pensar

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Dedicaré el meu article a petits i grans, segons com es miri, problemes de nombres i començaré amb algunes qüestions elementals, paraula que no sempre és sinònima de simple, del que coneixem com a divisibilitat. Sovint, quan es treballa aquest tema, tant a finals de primària com a l'inici de l'ESO, les tasques proposades als alumnes se centren en exercicis per a determinar divisors o múltiples d'un nombre i les tècniques per a fer-ho, o bé trobar el m.c.d. i/o el m.c.m. a partir de la descomposició d'un nombre en factors primers. Com a molt, es fan alguns problemes estàndard d'aplicació d'aquests conceptes, sense tenir en compte que la finalitat del treball sobre la divisibilitat no és tant la de fer càlculs, sinó la de conèixer els nombres i les seves relacions, així com les propietats que es deriven de la seva descomposició en factors primers. Per tant, els càlculs caldrà fer-los quan sigui necessari per a resoldre un determinat problema, ja que, si no hi ha problemes per resoldre, quin sentit tenen tots aquests càlculs?

Per exemple, tal com m'explicava fa uns dies en David Barba, a propòsit d'una activitat que la Cecília Calvo havia treballat amb els seus alumnes d'ESO, en lloc de demanar-los que calculin els divisors de tal i tal nombre, per què no problematitzem la qüestió i els fem la pregunta (problema 1): quin és el nombre de dues xifres que té més divisors? Això és, al meu entendre, apropar-se a aquella idea tan suggerent, i que he esmentat més d'una vegada, que ens proposava l'amic Paulo Abrantes: generar a l'aula un ambient de resolució de problemes. A vegades no cal plantejar «grans» problemes i una qüestió com la proposada pot esdevenir el motor per a treballar nombrosos aspectes sobre els nombres i la divisibilitat.

No és gaire difícil d'imaginar que en resoldre el problema anterior es faran una pila de càlculs de divisors, però a més caldrà analitzar l'estructura de la descomposició dels nombres en factors primers i, en definitiva, pensar en les relacions de divisibilitat. La tasca anterior es va fer en una sessió d'exercitació per convertir l'exercici de trobar els divisors de certs nombres (troba D(24), D(27), D(36) i D(52)) en un repte més general, plantejat de manera col·laborativa, repartint els nombres entre els diferents grups i resolent el problema en una posada en comú final. A més de passar-ho molt bé, els alumnes no solament van trobar una pila de divisors, sinó que van poder reflexionar sobre per què uns en tenien molts i altres molt pocs.

És clar que, a partir de la pregunta anterior, en poden sorgir d'altres (problema 2): quins nombres de dues xifres tenen una descomposició amb només un factor primer?, la qual cosa ens pot portar a parlar de les potències; o bé (problema 3): quins nombres tenen una descomposició en què tots els factors primers només apareixen una vegada? Si no us n'heu adonat, proveu què passa amb l'any actual, 2014, el seu anterior i el posterior (les descomposicions del 2012 i del 2016 tenen una estructura diferent), i us podeu plantejar si això passa gaire sovint o, dit d'una altra manera, quan va passar per darrera vegada i quan tornarà a passar. Cadascú decidirà si en aquest tipus de treball es vol restringir a nombres de dues xifres, de tres o més grans, i fins a quin punt és interessant trobar-los tots. Aquesta és una de les tasques que tenim com a professors: determinar la dificultat del repte que proposem als nostres alumnes i decidir fins on volem arribar.

Seguint amb el mateix tema, però pensant en nombres més grans, aquí teniu un parell de problemes curiosos, el primer dels quals vaig tenir l'ocasió de treballar amb els amics del Garraf, en el quart berenar matemàtic organitzat a Vilanova per en Pep Sales i en Joan Gómez, el 22 de novembre de 2013, al qual em van convidar:

► Problema 4: Quin és el nombre més gran de set xifres, totes diferents, que és divisible per cadascuna de les xifres que el formen? Tingueu en compte que no pot haver-hi el zero i que això ja ens permet eliminar alguna altra xifra.

Seguint amb nombres grans, aquí en teniu un altre de prou curiós:

► Problema 5: Amb les xifres de l'1 al 9, formem un nombre de nou xifres totes diferents. Quin ha de ser aquest nombre (o nombres si hi ha més d'una solució) si quan escrivim la primera xifra (s'entén que comencem a escriure el nombre per l'esquerra) el nombre ha de ser divisible per 1; quan escrivim la segona, el nombre de dues xifres que ara tenim ha de ser divisible per 2; quan escrivim la tercera, el nombre ha de ser divisible per 3, i així fins al final, en què obtindrem un nombre de nou xifres, que ha de ser múltiple de 9? Per exemple, el nombre 123456789 no és solució, ja que 1234 no és divisible per 4, 1234567 no és divisible per 7, i 12345678 no ho és per 8.

► Problema 6: Un problema similar a l'anterior seria construir, com abans, un nombre de nou xifres totes diferents, fent-ho d'esquerra a dreta, però de manera que els successius divisors, que en el primer cas eren els nombres de l'1 al 9 ordenats, ara haguessin de ser els nombres corresponents a la darrera xifra escrita.

Té sentit plantejar els mateixos problemes —em refereixo als problemes 5 i 6—, però tenint en compte que anem formant el nombre començant per la xifra de la dreta i procedim cap a l'esquerra? Per què?

Seguint amb l'ús de les nou xifres, us proposo una coneguda recreació matemàtica, d'una certa dificultat, la resolució de la qual ens remet també a qüestions de divisibilitat, ja que si intentem resoldre-la emprant només assaig i error és difícil arribar a la solució. L'he treballat sovint a Estalmat i també en un concurs de recreacions matemàtiques de la Setmana de la Ciència de 2013 a l'institut Rovira i Forns de Santa Perpètua, dins el marc del projecte Tàndem, amb arguments interessants dels alumnes per explicar com han trobat la solució, que és única.

► Problema 7: Situar els nombres de l'1 al 9 en les caselles de la taula següent de manera que es compleixin les igualtats dels tres productes indicats (s'entén que no es pot repetir cap dígit):

$$\square\square \ \mathrm{X} \ \square = \square\square \ \mathrm{X} \ \square = \square\square \ \mathrm{X} \ \square$$

Deixem la divisibilitat, però seguim amb els nombres, i considerem aquells que expressen quantitats enormes. Aquest curs s'ha posat en marxa el màster interuniversitari de formació del professorat de secundària de matemàtiques, en el qual participen les diferents universitats catalanes que fins ara impartien el màster (UAB, UB, UOC, UPC i UPF). La lliçó inaugural la va impartir en Josep Pla, que, en una magnífica conferència, ens va parlar de l'existència en matemàtiques a través de cinc contes, al final de cadascun dels quals va presentar un seguit de qüestions i problemes.

A propòsit del primer conte, la coneguda llegenda de l'inventor dels escacs, després de mostrar-nos el nombre que correspon al nombre total de grans de blat que resulta de fer $2^{64} - 1$, un magnífic exemplar de vint xifres: 18.446.744.073.709.551.615, en Josep va reflexionar sobre la seva existència: existeixen tots aquests grans de blat? Han existit mai? Podem parlar d'una existència real —món físic— i d'una d'ideal —món matemàtic—? També ens va presentar algunes qüestions que us proposo a continuació:

► Problema 8: Observa el temps que trigues a comptar els successius nombres. Quant temps trigaries a comptar tots els grans de blat? Aquest temps és superior o inferior a l'edat de l'univers?

► Problema 9: Imagina't que escrius els nombres un a continuació de l'altre, començant per 1 i acabant pel nostre nombre de vint xifres. Quantes xifres hauràs d'escriure? Quans blocs de DIN A4, de cent fulls cadascun, escrits per les dues cares, necessitaries?

Si encara no us heu marejat amb aquests nombres immensos, penseu en altres quantitats que requereixin nombres semblants, ja sigui a partir de situacions de la realitat, com per exemple el nombre d'Avogadro ($6{,}02214179 \times 10^{23}$), en situacions de jocs d'atzar (de quantes maneres es poden ordenar les 52 cartes d'una baralla?) o en situacions matemàtiques, com per exemple la següent: quin és el nombre més gran que podeu escriure emprant només tres xifres? Tots aquests nombres que heu trobat són majors o menors que el nostre protagonista?

Com no podia ser d'una altra manera, acabaré amb un problema de nombres naturals que em van proposar la Marta Berini i l'Antoni Gomà. És força senzill, però ajuda a reflexionar sobre el significat de les xifres que constitueixen un nombre, especialment perquè, com veureu en llegir l'enunciat, aquest significat pot ser divers, i no sempre és senzill fer compatibles diferents significats.

► Problema 10: Suposeu que escriviu un nombre de *n* xifres: quin ha de ser el nombre si volem que la primera xifra (la de l'esquerra) indiqui el nombre de zeros que té el nombre que hem escrit, la segona xifra indiqui el nombre d'uns, la tercera el nombre de dosos i així successivament. Per exemple, 2020 compleix les condicions, ja que té dos zeros, cap u, dos dosos i cap tres. Com podeu suposar, hi haurà més d'un nombre que compleixi aquestes condicions; però n'hi ha molts o pocs? Una vegada trobats, sabríeu justificar que no n'hi ha cap altre?

Fins aquí l'article d'avui. Espero retrobar-vos en el proper número de la revista i us prometo que en aquesta ocasió el tema no seran els nombres naturals, ni petits ni grans.