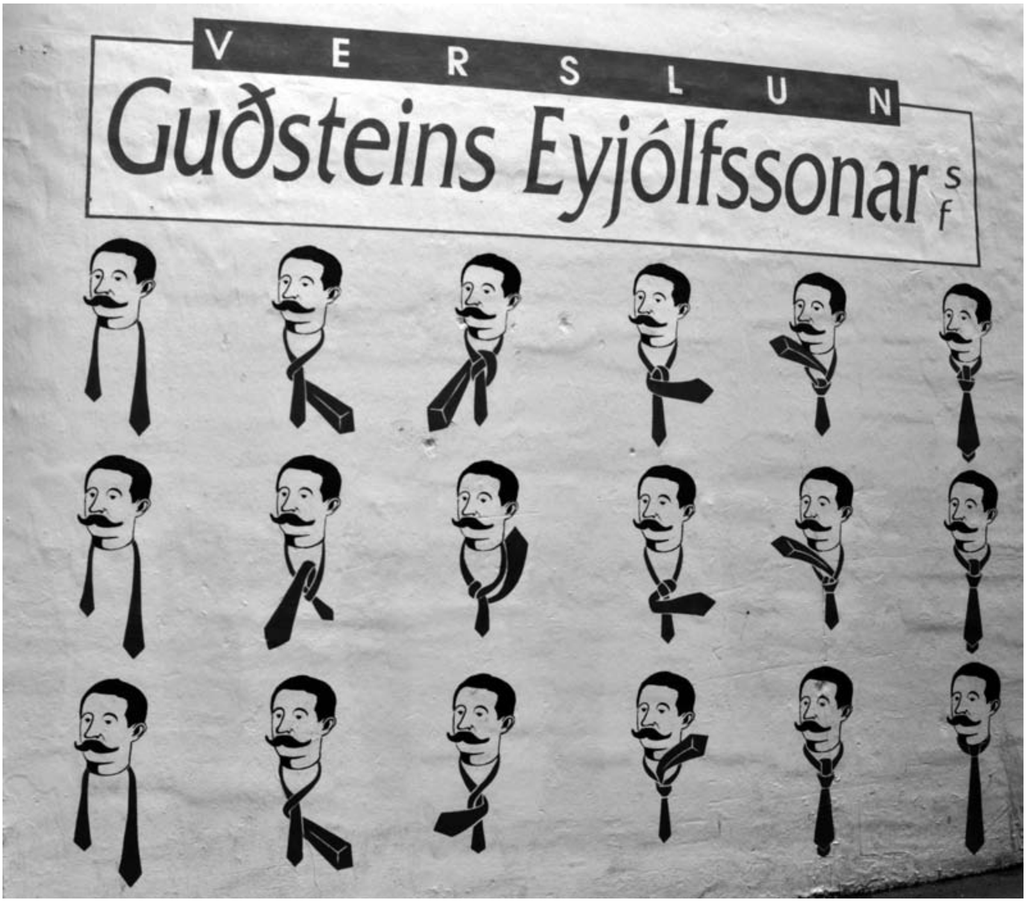


Fig. 1. Reproducció de la figura d'un carrer de Reykjavík en la qual es mostren les construccions de tres nusos de corbata.

Concretem a continuació els aspectes de la representació i la modelització que considerem en aquest treball i la manera de potenciar la comunicació a l'aula.

Pel que fa a la representació, Duval (1995) identifica tres activitats cognitives relacionades amb els sistemes de representació semiòtica: la formació d'una representació, el seu tractament i la conversió entre representacions. I ressalta dues idees perquè hi hagi aprenentatge: *a*) el fet que hem d'aconseguir que els alumnes diferenciïn entre un objecte i la seva representació, i *b*) la importància que té observar i analitzar les representacions generades pels alumnes per tal de fomentar la conversió entre elles en el context de construcció social de coneixements en les classes de matemàtiques (Hitt, 2013).

Aquesta conversió entre representacions es facilitarà a través dels processos comunicatius a l'aula i ens permetrà, si plantegem les tasques de forma adient, que siguin els mateixos alumnes, amb l'ajut del professor, els qui facin les transicions de les seves representacions espontànies cap a representacions més institucionalitzades (formals).

Considerem que és important trobar el signe adient que representi el concepte o procediment, però també ho és ressaltar els processos socials que porten cap al signe (Radford, 2003). En aquest sentit, en la pràctica que mostrem anirem descrivint l'evolució de les representacions espontànies dels alumnes.

Entenem la modelització com un procés cíclic que té com a punt de partida i d'arribada un domini extramatemàtic. El procés comportaria passos successius com: seleccionar variables i característiques que es considerin representatives del que es vol estudiar, dins del domini extramatemàtic; expressar-les en termes matemàtics; extreure conclusions matemàtiques, i traslladar aquestes conclusions al domini inicial. Ara bé, aquesta idea de modelització ens interessa si la fem servir amb intencions de millorar la motivació dels alumnes i d'ajudar-los a consolidar la formació de conceptes i la resolució de problemes (Niss, 2012).

Castro i Castro (2000) també ressalten la importància de l'ús de models matemàtics per a potenciar l'ensenyament de les matemàtiques com a eines heurístiques que són, ja que el que fan és traslladar el problema que es vol resoldre «als termes específics del model i a través d'aquest s'ha de trobar la solució fent servir només les seves pròpies regles i elements» (p. 111).

Pel que fa a la comunicació a l'aula, les representacions espontànies dels alumnes són les que la facilitaran, inicialment fora d'un llenguatge formal, i possibilitaran l'evolució de la verbalització cap a l'ús del llenguatge numèric i gràfic fins a arribar a la utilització del llenguatge simbòlic (DOGC, 2007).

Hi ha dues idees bàsiques en la manera d'ensenyar que seguim a les nostres aules que volem ressaltar i que incideixen en la comunicació:

- Pensem que la manera de potenciar els processos comunicatius a l'aula és crear un entorn en el qual els alumnes siguin els protagonistes principals del seu aprenentatge i, per tant, els qui construeixin el seus propis coneixements, que han de ser socialment compartits. És a dir, hem de tenir com a referent la teoria del constructivisme social en cada moment del procés d'ensenyament-aprenentatge.
- Els problemes que proposem han de ser rics en el sentit de: generar en els alumnes actituds de curiositat i d'interès; ser oberts per a permetre poder abordar-los de diferents maneres; facilitar la utilització de diversos sistemes de representació perquè els alumnes puguin comunicar el que volen expressar, i permetre establir connexions entre continguts matemàtics distints (Cobo i Molina, 2014).

Per acabar aquesta introducció, concretem els dos objectius que pretenem que els alumnes assoleixin en aquest treball:

- Establir sistemes de representació propis per a la construcció de nusos de corbata, amb la finalitat que els permetin modelitzar el procés per tal de generar nous nusos.
- Utilitzar aquest model per identificar procediments que els permetin calcular el nombre de nusos de corbata en funció dels moviments necessaris per construir-los.

2. Què s'ha escrit sobre el tema dels nusos de corbates

Hem trobat molta literatura sobre la història i la construcció de nusos de corbata, però hi ha dues referències que ens han semblat les més representatives i que comentarem a continuació: Fink i Mao (1999) i Hirsch i altres (2014).

Fink i Mao (1999) fan un estudi històric de l'evolució dels nusos de corbata, modelitzen el procediment de construcció de nusos de corbata i arriben a representar els vuitanta-cinc nusos de corbata que identifiquen amb menys de deu moviments.

Aquests autors imposen tot un seguit de condicions per construir nusos de corbata. Per exemple, consideren la corbata dividida en dues parts: la part ampla (o activa), que és l'única que es mou al voltant de la part estreta (o passiva), per tal de generar un nus que sigui escorredor sobre aquesta part estreta (figura 2). Parteixen també d'una corbata que, mirada de cara, tingui la part ampla a la dreta (figura 2), per tant, el primer moviment de la part activa de la corbata només és possible que sigui cap a l'esquerra.

Fink i Mao (1999) divideixen el pla en tres regions: esquerra (L), dreta (R) i centre (C) (figura 3), a les quals es pot moure la part activa de la corbata. També indiquen amb els subíndexs «$_*$» i «o» la direcció del moviment, és a dir, si la part activa passa per sobre o per sota, respectivament, de la part passiva. Així, per exemple, L_* seria el moviment de la part activa de la corbata cap a l'esquerra i per sobre de la part passiva.

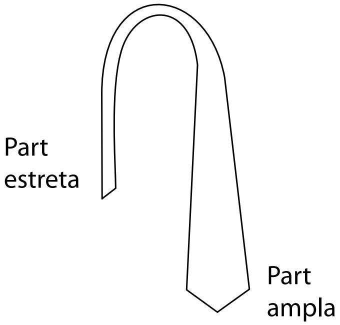


Figura 2

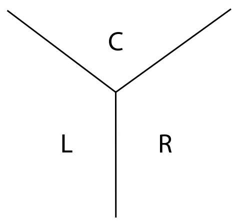


Figura 3

Amb aquestes condicions, defineixen un nus de corbata «com una seqüència de moviments triats del conjunt {Ro, R_*, Lo, L_*, Co i C_*} començant per Lo o L_* i acabant per ...RoL_* CoT o ... LoR_*CoT» (p. 55). Indiquen per T el fet que la part activa finalment es fica frontalment a través del llaç construït per l'últim moviment, i el consideren com una manera estètica d'acabar el nus (figura 4), sempre de la mateixa manera; per tant, no el consideren com un moviment.

A la figura 4 mostrem les dues formes d'acabar un nus segons Fink i Mao i el pas final de ficar la part ampla de la corbata sota el plec anterior.

Com ressalten els autors, la forma de definir un nus condiciona el fet que dos moviments consecutius no poden anar a la mateixa regió (no poden ser RR o LL o CC), ni en la mateixa direcció (no poden ser $_{**}$ ni oo).

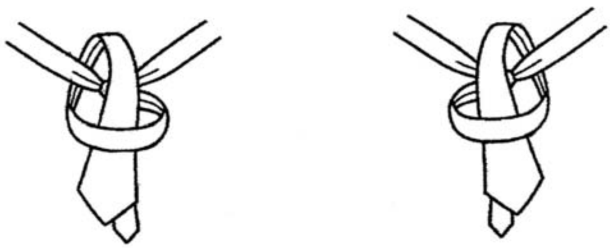


Figura 4

A part d'aquestes normes per construir nusos de corbata, Fink i Mao (1999) defineixen paràmetres com la grandària, la forma, la simetria i el balanç d'un nus per a determinar-ne l'estètica.

Per calcular el nombre de nusos que es poden construir amb les condicions establertes, Fink i Mao (1999) representen els nusos com a seqüències de camins aleatoris sobre una malla triangular (figura 5, en la qual es representa el nus: L_* Ro L_* Co T). En aquesta malla, els eixos $\underset{r}{\rightarrow}$, $\underset{l}{\rightarrow}$ i $\underset{c}{\rightarrow}$ corresponen als moviments sobre les regions R, L i C, respectivament, i en les que ometen les notacions direccionals «$_*$» i «o» perquè es van alternant i el nus sempre acaba en Co; per tant, és fàcil deduir la seqüència direccional.

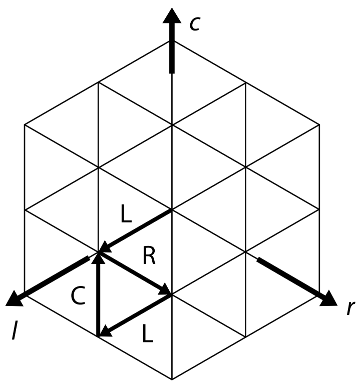


Figura 5

Fink i Mao (1999) arriben a obtenir l'expressió següent del nombre de nusos (K) en funció del nombre de moviments:

$$(h) : K(h) = \frac{1}{3}\left(2^{h-2} - (-1)^{h-2}\right),$$

i calculen el nombre total de nusos amb com a màxim nou moviments de la forma:

$$\sum_{i=1}^{9} K(i) = 85$$

en què $K(1) = K(2) = 0$.

Per la seva part, Hirsch i altres (2014) consideren que el que fan Fink i Mao és construir un llenguatge sobre els nusos de corbata. Un llenguatge que té un alfabet {Ro, R_*, Lo, L_*, Co, C_* i T} i que és un subconjunt A del conjunt M format per totes les seqüències de qualsevol longitud de lletres de l'alfabet. Qualsevol llenguatge té una gramàtica, que, en aquest cas, són les normes que estableixen Fink i Mao per a la construcció de nusos.

Ja que les regions establertes per Fink i Mao (L, R i C) no es poden repetir de forma consecutiva i les direccions ⁎ i o (per sobre i per sota) s'han d'alternar en la construcció d'un nus, Hirsch i altres (2014) afirmen que: «la llista de regions és menys important que la direcció de transició: qualsevol transició vàlida es fa o en el sentit del moviment de les busques del rellotge o en sentit contrari» (p. 4). I representen les transicions de la manera següent (figura 6):

- T: com el desplaçament de l'extrem de la corbata en el sentit del moviment de les busques d'un rellotge. És a dir, les transicions RL, LC i CR es representarien per T.
- W: com el desplaçament de l'extrem de la corbata en el sentit del moviment contrari al de les busques d'un rellotge. És a dir, les transicions LR, RC i CL es representarien per W.
- U: el desplaçament de l'extrem de la corbata sota el plec anterior.

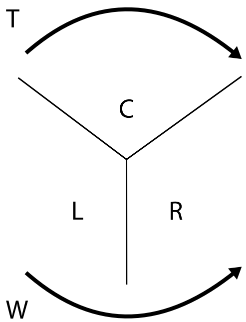


Figura 6

D'aquesta manera, Hirsch i altres (2014) eliminen les condicions que imposaven Fink i Mao. Així, d'una banda, consideren que la part estreta de la corbata és també part activa, la qual cosa suposa que el nus no sigui escorredor; i, de l'altra, que l'extrem de la corbata pot ficar-se, en un mateix nus, diverses vegades per l'últim plec, és a dir, aquesta transició no necessàriament suposa la fi del nus.

Hirsch i altres arriben a deduir que combinant fins a onze transicions es poden generar 177.147 nusos de corbata; naturalment, la majoria d'ells amb una estètica una mica rara.

3. Com arriben els alumnes a modelitzar la construcció de nusos de corbates

La tasca que proposem forma part d'una seqüència didàctica contextualitzada en el desenvolupament de processos com la comunicació, la representació, la modelització i la resolució de problemes. Es duu a terme durant aproximadament tres hores de classe.

La tasca s'implementa en un grup normal de 4t d'ESO, en el qual seguim una metodologia que fomenta la participació dels alumnes, que alternen treball individual, en grups petits i posades en comú en el grup-classe (Cobo, 2004 i Cobo i Molina, 2014), molt semblant a la que Hitt i Morasse (2009) anomenen «metodologia d'ACODESA».

Els alumnes han treballat normalment amb representacions de conceptes i procediments matemàtics que són introduïts pel professor i que són els que fan servir habitualment per comunicar les seves idees matemàtiques.

a) *Presentació de la tasca.* El professor comença fent un breu repàs històric dels nusos de corbata. Abans de plantejar l'objectiu de la tasca, també explica alguns exemples de representacions de conceptes i procediments que es fan servir en matemàtiques (funcions, nombres...) i amb els quals els alumnes ja estan familiaritzats. Ressalta la importància d'utilitzar diferents representacions d'un mateix contingut matemàtic. Finalment, al mateix temps que fa un nus d'una corbata, planteja l'objectiu de la tasca, animant, en un primer moment, els alumnes a trobar representacions del procediment de construir nusos de corbata.

   Per tractar d'unificar i simplificar el procés, considerem, com fan Fink i Mao (1999), que la posició inicial de la corbata és la que mostrem a la figura 2, en la qual ens veiem la corbata de cara amb la part ampla a la dreta. A més, tenim en compte que només aquesta part ampla és la part activa per construir el nus, és a dir, l'única que podem moure al voltant de la part estreta (passiva). També considerem que les úniques posicions finals (per tal de conservar l'estètica) d'un nus de corbata són les de la figura 4.

b) *Evolució de les representacions dels alumnes.* Al principi, els alumnes comencen experimentant la forma de construir nusos amb la corbata que cadascú ha portat a classe. Quan ja han fet un nus, intenten representar el procés de construcció. Les primeres representacions són dibuixos complets de la corbata i del procés, seguits d'explicacions escrites en llenguatge ordinari. De seguida, hi ha grups d'alumnes que simplifiquen la representació, fent servir línies i caps de fletxes per representar les corbates (figura 7).

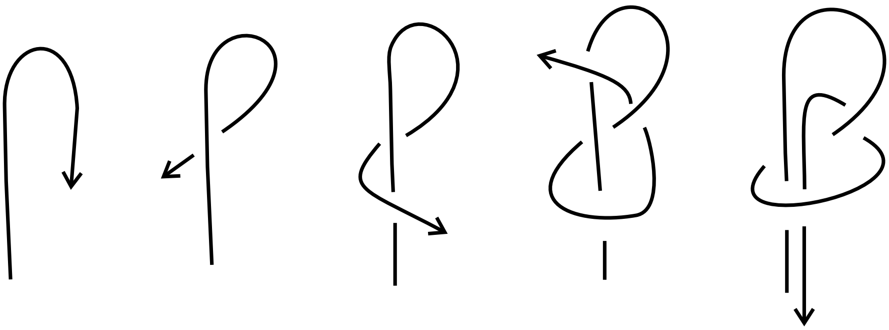


Figura 7

   Abans d'acabar la primera hora de classe, pràcticament cada grup d'alumnes ha aconseguit una representació com les que mostrem. Les tres primeres són similars a les de Fink i Mao (1999) i la quarta és un intent de representació més algèbrica:

   — Un grup d'alumnes representa per $\overset{D}{\leftarrow}$ el moviment de la part activa de la corbata cap a l'esquerra i per dalt de la part passiva. I per $\underset{B}{\leftarrow}$ el moviment de la part activa de la corbata cap a l'esquerra i per baix de la part passiva. Igualment, representen per $\overset{D}{\to}$ $\underset{B}{\to}$ els moviments cap a la dreta per dalt i per baix, respectivament. I, finalment, representen per $\downarrow^{D}$ i per $\downarrow_{B}$, els moviments cap al centre, endavant i enrere, respectivament.

— Un altre grup d'alumnes, evita les fletxes, dibuixant només el seus capçals, amb la qual cosa trobem:

$< D$, $< B$: moviments cap a l'esquerra per dalt i per baix, respectivament.

$> D$, $> B$: moviments cap a la dreta per dalt i per baix, respectivament.

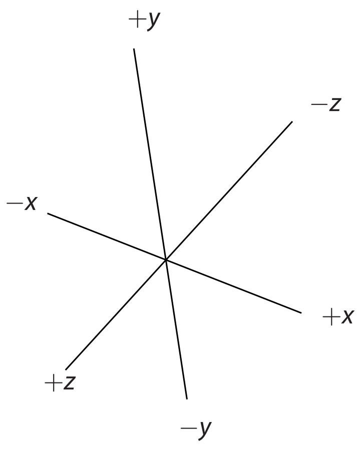
VD, VB: moviments cal al centre, endavant i enrere, respectivament.

— Uns altres representen els moviments directament amb lletres:

$E*$, $E!$, $D*$, $D!$, $C*$ i $C!$: moviments cap a l'esquerra (a dalt i a baix), cap a la dreta (a dalt i a baix) i cap al centre (endavant i enrere), respectivament.

Aquestes tres representacions acaben sempre el nus amb una F que indica el fet de ficar la part ampla de la corbata en el plec anterior i que sempre és el mateix per acabar el nus i, per tant, no el consideren com un moviment (figura 4).

Finalment, un grup d'alumnes intenta fer una representació graficosimbòlica, dibuixant línies que simulen eixos tridimensionals positius i negatius, com mostrem a la figura 8.



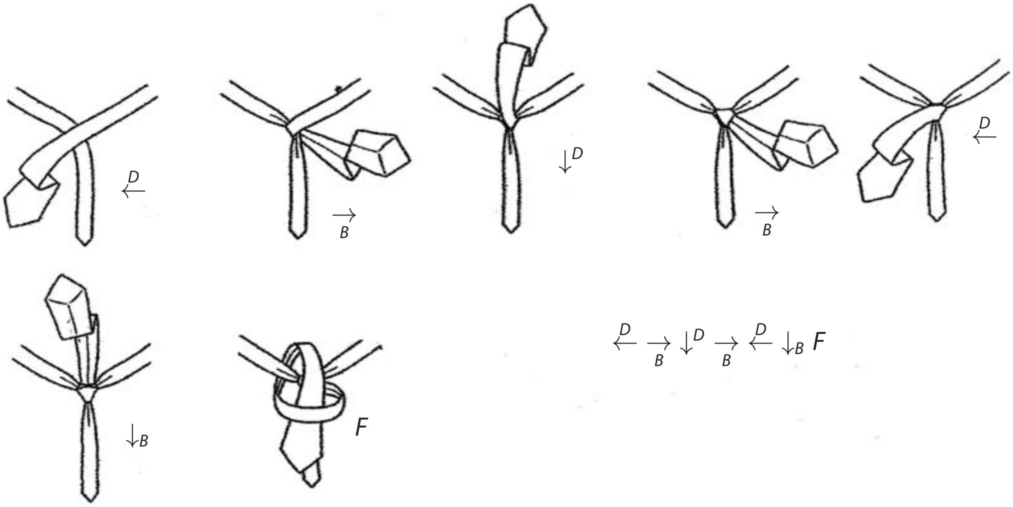
$+x \to$ cap a dreta
$-x \to$ cap a esquerra
$+y \to$ cap dalt
$-y \to$ cap baix
$+z \to$ per sobre
$-z \to$ per sota
ϕ dins nus

Figura 8

Cada grup explica a la classe la seva representació i es discuteixen les semblances i diferències entre elles.

c) *Familiarització amb les representacions i elaboració de normes per construir nusos. Generació de nous nusos de corbata.* En aquesta fase de familiarització amb les representacions que cada grup ha elaborat, presentem als alumnes, en figures (tretes de Fink i Mao, 1999), el procés de construcció de quatre nusos de corbata, com veiem a la figura 9 (en la qual mostrem també la representació associada d'un dels grups d'alumnes) i els demanem que:

— Els representin segons el llenguatge que ells han trobat.
— Observin les normes que regeixen per a la construcció de nusos.



$\overset{D}{\leftarrow}\ \underset{B}{\rightarrow}\ \downarrow^{D}\ \underset{B}{\rightarrow}\ \overset{D}{\leftarrow}\ \downarrow_{B}\ F$

Figura 9

Associats a cada figura, els alumnes fan la seva representació (figura 9).

Després de fer la traducció completa, arriben a resumir les normes següents per a la construcció de nusos, que un grup d'alumnes escriuen de la manera següent:

— El primer moviment sempre haurà de ser cap a l'esquerra ($\underset{B}{\leftarrow}$, $\overset{D}{\leftarrow}$).
— Un moviment mai no es podrà repetir; així, per exemple, després d'un moviment cap a l'esquerra el següent haurà de ser: $\downarrow^{D}$, $\downarrow_{B}$, $\overset{D}{\rightarrow}$ o $\underset{B}{\rightarrow}$.
— Les direccions *B* i *D* es van alternant.
— El nus acabarà amb un moviment cap a baix: $\downarrow_{B}$.
— Les dues úniques maneres d'acabar un nus són: ($\underset{B}{\rightarrow}\ \overset{D}{\leftarrow}\ \downarrow_{B}\ F$) o ($\underset{B}{\leftarrow}\ \overset{D}{\rightarrow}\ \downarrow_{B}\ F$).

A partir d'aquest moment, els alumnes acaben de modelitzar el procediment de la construcció de nusos de corbata i comencen a generar nous nusos, que van construint simultàniament amb la seva corbata. És a través d'aquest model, fent servir les seves regles i elements, que els alumnes comencen a trobar la solució dels problemes de generar nous nusos de corbata i de calcular el nombre de nusos.

Aquesta fase és la més creativa, perquè els alumnes inventen nusos nous, els construeixen amb la corbata i expliquen fàcilment i d'una manera entenedora el procediment de construcció als seus companys.

4. Com calculen els alumnes el nombre de nusos de corbata

Proposem als alumnes calcular el nombre de nusos de corbata que es podrien fer, partint de les formes de començar i acabar un nus que hem considerat (apartat 3a) i de les normes que han trobat per a l'elaboració de nusos (apartat 3c).

Després de diferents intents, els alumnes comencen des del final i treballen cap enrere. Elaboren diagrames en arbre, partint de les dues posicions finals possibles, a les quals van afegint moviments successius (figura 10) i ratllant les possibilitats que no són correctes perquè no compleixen les normes de construcció, per exemple les que no comencen amb un moviment cap a l'esquerra. A la figura 10 mostrem els diagrames en arbre que fan els alumnes per construir nusos de corbata amb sis moviments.

$$FC!E_* D! \left\{ \begin{array}{l} E_* \left\{ \begin{array}{l} D! \left\{ \begin{array}{l} E_* \\ \cancel{C_*} \end{array} \right. \\ \\ C! \left\{ \begin{array}{l} E_* \\ \cancel{D_*} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ C_* \left\{ \begin{array}{l} E! \left\{ \begin{array}{l} \cancel{C_*} \\ \cancel{D_*} \end{array} \right. \\ \\ D! \left\{ \begin{array}{l} \cancel{C_*} \\ E_* \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad FC!D_* E! \left\{ \begin{array}{l} D_* \left\{ \begin{array}{l} E! \left\{ \begin{array}{l} \cancel{D_*} \\ \cancel{C_*} \end{array} \right. \\ \\ C! \left\{ \begin{array}{l} \cancel{D_*} \\ E_* \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \\ C_* \left\{ \begin{array}{l} D! \left\{ \begin{array}{l} E_* \\ \cancel{C_*} \end{array} \right. \\ \\ E! \left\{ \begin{array}{l} \cancel{D_*} \\ \cancel{C_*} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Figura 10

Observen que 3 és el nombre mínim de moviments que calen per construir un nus i construeixen taules que donen el nombre de nusos de corbata en funció dels moviments necessaris per construir-los (figura 11).

Moviments	Nusos
3	1
4	1
5	3
6	5
7	11
8	21

Figura 11

Observant les taules construïdes, els alumnes arriben a dues formes recursives de generalització. En la primera (figura 12), només fan una descripció (representació escrita en llenguatge ordinari) de la forma de generar cada nombre de nusos en funció de l'anterior.

> Si el nombre de moviments és imparell, es fa el doble del nombre de nusos $+1$;
> si és parell, el doble del nombre de nusos -1 i dóna el nombre de nusos següent.

Figura 12

L'expressió simbòlica formal del que els alumnes escriuen seria:

$$F(n) = \begin{cases} 2F(n-1)+1 & \text{si } n \text{ és imparell} \\ 2F(n-1)-1 & \text{si } n \text{ és parell} \end{cases}$$

$\rightarrow \; F(n) = F(n-1) + 2F(n-2)$
associació molt semblant a Fibonacci

Figura 13

En la segona (figura 13), un grup d'alumnes ja mostra directament l'expressió algèbrica (representació formal) i afegeix la indicació que mostra la seva semblança amb la successió de Fibonacci.

En aquest moment acabem l'activitat, sent conscients que podríem haver-la continuat, com fèiem a Cobo i Molina (2014) amb els problemes que proposàvem.

Hi ha moltes formes de continuar l'activitat. La que sembla més evident seria la de trobar una altra representació (expressió explícita) que no sigui recurrent per

$$F(n) = F(n-1) + 2F(n-2)$$

i tractar de justificar que és equivalent a l'expressió trobada per Fink i Mao (1999):

$$K(h) = \frac{1}{3}\left(2^{h-2} - (-1)^{h-2}\right).$$

Això s'aconsegueix buscant l'equació característica de l'expressió recurrent, que en aquests cas seria:

$$t^2 - t - 2 = 0;$$

resolent-la i trobant l'expressió explícita, que seria de la forma:

$$F(n) = \frac{1}{12}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n;$$

i comprovant que aquesta i la de Fink i Mao són equivalents.

Altres possibles continuacions de l'activitat tindrien a veure amb la comparació de la successió obtinguda amb la de Fibonacci.

5. Reflexions finals

Pensem que actualment es fomenta poc a les nostres aules que els alumnes generin les seves pròpies representacions perquè hi ha una tendència cap a construir les matemàtiques directament sobre representacions institucionalitzades de conceptes i procediments introduïts directament pel professor. Ni tan sol es fan semblances històriques dels processos culturals que han facilitat l'evolució d'aquestes representacions institucionalitzades. Com indica Hitt (2013), una de les formes de fomentar en els alumnes la generació de representacions espontànies és plantejant i resolent problemes.

El plantejament de problemes que generin actituds de curiositat en els alumnes i que facilitin l'ús de diferents sistemes de representació de conceptes i procediments afavoreixen els processos comunicatius a l'aula de matemàtiques i el pas de representacions espontànies cap a les més institucionalitzades.

En el nostre cas, hem mostrat com evolucionen les representacions dels alumnes sobre el procediment de construir nusos de corbates i com arriben a obtenir les normes que modelitzen aquest procediment; o com fan una representació en diagrama d'arbre per analitzar possibilitats, que després representen en una taula de valors, per arribar, finalment, a obtenir el nombre total de nusos de corbata de manera formal mitjançant una expressió semblant a la de Fibonacci.

Els processos comunicatius també es fomenten si els alumnes participen d'una metodologia de treball en la qual són protagonistes principals en la construcció del seu coneixement, que ha de ser socialment compartit. És per això que pensem que, en aquesta metodologia, hem de combinar moments de reflexió individual, que en molts casos serveixen per reactivar els processos de resolució, amb moments de treball en petit grup i amb reflexions conjuntes en el grup-classe, que serviran per institucionalitzar el coneixement compartit.

A més, la construcció de nusos de corbata i el càlcul del nombre de nusos en funció dels moviments necessaris per a la seva construcció són problemes que hem observat que interessen als alumnes, malgrat que la corbata sigui una peça de vestir que sembla cada cop menys utilitzada socialment. Amb aquests problemes, els alumnes han pogut reflexionar conjuntament dins del grup-classe sobre les aportacions de continguts matemàtics que han fet, relacionades, per exemple, amb els processos d'inducció i generalització, la creació i utilització de models, la realització de taules, la utilització de diferents sistemes de representació, l'anàlisi de possibilitats, l'ús d'expressions algebraiques, el procediment de començar pel final i treballar cap enrere, etc.

6. Bibliografia

Castro E. i Castro, E. (2000). Representaciones y Modelización. A L. Rico (coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori.

Cobo, P. (2004). Experiencias sobre enseñanza de resolución de problemas de matemáticas. A Giménez, Santos i da Ponte (coords.). *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes*. Barcelona: Graó, p. 127-136.

Cobo, P. i Molina, M. A. (2014). ¿Pueden nuestros estudiantes construir conocimientos matemáticos? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 85, 49-73. (http://www.sinewton.org/numeros).

DOGC (2007). Ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatòria. *Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya*. Decret 143/2007.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et appretissatges intellectuals*. Berna: Peter Lang.

Fink, T. i Mao, Y. (1999). *The 85 Ways to tie a tie. The Science and Aesthetics of Tie Knots*. Londres: Fourth Estate Limited.

Hirsch, D., Patterson, M. L., Sandberg, A. i Vejdemo-Johansson, M. (2014). *More Ties than we Thought*. (http://arxiv.org/abs/1401.8242v1).

Hitt, F. (2013). Theorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 18, 9-27.

Hitt, F i Morasse, C. (2009). Dévoloppement du concept de covariation et fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problemes. Actes de CIEAEM-61, Montréal, Quebéc, Canadà, Juliol 26-31, 2009. *Quaderni di Recerca in Didattica (Scienze Matematiche)* of G.R.I.M. Suplement 2, núm. 19. Palerm. (http://math.unipa.it/~grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm)

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación Matemática*. The National Councilof Teachers of Mathematics, Inc. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales (edició castellana).

Niss, M. (2012). Models and Modelling in Mathematics Education. *Newsletter of European Mathematical Society*, 86, 49-52.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.