pensar

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

La portada del diari *Ara* del dimecres 12 de desembre de 2012, una data ben bonica (12-12-12), començava amb el titular següent: *El problema són les matemàtiques*, i continuava amb una notícia en què es comentava que, d'acord amb un informe de l'OCDE, els nens de nou anys suspenen aquesta assignatura i aproven just en llengua i ciències. No és d'aquesta notícia que vull parlar-vos, sinó del significat estricte del titular: El problema són les matemàtiques? Les matemàtiques són un problema? Potser els nostres joves tenen més dificultats per a aprendre matemàtiques que altres ciències (?) o que els joves d'altres països, potser els qui ens dediquem a ensenyar-les no ho fem globalment prou bé, o potser el nostre sistema educatiu no posa els mitjans necessaris per tal que les matemàtiques ocupin el lloc que els correspon. En tot cas, el problema no són les matemàtiques, sinó l'ús que en fem quan les ensenyem, perquè la salut de les matemàtiques segurament es podria mesurar precisament pels problemes: com més i més interessants problemes tinguem, i més ganes de resoldre'ls, més bona serà la salut de les matemàtiques, suposant, és clar, que entre tots siguem capaços de resoldre'n uns quants. Com deia Halmos (1980), els problemes són el cor de les matemàtiques, allò que realment les fa avançar. En matemàtiques, tenir bons problemes és essencial, a diferència del que sol passar en la nostra vida quotidiana.

Començaré la meva proposta d'avui amb una situació de nombres, elemental però molt interessant. Aquest hivern, cercant problemes de descomposició de nombres enters, en Joan Jareño me'n va explicar un que em va agradar molt i que ell titula: tallar i multiplicar. Vaig passar una bona estona treballant-hi, tant jo com els meus estudiants, i per això m'ha semblat adequat portar-lo a aquesta secció. En podeu trobar un estudi detallat al racó següent de la ja antiga però encara magnífica, i plena de bones idees, pàgina d'en Joan: http://calaix2.blogspot.com.es/2012/10/tallar-i-multiplicar.html D'aquesta pàgina, me n'agraden moltes coses, però la citació que l'encapçala és perfecta per a una secció com aquesta i em permeto la llicència de reproduir-la: «Ben sovint, l'esforç que els homes posen en activitats que semblen del tot inútils acaba sent molt important per camins que ningú no havia pogut preveure. El joc ha estat sempre la font de la cultura (Italo Calvino)».

A propòsit del problema, en Joan diu: «Hi ha problemes que són especials, i el que ho fa és la possibilitat d'explorar-los de maneres diferents segons el nivell educatiu en què ens moguem. Això vol dir que el problema no s'esgota. Que permet diferents aprofundiments i que, com aquest, ens porten de la primària al batxillerat».

L'enunciat del problema és el següent:

Problema 1. Tallar i multiplicar. Descomponem un nombre enter positiu en una suma d'altres enters positius. Com haurem de fer la descomposició si volem que, quan multipliquem els sumands de la descomposició, el producte sigui màxim? Per exemple, $37 = 5 + 12 + 20$ i $5 \cdot 12 \cdot 20 = 1200$. És possible trobar una descomposició millor? Quin serà el producte màxim? Sabríeu trobar una manera d'arribar a la solució per a qualsevol nombre? En aquest cas, preguntar pel producte mínim no té gaire sentit, ja que sempre hi ha una solució trivial.

És un d'aquells problemes bonics, d'aparença senzilla i sobretot amb repte, en què tothom pot començar a fer coses, descobrir regularitats i apropar-se a la solució, encara que tant la generalització com la demostració del fet que hem obtingut el resultat correcte sigui una mica més difícil.

Hem començat amb un problema numèric i continuarem amb un de geomètric que em va proposar, ja fa un temps, l'amic i company Xavier Valls i que diu així:

Problema 2. Cercles i triangles. Donades tres circumferències exteriors (no necessariament del mateix radi), construïu el triangle que té un vèrtex sobre cada circumferència i té àrea mínima. També podeu cercar el triangle de perímetre mínim.

A diferència de l'anterior, costa una mica més posar-s'hi, sobretot perquè al principi sembla que vagis perdut, i certament no és un problema senzill, però si us agraden, com a mi, els problemes de construccions geomètriques, i més concretament els problemes d'extrems, segur que hi passareu una bona estona.

El tercer problema me'l va proposar en Lluís Bibiloni, amb qui, juntament amb en Xavier Valls, formem un trio unit, entre altres coses, per la nostra afició a plantejar problemes i a discutir sobre les diferents maneres de solucionar-los, cosa que fem sempre que podem. El seu enunciat és el següent:

Problema 3. Punts vermells i blaus. Tenim 12 punts (6 de vermells i 6 de blaus) sobre una circumferència (com si assenyalessin les hores d'un rellotge). Demostreu que, per a qualsevol distribució dels 12 punts, sempre es pot traçar un diàmetre de manera que a cada costat hi hagi 3 punts vermells i 3 de blaus. El problema admet una generalització evident si considerem n punts ($n/2$ de cada color), de manera que a cada costat hi hagi $n/4$ punts de cada color.

Fins aquí tres problemes de matemàtica elemental, que no necessàriament vol dir senzilla, però que són abordables per qualsevol persona a qui agradi resoldre problemes. La segona part de l'article, el dedicaré als petits jocs d'estratègia. Els qui seguiu aquesta secció i coneixeu les meves aficions sabeu que m'agraden especialment els petits jocs d'estratègia per a dos jugadors. Vist un d'aquests jocs, el problema consisteix a determinar per a quin jugador (el primer o el segon) hi ha una estratègia guanyadora i quina és, és a dir, com ha de jugar el jugador per al qual existeix aquesta estratègia per a guanyar sempre, jugui com jugui, el seu adversari. El primer joc és molt senzill i fàcilment portable a l'aula; el segon, com l'anterior, admet una estratègia de resolució clàssica, mentre que en el tercer aquesta estratègia és difícilment aplicable, cosa que el fa força més difícil.

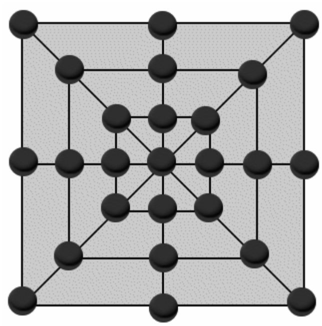
Problema 4. Joc per a dos jugadors. En un tauler rectangular de n files i m columnes situem n fitxes blanques, una en cada casella de la primera columna, i n fitxes negres, una en cada casella de la darrera. A cada jugada, un jugador mou una fitxa del seu color seguint la fila on es troba, tantes caselles com vulgui (com a mínim una), endavant o endarrere, a una casella buida, sense sobrepassar la fitxa de l'adversari. El primer jugador que no pugui moure cap fitxa del seu color perd la partida.

Analitzeu el joc segons el nombre de files i de columnes del tauler i determineu, per a cada tauler, quin jugador té avantatge i com ha de jugar per guanyar.

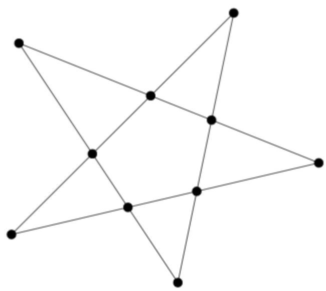
Una petita anàlisi del joc ens permet veure que no és gaire difícil trobar la manera de guanyar. L'interès del problema rau en la generalització del joc a un tauler qualsevol i en la determinació de les característiques del tauler perquè guanyi un jugador o l'altre.

Si no coneixeu el web del projecte NRICH (*enriching mathematics*), us animo a visitar-lo; n'hi ha prou d'anar a l'adreça: http://nrich.maths.org. En aquesta pàgina, hi trobareu una àmplia col·lecció de problemes i jocs molt interessant tant per a ensenyar matemàtiques a primària com a secundària. Els dos problemes següents d'avui, i amb els qual finalitzo la secció, són dos petits jocs d'estratègia. El primer és senzill i admet una estratègia guanyadora típica d'aquesta mena de jocs. El segon, en canvi, m'ha tingut entretingut força temps, juntament amb l'amic Xavier Valls, amb qui hem jugat i comentat la resolució del joc, i l'estratègia guanyadora del qual ens ha costat força de trobar; finalment ho hem fet, i espero que vosaltres també, però no hem estat capaços de trobar una solució general prou elegant, ja que el que hem fet és reduir el joc a un nombre molt petit de partides i veure que per a cadascuna existia una estratègia guanyadora, en tots els casos per al mateix jugador.

Problema 5. Joc per a dos jugadors. Col·loqueu 25 fitxes del mateix color en un tauler com el de la figura. Al seu torn, cada jugador retira el nombre de fitxes que vulgui (com a mínim una) sempre que siguin sobre una mateixa línia recta marcada al tauler i seguides (no separades per un espai buit). Quin jugador té avantatge? Com s'ha de fer per guanyar?



Problema 6. L'estrella de cinc puntes. Joc per a dos jugadors. Tenim una estrella de cinc puntes que, en començar, té una fitxa a cada punta i una a cada vèrtex del pentàgon interior (10 fitxes). Cada jugador, al seu torn, pot treure una o dues fitxes, però en aquest cas caldrà que les dues fitxes estiguin unides per un segment (i sense cap fitxa, o espai buit, entre elles). El jugador que treu l'última fitxa guanya la partida. Quin dels dos jugadors té avantatge? Com s'ha de fer per guanyar?



Aquí s'acaben els problemes del nostre article d'avui. Espero que passeu una bona estona amb les propostes que us he fet i que ens retrobem ben aviat.

Bibliografia

Halmos, P. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87(7), 519-524.

Jareño, J. Calaix +ie. Recreacions matemàtiques. http://www.xtec.cat/~jjareno/. El problema proposat es troba a: http://calaix2.blogspot.com.es/2012/10/tallar-i-multiplicar.html

Projecte NRICH (*enriching mathematics*). http://nrich.maths.org