

Introducció als desenvolupaments de determinades superfícies reglades des de l'anàlisi matemàtica

Xavier Gelada Serrat

Institut Bosc de la Coma d'Olot
xgelada@xtec.cat

Resum

Els cossos geomètrics determinats per superfícies reglades desenvolupables, com el cilindre tallat per plans oblics, el con oblic de base circular o interseccions vàries d'aquests tipus de sòlids, estan sempre presents en l'entorn quotidià a través de múltiples àmbits del coneixement com l'art, l'arquitectura o el disseny industrial. En el sentit més ampli, l'aplicabilitat d'aquestes estructures en la societat actual és, per tant, fonamental. Malgrat tot, les fonts d'informació disponibles sobre l'estudi d'aquests desenvolupaments estan orientats, bàsicament, a la construcció geomètrica amb regla i compàs o a la generació d'imatges digitals, sense deduir o explicitar l'equació dels traçats. Per tant, el que es pretén en aquest article és iniciar l'exploració d'aquestes equacions i dels resultats significatius que se'n puguin derivar a través de l'anàlisi matemàtica, per contribuir a la seva difusió. D'aquesta manera, la geometria diferencial i la de regla i compàs, lluny d'excloure's, es complementen meravellosament bé, en aquest cas, per a un millor coneixement de determinades superfícies isomètriques al pla.

Abstract

Geometrical bodies determined by developable ruled surfaces such as a cylinder cut by oblique planes, an oblique cone with a circular base, and multiple other intersections of such solid bodies are constantly made present in our everyday lives by several knowledge disciplines such as art, architecture and industrial design. In a wider sense, the applicability of such structures in present society is therefore essential. However, the only available sources of information on the study of such developments are mainly geared to either geometrical construction of the ruler-and-compass nature, or to generating digital images, thus paying no attention to the deduction or explanation of their underlying equations. This is why the main purpose of this article lies in introducing the exploration of such equations and the significant results which derive from them through mathematical analysis, in order to make them more familiar to a wider audience. In this way, both differential geometry and ruler-and-compass geometry, far from excluding one another, complement each other wonderfully, and lead to a better understanding of certain isometric-to-the-plane surfaces.

La finalitat d'aquest article és iniciar l'estudi d'alguns cossos geomètrics constituïts per superfícies reglades desenvolupables, centrant-se en les equacions que determinen els traçats al pla a través de l'anàlisi matemàtica. I paral·lelament, mostrar tant la bellesa dels conceptes

geomètrics implicats com la seva indubtable aplicabilitat en l'art i la ciència. L'arquitectura, el disseny industrial o les arts aplicades a l'escultura són alguns dels nombrosos àmbits del coneixement en què apareixen aquestes formes. A continuació es mostren objectes reals que n'exemplifiquen algunes:

Cilindre tallat per un pla oblic



Fig. 1. Imatge esquerra: Conductes de climatització. Palau Sant Jordi (Barcelona). Colze segmentat de 90°.



Fig. 2. Imatge dreta: Escultura de Josep Guinovart Bertran, titulada *Portal volcànic* (Olot). Suport central constituït per cilindres simètricament seccionats.

Con oblic de base circular



Fig. 3. Reduccions còniques obliqües de bases paral·leles, utilitzades com a elements d'unió intermèdia entre dues peces de diferent diàmetre. D'aplicació general en conductes de captació de pols i en especial en canones de transport pneumàtic de materials i partícules.¹



Fig. 4. Accessori de bany. Penjador de braç cònic oblic, truncat i amb bases circulars no paral·leles.

1. Imatges cedides per Estudi Sicília (Girona) i per Metal·lúrgica Ros (Sant Jaume de Llierca, Girona).

Interseccions



Fig. 5. Font pública. Població de l'Escala (Girona). Intersecció perpendicular de cilindres de diferent diàmetre i eixos secants.



Fig. 6. Entroncaments pantaló. Intersecció simètrica de dos conductes cònics rectes d'igual diàmetre i eixos secants, formant un angle de 60°. Sortida superior central cilíndrica de diferent diàmetre. D'aplicació en xarxes de canonades de captació de pols i transport pneumàtic.²

Alguns d'aquests objectes han estat construïts a partir de desenvolupaments, mentre que d'altres no. Però, al marge de la tecnologia emprada, qualsevol producte constituït per aquests tipus de cossos geomètrics pot ser susceptible de ser fabricat mitjançant el traçat geomètric de corbes al pla.

Pel que fa, específicament, als traçats dels desenvolupaments de superfícies reglades isomètriques al pla, la bibliografia existent està orientada, bàsicament, a l'ús del regle i el compàs o a la generació d'imatges digitals, però no pas a la deducció analítica de les equacions que els determinen. És justament aquesta l'òptica a partir de la qual es pretén començar a fer-ne un estudi, que en aquest article se centrarà en el cilindre tallat per un pla oblic:

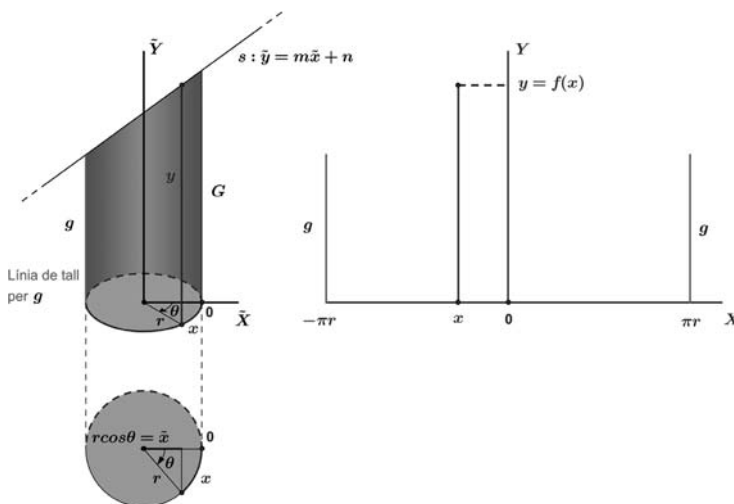


Figura 7. Plantejament analític del desenvolupament del cilindre tallat per un pla oblic.

2. Imatges cedides per Estudi Sicília (Girona) i per Metal·lúrgica Ros (Sant Jaume de Llierca, Girona).

En la figura s'observa que, a mesura que varia $\theta \in [-\pi, \pi]$, es recorre la base del cilindre obtenint així diferents arcs de longitud x (negatius per $\theta \in [-\pi, 0]$ i positius per $\theta \in (0, \pi]$, atès que $x = r \cdot \theta$). A cadascun dels valors x li correspon una única altura y , de manera que ens trobem davant una funció $y = f(x)$ que cal trobar.

Projectant ortogonalment el segment radi en l'eix \tilde{X} es té que per a cada valor x s'obté un valor $\tilde{x} = r \cos \theta = r \cos \left(\frac{x}{r}\right)$, tal com mostra la figura. I si considerem la recta $s: \tilde{y} = m\tilde{x} + n$, determinada per la diagonal major de la secció el·líptica en tallar el cilindre per un pla oblic, és clar que $y(x) = \tilde{y}(\tilde{x})$ quan $\tilde{x} = r \cos \left(\frac{x}{r}\right) \Rightarrow y(x) = \tilde{y}\left(r \cos \left(\frac{x}{r}\right)\right) = m \cdot r \cos \left(\frac{x}{r}\right) + n$.

Per tant, només cal trobar el pendent i l'ordenada a l'origen de s . Mirant la figura és clar que $m = \frac{G-g}{2r}$ i $n = \frac{g+G}{2}$, on g i G són les altures mínima i màxima, respectivament. Aleshores,

$$y(x) = \frac{G-g}{2r} \cdot r \cos \left(\frac{x}{r}\right) + \frac{g+G}{2} \Rightarrow$$

$$y = f(x) = \frac{1}{2} \left[g + G + (G-g) \cos \left(\frac{x}{r}\right) \right], \quad x \in [-\pi r, \pi r].$$

Fent el gràfic de la funció obtenim el desenvolupament de forma ràpida i en qualsevol punt:

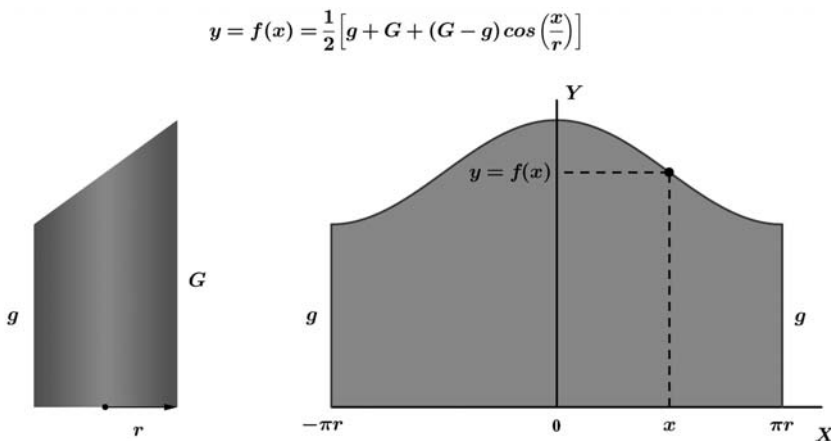


Figura 8. Funció i desenvolupament del cilindre tallat per un pla oblic.

Els avantatges d'haver obtingut l'equació del traçat en relació amb el maneig del regle i el compàs són molts i variats.³ d'entrada ens permet realitzar el desenvolupament amb una gran rapidesa i precisió, a més de poder treballar de forma genèrica amb qualsevol cilindre tallat per un pla oblic⁴ en funció dels paràmetres r, g i G . A més, l'expressió analítica $y = f(x)$

3. Aquesta afirmació no pretén menystenir en absolut la geometria de regle i compàs. Al contrari, la geometria clàssica de l'antiga Grècia, malauradament oblidada durant bona part del segle xx per la «matemàtica moderna», és un dels pilars imprescindibles per edificar aquest tipus de coneixement.

4. Com a mostra, es pot fer ús de l'aplicació *Desenvolupament_Cilindre_Seccionat_Analitic.html* Per obtenir-la cal accedir a l'adreça electrònica de l'aplicació web ARC <http://apliense.xtec.cat/arc> (o a través de la referència 2 de la bibliografia), i fer la cerca per títol (*El Cilindre Seccionat*) o per autor (Xavier Gelada Serrat). Finalment, cal clicar en l'ítem «Aplicacions en GeoGebra i Excel associades a les activitats».

ens diu que la corba descrita és una sinusoide, lluny d'una possible primera percepció que el desenvolupament podria adquirir un perfil triangular.

Però l'obtenció d'aquesta equació també indueix de forma natural a calcular la superfície del sòlid i la longitud de la secció mitjançant el càlcul integral:

Superfície del sòlid

Atès que la mètrica es manté, la superfície lateral del cilindre tallat per un pla oblic serà donada per l'àrea del seu desenvolupament, és a dir:

$$\begin{aligned}
 \text{Sup. Lat.} &= \int_{-\pi r}^{\pi r} f(x) dx = \int_{-\pi r}^{\pi r} \frac{1}{2} \left[g + G + (G - g) \cos\left(\frac{x}{r}\right) \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left[(g + G)x \right]_{-\pi r}^{\pi r} + (G - g)r \int_{-\pi r}^{\pi r} \frac{1}{r} \cos\left(\frac{x}{r}\right) dx \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[2\pi r(g + G) + (G - g)r \cdot \left[\sin\left(\frac{x}{r}\right) \right]_{-\pi r}^{\pi r} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} [2\pi r(g + G) + (G - g)r \cdot (0 - 0)] = \pi r(g + G) \Rightarrow \text{Sup. Lat.} = \pi r(g + G).
 \end{aligned}$$

Cal assenyalar que, en el cas del cilindre tallat per un pla oblic, se'n pot obtenir la superfície lateral sense l'ús d'integrals. Observem la figura següent:

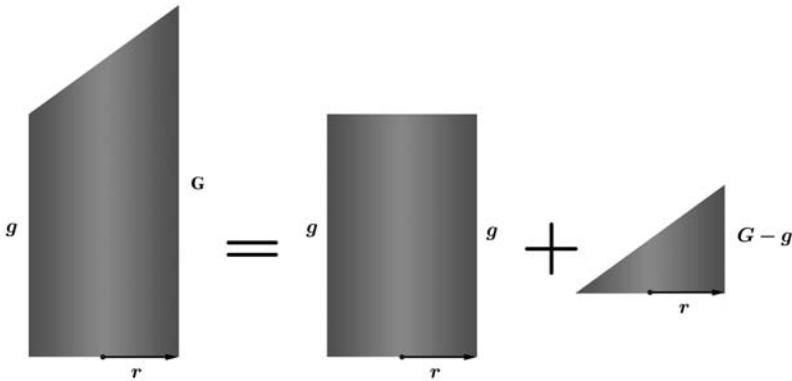


Figura 9. Descomposició geomètrica del cilindre tallat per un pla oblic.

La superfície lateral del cilindre tallat per un pla oblic (*Sup. Lat.*) és igual a la suma de la superfície lateral del cilindre S_1 i la superfície lateral de la part seccionada $S_2 \Rightarrow \text{Sup. Lat.} = S_1 + S_2$. És evident que S_2 és la meitat de la superfície lateral del cilindre que determina i, per tant:

$$\text{Sup. Lat.} = 2\pi r g + \frac{2\pi r(G - g)}{2} = 2\pi r g + \pi r G - \pi r g = \pi r(g + G)$$

que és l'expressió obtinguda amb la integral.

Com és lògic, aquest tipus de resolució per descomposició no és possible en la majoria dels cossos geomètrics limitats per superfícies corbes, encara que siguin desenvolupables al pla, però això no resta l'interès de relacionar ambdós procediments, pel fet d'estar tan allunyats l'un de l'altre.

Si es vol tenir en compte les bases inferior i superior en el càlcul de la superfície considerant el cilindre seccionat tapat, caldrà afegir-ne les àrees:

$$\text{Àrea de la base circular} = \pi r^2.$$

En canvi, l'àrea de l'altra base serà donada per una secció el·líptica d'equació reduïda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Observant la figura 3 és clar que el semieix major és

$$a = \frac{\sqrt{(2r)^2 + (G - g)^2}}{2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{G - g}{2}\right)^2}$$

i el menor és $b = r$.

Així, l'equació reduïda de la secció el·líptica és $\frac{x^2}{r^2 + \left(\frac{G - g}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$.

Per calcular l'àrea que delimita relacionarem la funció $g(x)$ que determina la meitat superior de qualsevol el·lipse al llarg del seu eix $2a$ amb la funció $c(x)$ de la semicircumferència superior de diàmetre l'eix $2a$. Tot i que aquesta relació és perfectament coneguda (relació d'afinitat), és adient raonar-la:

Aïllant la y de signe positiu de l'equació genèrica reduïda $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ s'obté $g(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$. L'expressió del radical obeeix a la funció de la semicircumferència superior de diàmetre $2a$ descrita. Per tant, es té la relació d'afinitat $g(x) = \frac{b}{a} \cdot c(x)$. En altres paraules, la imatge de la funció el·líptica per a cada valor x és la de la circumferència multiplicada pel factor $\frac{b}{a}$, tal com mostra la figura següent:

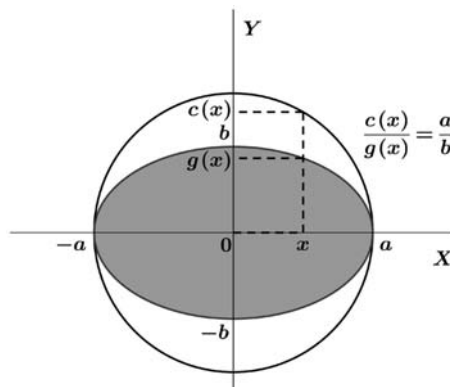


Figura 10. Relació d'afinitat entre l'el·lipse i la circumferència principal.

Per dir-ho de forma planera i intuïtiva, una el·lipse es pot interpretar com la circumferència tangent exterior de diàmetre l'eix major (circumferència principal de l'el·lipse), comprimida de forma homogènia i ortogonalment a l'eix esmentat.

Conseqüentment, l'àrea d'una el·lipse és, de forma raonada:

$$2 \int_{-a}^a g(x) dx = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{a} \cdot c(x) dx = \frac{2b}{a} \int_{-a}^a c(x) dx = \frac{2b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{2} = \pi ab,$$

expressió àmpliament coneguda.

En el cas del cilindre tallat per un pla oblic, tenim que l'àrea de la secció el·líptica és, per tant,

$$\pi \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2} \cdot r.$$

Finalment, doncs, la superfície total del cilindre tallat per un pla oblic amb els paràmetres que es mostren en les figures 1, 2 i 3, tenint en compte tant la base circular com la secció el·líptica, és:

$$\text{Sup. Total} = \pi r (g + G) + \pi r^2 + \pi \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2} \cdot r,$$

que si es vol es pot expressar com:

$$\text{Sup. Total} = \pi r \left[g + G + r + \sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2} \right],$$

és a dir:

$$\text{Sup. Total} = \pi r (\text{suma de les altures} + \text{suma dels semieixos})$$

interpretant la circumferència com un cas particular d'el·lipse de diàmetres iguals.

Longitud del traçat

Atès que la mètrica entre el sòlid i el desenvolupament es manté, la longitud de la secció el·líptica, que denotarem per Long., és la mateixa que la longitud del traçat del desenvolupament.

D'una banda, podem utilitzar la funció deduïda respecte al traçat del desenvolupament $y = f(x) = \frac{1}{2} \left[g + G + (G - g) \cos\left(\frac{x}{r}\right) \right]$, $x \in [-\pi r, \pi r]$ que es mostra en la figura 8; de l'altra, la funció de la meitat superior de l'el·lipse $g(x) = y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [-a, a]$ (figura 10), que una vegada substituïdes les expressions de a i b anteriors s'escriu com:

$$g(x) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2 - x^2},$$

en què el domini és $D(g) = \left[-\sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2}, \sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2} \right]$.

Així, la longitud de la secció el·líptica Long. és la mateixa tant en la corba de $f(x)$ com en la de $g(x)$ doblada simètricament respecte a l'eix major (ja que representa la meitat de l'el·lipse). I com que les dues funcions són de classe C^1 i contínues al seu domini, podem escriure:

$$\text{Long.} = l(f) = \int_{-\pi r}^{\pi r} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2 \cdot l(g) = 2 \cdot \int_{-\sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2}}^{\sqrt{r^2 + \left(\frac{G-g}{2}\right)^2}} \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$$

Ara bé, ni $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ ni $\sqrt{1 + (g'(x))^2}$ tenen primitives expressables amb funcions simples, però això no impedeix poder calcular amb la precisió desitjada les integrals amb paràmetres concrets mitjançant mètodes numèrics d'integració variis (fórmules de Newton-Cotes, la Quadratura de Gauss...). La multiplicitat de programari lliure d'integració numèrica, al marge d'elaborar programes propis, permet obtenir amb facilitat resultats ràpids i precisos.

Això és, justament, el que farem en un cas real a l'apartat següent, que ens servirà també per a il·lustrar els continguts teòrics desenvolupats.

Aplicació de la teoria a un objecte concret

Tornant al principi del document, hi trobem objectes concrets com a exemples de cossos geomètrics determinats per superfícies reglades desenvolupables. Aplicarem la teoria en el colze de 90° i de 80 cm de diàmetre⁵ situat a la part central de la imatge següent, que constitueix part del sistema de climatització del Palau Sant Jordi de Barcelona:

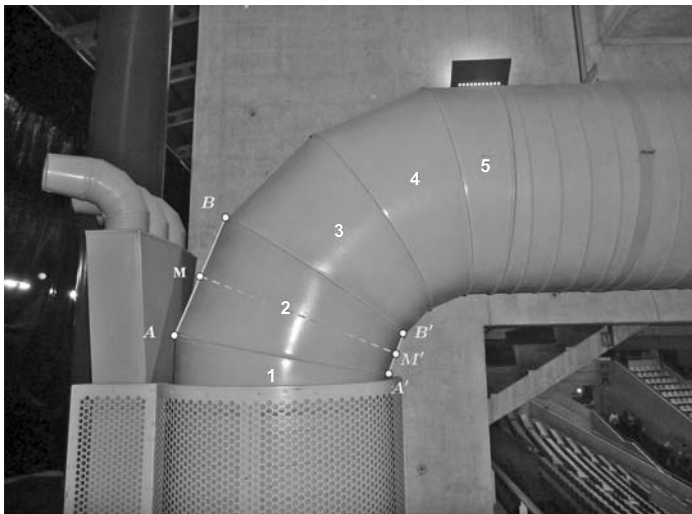


Figura 11

5. Per centrar-nos en l'essencial, no tindrem en compte si el diàmetre és interior, mitjà o exterior.

Si ens hi fixem, el colze està format per cinc peces: la 2, 3 i 4 són cilindres tallats per dos plans oblics de forma simètrica. En canvi, la 1 i la 5 són cilindres tallats per un sol pla oblic que, acoblats, formarien també un sol cilindre tallat per dos plans oblics simètrics. Per tant, encara que el colze estigui format per cinc peces, diem que està format per quatre elements, ja que n'hi ha tres de complets i un de seccionat per la meitat.

La longitud de \overline{AB} és pròxima a 48 cm, de manera que suposarem per raons pràctiques que, efectivament, $\overline{AB} = 48$ cm. A més, tots els plans oblics tallen els cilindres amb el mateix angle α , ja que els elements són idèntics (les peces 1 i 5 formen, juntes, un altre element idèntic als altres). En aquest sentit, observem que, en passar d'una peça a l'altra per cada unió, acumulem dues vegades l'angle α i com que el colze està format per quatre unions, en total girem un angle $2\alpha \cdot 4 = 8\alpha$, que ha de ser $90^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{90^\circ}{8} = 11,25^\circ = \frac{\pi}{16}$ rad.

Per tant, aplicant trigonometria elemental a l'alçat $AA' B' B$ de l'element de la imatge tenim la relació:

$$\tan \frac{\pi}{16} = \frac{\overline{AB} - \overline{A' B'}}{2} = \frac{48 - \overline{A' B'}}{160} \Rightarrow \overline{A' B'} = 48 - 160 \tan \frac{\pi}{16} \approx 16,17402 \text{ cm.}$$

Així, ja tenim les mides de l'element que, per simetria, és el doble del cilindre tallat per un pla oblic que hem estudiat. Utilitzant la notació de la teoria podem escriure: $2g \approx 16,17402$ cm, $2G = 48$ cm i $r = 40$ cm $\Rightarrow g \approx 8,08701$ cm, $G = 24$ cm i $r = 40$ cm, que, aplicats a la funció del desenvolupament superior,

$$y = f(x) = \frac{1}{2} \left[g + G + (G - g) \cos \left(\frac{x}{r} \right) \right], \quad x \in [-\pi r, \pi r]$$

donen la figura:

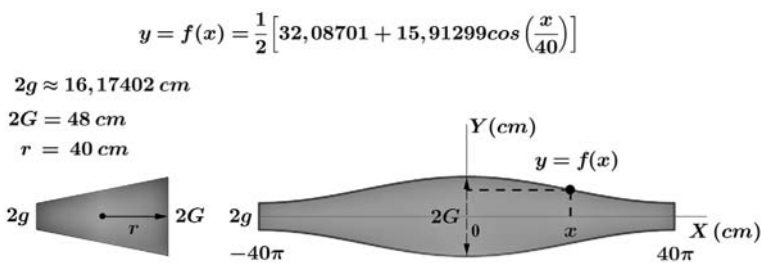


Figura 12. Funció i desenvolupament d'un element del colze.

Un aspecte d'interès quan es fan milers de colzes com el de la imatge és conèixer la longitud necessària de la soldadura per a fabricar-lo.⁶ Només per les unions entre les cinc peces que el formen, sense considerar la soldadura lateral per formar la peça en si, cal calcular l'expressió

6. Segons la tecnologia disponible i la funció que ha d'acomplir, s'utilitzen diferents procediments per a formar i unir les peces d'un colze: per tipus varis de soldadura, utilitzant cèrcols per a unir les pestanyes, engrapant-les, acoblant-les únicament per embotició... En aquest cas, suposarem que s'ha fet ús de la soldadura per a assegurar la màxima estanquitat.

4 · long., ja que està composta de quatre unions. Utilitzarem $f(x)$ en comptes de $g(x)$ (equació de la secció el·líptica), ja que $g(x)$, amb aquestes dades concretes, deriva en una expressió que la majoria d'integradors numèrics no són capaços d'avaluar.

$$4 \cdot \text{Long.} = 4 \cdot l(f) = 4 \cdot \int_{-\pi r}^{\pi r} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx =$$

$$= 4 \cdot \int_{-40\pi}^{40\pi} \sqrt{1 + 0,039566132 \sin^2\left(\frac{x}{40}\right)} dx \approx 7 \boxed{4 \cdot 253,795 = 1.015,18 \text{ cm}}$$

Per tant, la longitud de la soldadura del colze, únicament entre els elements, és 1.015,18 cm = 10,1518 m, aproximadament.

Val la pena comentar que aquests tipus de desenvolupaments no solen iniciar-se a partir dels segments laterals $2g$ (altura menor) o $2G$ (altura major), com en la figura 5 anterior (que s'inicia en $2g$), ja que això implicaria un efecte poc estètic en el conjunt del colze perquè les soldadures laterals de cada peça s'alternarien en els segments $2g$ i $2G$ (o g i G per a les peces 1 i 5) o, encara que es reordenessin, es formaria sempre una línia discontinua de soldadura. La figura següent il·lustra un desenvolupament del colze, a partir d'una planxa rectangular, que produiria aquest efecte no desitjat:

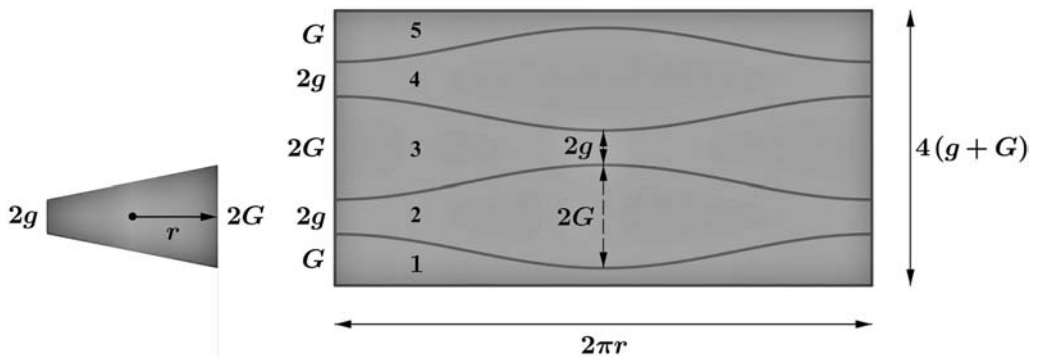


Figura 13. Desenvolupament no usual del colze a partir d'una planxa rectangular.

Per evitar aquest problema, es desenvolupen les peces a partir de l'altura mitjana entre la mínima i la màxima, és a dir, $\frac{2g + 2G}{2} = g + G$ en els cas dels elements (2, 3 i 4) i $\frac{g + G}{2}$ en les peces extremes (1 i 5), meitats d'un element.

La figura següent reflecteix la manera com habitualment es desenvoluparien les peces del colze:

7. El càlcul numèric d'integració es pot obtenir amb programari lliure com GeoGebra o amb l'integrador Wolfram Alpha[®], entre molts d'altres. Però també pot ser molt interessant utilitzar programari d'elaboració pròpia i fins i tot fer-ho manualment, acotant l'expressió de l'error.

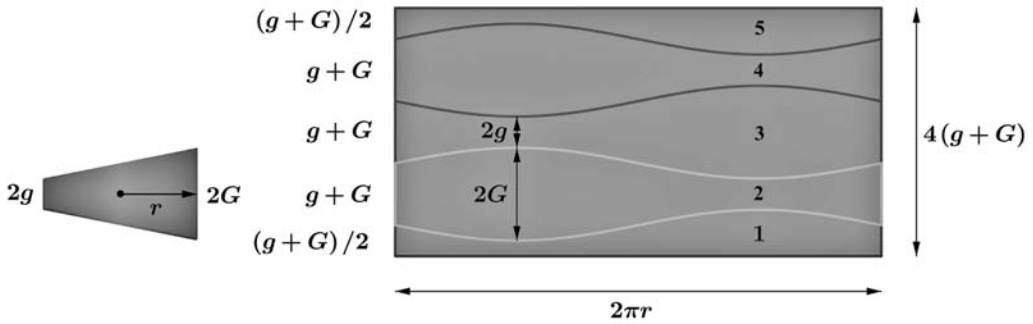


Figura 14. Desenvolupament habitual del colze a partir d'una planxa rectangular.

En aquesta configuració, la funció del traçat superior de l'element 2 és donada per la mateixa funció $y = f(x) = \frac{1}{2} \left[32,08701 + 15,91299 \cos \left(\frac{x}{40} \right) \right]$, però amb el domini definit en $x \in \left[-\frac{\pi}{2}40, \frac{3\pi}{2}40 \right] = [-20\pi, 60\pi]$, en comptes de l'interval $[-40\pi, 40\pi]$, tal com es reflecteix en les figures 12 i 13.

Observem que tots els altres traçats de les peces són determinats per la mateixa funció o la simètrica respecte a l'eix horitzontal.

D'aquesta manera, en el colze es poden alinear totes les soldadures laterals formant una línia contínua, a diferència del que passa en les figures 12 i 13.

En l'argot propi de l'àmbit de la planxisteria, la caldereria i la metal·lúrgia en general, el desenvolupament de l'element 2 (delimitat en color taronja) s'anomena *la sardineta*, una denominació francament encertada i bonica. Tots els altres elements prenen, també, aquesta forma peculiar (les peces 1 i 5 representen *mitja sardineta*).

Per tant, l'equació que expressa el traçat del desenvolupament d'una peça qualsevol d'un colze, sigui o no de 90° , de dimensions genèriques és determinada per l'expressió:

$$y = f(x) = \frac{1}{2} \left[g + G + (G - g) \cos \left(\frac{x}{r} \right) \right]$$

en el domini $x \in \left[\frac{-\pi r}{2}, \frac{3\pi r}{2} \right]$.

Òbviament, tots els càlculs sobre la superfície i la longitud que s'han fet amb $f(x)$ en el domini $x \in [-\pi r, \pi r]$ són idèntics utilitzant $f(x)$ en el domini $x \in \left[\frac{-\pi r}{2}, \frac{3\pi r}{2} \right]$, ja que l'amplitud dels dos dominis és $2\pi r$ i coincideix amb el període de la funció. Es deixa com a proposta d'activitat per al lector la comprovació d'aquestes igualtats i que els extrems del domini, $\frac{-\pi r}{2}$ i $\frac{3\pi r}{2}$, són abscisses de punts d'inflexió.

Continuant amb l'aplicació concreta al colze de 90° que hem tractat fins ara, si volem conèixer la longitud total de la soldadura, a la longitud de la soldadura de les unions $4 \cdot \text{long.} \approx 10,1518 \text{ m}$ caldrà afegir-hi la longitud de les soldadures laterals que formen cada peça. En la figura 7 queda clar que la longitud de la soldadura lateral és $4(g + G) \approx \approx 4 \cdot 32,08701 = 128,34804 \text{ cm}$. Per tant, la longitud total de la soldadura necessària només per a fer el colze de la imatge és, aproximadament, 11,435 metres.

En relació amb la superfície, només cal considerar, per a cada element del colze, l'expressió $2 \cdot \text{Sup. Lat.} = 2\pi r(g + G)$ perquè cadascun està format per dos cilindres simètrics tallats obliquament i sense tapes. I atès que el colze està constituït per quatre elements (cinc peces), la superfície total del colze és donada per $8 \cdot \text{Sup. Lat.} = 8\pi r(g + G)$. Substituint les dades concretes, obtenim que la superfície necessària de planxa, d'un gruix determinat, per a elaborar el colze és:⁸

$$8\pi r(g + G) \approx 8\pi \cdot 40 \cdot 32,08701 \approx 32.257,38 \text{ cm}^2 \approx 3,226 \text{ m}^2.$$

Consideracions finals

Els continguts d'aquest article representen l'evolució natural en l'aprofundiment matemàtic d'una part concreta de la llicència d'estudis retribuïda *Matemàtiques i Realitat* (2011),⁹ concedida pel Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya. Concretament, implica una continuïtat de caràcter tècnic de l'element *El Cilindre Seccionat*, al qual també s'hi pot accedir a través de l'aplicació web ARC <http://apliense.xtec.cat/arc> fent la cerca, per exemple, per títol de l'element o per autor.

Com a aplicacions interactives específiques hi ha dos *applets* en GeoGebra: d'una banda, *Desenvolupament_Cilindre_Seccionat_Analitic.html* i, de l'altra, *Simetria_Desenvolupament_Cilindre_Seccionat_html*, dins l'arxiu «Aplicacions en GeoGebra i Excel associades a les activitats».

Bibliografia

Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. *Currículum i Organització* [en línia]. Generalitat de Catalunya. <http://phobos.xtec.cat/edubib/intranet> [consulta: 30.7.2012].

Gelada, X. (2011). *Matemàtiques i realitat: Connexions a través de la resolució de problemes i el desenvolupament d'activitats interdisciplinàries* [en línia]. Barcelona: Generalitat de Catalunya. <http://www.xtec.cat/web/innovacio/recercaed/llicencies/cercador> [consulta: 26.8.2012].

Gomis, J. (1996). *Curvas y superficies en Diseño de Ingeniería*. València: Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia.

8. Cal esmentar que en el càlcul no s'ha incorporat la superfície de les pestanyes de cada peça perquè representen una superfície addicional poc significativa en relació amb el total. Malgrat això, és imprescindible tenir-les en compte en el traçat per poder fabricar el colze.

9. Referència 2 de la bibliografia.

Olave, A. (2004). *Manual práctico de desarrollos de calderería*. Barcelona: Ediciones Ceac.

Ortega, J. (1990). *Introducció a l'anàlisi matemàtica*. Bellaterra: Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.

