El joc del 1089 en l'ensenyament dels nombres decimals i la introducció del llenguatge algebraic

Carles Dorce
Facultat de Matemàtiques-Universitat de Barcelona
cdorce@ub.edu

Resum

Quin és el secret del número 1089? En aquest article s'exposa una experiència didàctica que pretén introduir el llenguatge algebraic a l'ESO, paral·lelament a la pràctica dels algorismes de les operacions bàsiques amb nombres decimals. Les peculiaritats del número 1089 no són noves, però aquí es presenten de manera que el seu estudi permet treballar les matemàtiques des d'una vessant motivadora i innovadora.

Abstract

What is the secret of number 1089? This article shows an educational experience which introduces the algebraic language in the Compulsory School and allows to practice the basic operations with decimal numbers. The peculiarities of number 1089 are not new but here are presented so that they help to learn Mathematics from a motivating and innovative point of view.

1. Introducció

El coneixement dels nombres decimals és un tema força important dins dels ensenyaments obligatoris, ja que va molt lligat tant a l'aproximació de mesures contínues com al nostre actual sistema monetari de l'euro i els cèntims. A Catalunya, els trobem lligats específicament a un dels objectius del currículum de l'àrea de matemàtiques de l'educació primària (Decret 142/2007, pàg. 17):

> Comprendre el sistema de numeració decimal i el significat de les operacions. Calcular amb fluïdesa i fer estimacions raonables, tot utilitzant diferents tècniques: càlcul mental, càlcul escrit i càlcul amb calculadora i altres TIC, d'acord amb la situació.

Llegint detalladament aquest currículum, la introducció dels nombres decimals es fa al cicle mitjà i està molt lligada al seu reconeixement en contextos reals (Centeno, 1988). Les operacions entre nombres decimals no apareixen fins al cicle superior, en què el currículum ja parla de:

> Realització d'operacions amb nombres decimals que tinguin sentit (i amb un nombre reduït de xifres) emprant els algoritmes de la suma, la resta, la multiplicació i la divisió (amb decimals només al dividend) (Decret 142/2007, pàg. 22).

A l'educació secundària obligatòria, els nombres decimals apareixen al primer cicle molt relacionats amb la resolució de problemes de la vida quotidiana, malgrat que les operacions es reiteren un cop més (Decret 143/2007) i són part del temari de 1r i 2n d'ESO de la gran majoria d'editorials de llibres de text. En aquesta etapa és el moment de mostrar la necessitat real de l'ús d'aquests nombres donada la limitació que tenen els nombres enters en molts àmbits de la vida quotidiana. Paral·lelament, també hi ha d'haver una necessària descontextualització (Konic, Godino i Rivas, 2010, pàg. 58) que permeti treballar a part dels habituals problemes de mesures, pesos i preus. Així, en els diferents llibres de text ens trobem amb problemes que intenten vincular l'ús dels nombres decimals, les seves operacions i les seves aproximacions a la vida real.

D'altra banda, també trobem recollits força exercicis de càlcul descontextualitzats que intenten proporcionar la destresa i les habilitats necessàries perquè l'alumnat domini perfectament les operacions, les seves propietats i jerarquia, els arrodoniments... Seguint Isoda i Katagiri (2012, pàg. 98), el càlcul formal requereix una forta comprensió del mètode, així com la capacitat de fer mecànicament el càlcul sense haver de pensar en el significat de cada etapa. Steinle, Stacey i Chambers (2006) afirmen que molts dels problemes que troba l'alumnat en les operacions aritmètiques tenen molt a veure amb la dificultat en la interpretació de la notació decimal. Per aquest motiu, desvinculant els càlculs dels contextos es pot mantenir l'esforç cognitiu i executar les operacions més fàcilment. Tanmateix la proposta d'activitats mecàniques, repetitives, i que només pretenen entrenar l'alumnat en rutines no sol ser el millor exemple d'una classe participativa, rica, interessant i amena (Burgos, Domínguez i altres, 2006). Per tant, la tasca a l'aula s'ha de centrar en uns continguts interessants, que facilitin la negociació de significats i que generin actituds de recerca i descobriment.

En aquest sentit, aquí s'intenta presentar un joc numèric que englobi la rutina de la pràctica dels algorismes de les operacions amb nombres decimals i, de retruc, la introducció del llenguatge algebraic dins d'una classe que fomenti intensament la participació de l'alumnat i aporti una visió diferent d'aquella a la qual es pot estar acostumat. Habitualment, a les aules se sol utilitzar un llibre de text de referència dels molts que hi ha al mercat i que permet tant al professorat com a l'alumnat disposar d'una guia didàctica en tot el camí de l'aprenentatge.

En l'experiència que aquest article detalla, la unitat didàctica que tracta específicament els nombres decimals del llibre de text que serveix de referència conté un total de cent sis exercicis i problemes que inclouen al voltant de cinc-cents apartats diferents. Gairebé la meitat de tots aquests apartats correspon a operacions amb nombres decimals, més del 90% de les quals són descontextualitzades. Per tant, un gran gruix del tema se centra a consolidar els algoritmes de la suma, la diferència, el producte i la divisió de nombres decimals independentment del seu ús en la vida real. Quin és l'enfocament correcte que hem de seguir si volem garantir un bon coneixement i ús dels algoritmes de les operacions amb nombres decimals sense convertir l'aula en un espai rutinari i previsible? En paraules de Miguel de Guzmán (1989):

> Les matemàtiques han estat i són art i joc i aquest component artístic i lúdic és tan consubstancial a la mateixa activitat matemàtica que qualsevol camp del desenvolupament matemàtic que no assoleix un cert nivell de satisfacció estètica i lúdica roman inestable.

El joc que aquí s'explicarà ha estat dut a terme en tres grups de 2n d'ESO d'un institut públic. En general, la fotografia de cadascun d'aquests grups (que sumen un total de vuitanta nois i noies) mostra un alumnat d'origen estranger en un percentatge de gairebé el 50% entre el qual hi ha quatre nouvinguts, és a dir, alumnes que són dins el sistema educatiu català des de fa menys de dos anys. El perfil general no és de necessitats educatives específiques, malgrat que majoritàriament no hi ha una cultura de l'esforç com a base. Els resultats de les proves internes d'avaluació mostren que l'assoliment de la competència bàsica matemàtica està en el 50%, dada que pot ser considerada no gaire dolenta (malgrat que molt millorable) si es compara amb els resultats obtinguts a les proves externes de competències bàsiques de sisè de primària fetes dos anys abans.

2. El joc del 1089

El número 1089 és un d'aquells nombres per als quals la paraula «interessant» queda curta a l'hora de definir-los. No és un nombre primer (la seva descomposició factorial és $3^2 \cdot 11^2$) i tampoc no pertany al limitat i selecte grup dels nombres perfectes (és un nombre deficient); no té cap nombre amic de parella ni té la fortuna de ser un nombre feliç. Així, doncs, quina deu ser la seva virtut?

2.1. Presentació de l'activitat

Aquesta activitat, que va despertar l'interès de personatges il·lustres com Lewis Carroll, Giuseppe Peano o Yakob I. Perelman, es fonamenta en les propietats del 1089, número que ha de passar a ser 10,89 per a poder treballar-lo en el context dels nombres decimals:

1. Pensa un nombre format per una xifra de les unitats i dos decimals: dècimes i centèsimes. El nombre ha de ser menor de 10,00.
2. Dóna-li la volta, de manera que la xifra de les unitats passi a ser la xifra de les centèsimes i viceversa.
3. Dels dos nombres decimals que tens ara, resta el petit del gran.
4. El resultat és un nombre decimal amb dues xifres decimals. Torna-li a donar la volta.
5. Suma el resultat de la diferència amb el resultat d'haver-lo girat. Quin nombre obtens?

Com es pot comprovar, l'activitat treballa la suma i la resta de nombres decimals i la identificació del valor posicional de les xifres en el nostre sistema de numeració.

2.2. Una mica d'història

És difícil concretar l'origen d'aquest problema malgrat que Lewis Carroll se'n va atribuir directament el descobriment (Carroll, 1898, pàg. 269):

> En conclusió, dono dues curiositats numèriques que crec que han estat descobertes per Mr. Dodgson.

La referència més antiga que n'he trobat és la seva aparició a la revista londinenca *Educational Times*, fundada en 1847 i dedicada a l'educació, la ciència i la literatura. El joc va ser proposat pel professor M. A. Orchard en 1890 i feia referència a quantitats monetàries. Tanmateix una nota al final de la resolució signada per Mr. Davis afirma que aquest «*trick —as he calls it*—» ja fa mesos que està de moda en els cercles londinencs ben informats (*Educational Times*, 1890, prob. 10.441, pàgs. 78-79):

> Dóna una demostració algebraica del resultat següent: havent posat una suma de diners (lliures, xílings i penics): *a*) Inverteix-la (de tal manera que els penics esdevinguin lliures) i resta-la;

b) Inverteix aquesta última resta, i suma; aleshores el resultat és constant, i és £12, 18*x*. 11*p*., tal com es mostra en l'exemple annex. També, (2) generalitza el teorema:

£	*x*.	*p*.
10	17	5
5	17	10
4	19	7
7	19	4
12	18	11

La resposta, la donen M. A. Anderson i B. A. Sewell, que aporten la majoria de les solucions. La solució parteix de considerar x, y, z els valors en ordre decreixent de les tres monedes. Per tant, existeixen dos nombres $k, k' \in \mathbb{Z}$ tals que $x = ky$ i $y = k'z$ (suposa $k > k' > 1$). Per tant, tota suma de diners és donada per l'expressió $ax + by + cz$ amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Com que el problema es refereix a quantitats monetàries, la solució especifica que $a < k'$ i $b < k$ i suposa que $c < a$ perquè es pugui fer la resta. En aquestes condicions, la resta és:

$$\begin{aligned}(ax + by + cz) - (az + by + cx) &= a\ (x - z) - c\ (x - z) = (a - c)\ (x - z) = \\ &= (a - c)\ (x - y + y - z) = (a - c)\ (ky - y + k'z - z) = \\ &= (a - c)\ [(k - 1)\ y + (k' - 1)\ z]\end{aligned}$$

Siguin $p, q \in \mathbb{Z}$ de manera que $a - c = k - q = k' - p$ amb $q < k$ i $p < k'$. Aleshores, la resta esdevé:

$$\begin{aligned}(a - c)\ [(k - 1)\ y + (k' - 1)\ z] &= (a - c - 1)\ ky + qy + (a - c - 1)\ k'z + pz = \\ &= (a - c - 1)\ x + (a - c - 1 + q)\ y + pz = \\ &= (k' - p - 1)\ x + (k - 1)\ y + pz\end{aligned}$$

Invertint el nombre i sumant, s'obté:

$$\begin{aligned}[(k' - p - 1)\ x + (k - 1)\ y + pz] + [px + (k - 1)\ y + (k' - p - 1)\ z] &= \\ = (k' - 1)\ x + 2\ (k - 1)\ y + (k' - 1)\ z &= \\ = k'x + (k - 2)\ y + (k' - 1)\ z&\end{aligned}$$

resultat que és independent de a, b i c si $k > 2$, cosa que és certa, ja que s'ha suposat que $k > k' > 1$. Com que una lliura equival a vint xílings i un xíling equival a dotze penics, $k = 20$ i $k' = 12$ i, conseqüentment, el resultat final és £12, 18*x*. 11*p*.

Alternativament, s'especifica que s'han rebut respostes resolent l'apartat (1) suposant $a > c$ i fent l'operació directament:

£	*x*.	*p*.
a	b	c
c	b	a
$a - c - 1$	19	$c - 12 - a$
$c - 12 - a$	19	$a - c - 1$
11	38	11

És a dir, £12, 18*x*. 11*p*.

Dos anys més tard (1892), W. W. Rouse Ball, *fellow* del Trinity College de Cambridge, va incloure el problema general com a tercer exemple de la secció «Trobar el resultat d'una sèrie d'operacions fetes sobre un nombre qualsevol (desconegut per l'operador) sense preguntar cap qüestió» (Rouse Ball, 1892, p. 8-9). L'exemple imposa que el nombre $100a + 10b + c$ compleixi $|a - c| > 1$ i ho il·lustra amb un exemple concret annexat a la regla general:

237	$100a + 10b + c$
732	$100c + 10b + a$
495	$100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$
594	$100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$
1089	$900 \quad + \quad 180 \quad + \quad 9$

A més a més, Rouse Ball va generalitzar que si el nombre de tres xifres està donat en base *r (radix)*, el resultat de les operacions és $(r-1)(r+1)^2$. Com en l'exemple $r = 10$, el resultat és igual a $9{\cdot}11^2 = 1.089$. Posteriorment, en la traducció i edició francesa, *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*, J. Fitz-Patrick (Rouse Ball i Fitz-Patrick, 1898) va afegir-hi que, en qualsevol base de numeració, el nombre obtingut s'escriu $(r - 1)(r + 1)^2 = r \cdot r^2 + (r - 2)r + (r - 1)$.

El quart exemple de la mateixa secció (Rouse Ball, 1892, pàg. 9-10) és el problema monetari d'Orchard, però amb la concreció que el nombre de lliures ha de ser inferior a 12 i que la diferència entre el nombre de lliures i el nombre de penics ha d'excedir la unitat (la primera condició és evident, ja que en invertir les xifres, si el nombre de lliures fos més gran de 12, el de penics de la nova quantitat també seria major de 12 i s'haurien de convertir en xílings). Al final de l'exemple, Rouse Ball generalitza el resultat a qualsevol sistema monetari, però no en dóna cap demostració. En 1893, S. Gibney va proposar el mateix problema a la revista *The Boy's Own Paper* (Gibney, 1893) puntualitzant que «la curiositat aritmètica és força nova» i aplicant-lo al sistema monetari francès (99 francs i 99 cèntims), al sistema monetari germànic (29 tàlers i 29 groschen, en què 1 tàler és igual a 30 groschen) i al sistema de pesos *avoirdupois* (28 *hundredweights*, 2 quarters i 27 lliures, on 1 *hundredweight* correspon a 4 quarters i 1 quarter és igual a 28 lliures). Ja en 1917, H. Dudeney recollia el problema afirmant (Dudeney, 1917, pàg. 5 i 151):

> La majoria de la gent sap que si prens qualsevol suma de diners en lliures, xílings i penics de manera que el nombre de lliures (menor de £12) excedeixi el de penics [...], el resultat és sempre £12, 18*x*. 11*p*. Però si ometem la condició «menor de £12» i permetem que no hi hagi xílings o penics, (1) Quina és la menor quantitat a la qual no podem aplicar la regla? (2) Quina és la major quantitat a la qual es pot aplicar? Per descomptat, quan invertim una quantitat com £14, 15*x*. 3*p*., s'ha d'escriure £3, 16*x*. 2*p*., que és el mateix que £3, 15*x*. 14*p*.

Observem que, menys de vint anys després de la seva primera publicació, Dudeney ja va afirmar que era un problema conegut per «la majoria de la gent» i era capaç de reformular-lo buscant noves propostes. Les solucions que va donar són, respectivament, £33 i £23, 19*x*. 11*p*. Malauradament, no va donar explicacions dels seus càlculs. En 1922, T. O'Conor Sloane va reproduir el càlcul amb les monedes britàniques i va afegir també el càlcul a partir d'una quantitat de dòlars americans inferior a 10,00$ obtenint sempre el resultat final de 10,89$ (O'Conor Sloane, 1922, pàg. 178-180).

Finalment, tornant a l'edició anglesa de Rouse Ball, el primer i segon problemes dels «Altres problemes amb nombres de l'escala denària» (Rouse Ball, 1892, pàg. 12-13), secció que pretén recollir uns quants resultats que «semblen ser desconeguts per molts dels compiladors de llibres de trencaclosques», mostren proposicions relatives al resultat de la inversió de les xifres d'un nombre de tres xifres:

> Primer problema: Pren un nombre de tres xifres, amb la primera i la tercera xifra diferents. Inverteix l'ordre de les xifres. Resta el nombre format de l'original. Aleshores, si l'última xifra de la diferència és dita, tots els dígits de la diferència són coneguts.

Si el nombre inicial és $100a+10b+c$, és clar que la diferència d'ambdós nombres és igual a $99\ (a-c)$ amb $0 < a-c \leq 9$. Per tant, aquesta diferència només pot ser igual a 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 o 891. Conseqüentment, si ens diuen l'última xifra de la diferència, la segona sempre serà 9 i la primera serà la resta de 9 menys la tercera. Aquest resultat també el van recollir Berkeley i T. B. Rowland al seu *Card Tricks and Puzzles* del mateix any 1892 (pàg. 10), on s'explica que el resultat de la resta és del tipus $100A+90+C$ amb $A+C=9$.

> Segon problema: (i) Pren qualsevol nombre. (ii) Inverteix-ne xifres. (iii) Troba la diferència entre el nombre format a (ii) i el nombre original. (iv) Multiplica aquesta diferència per qualsevol nombre. (v) Esborra del resultat qualsevol xifra excepte un zero. (vi) Llegeix el romanent. Aleshores, la suma de les xifres del romanent restada del següent múltiple de 9 possible dóna com a resultat la xifra ratllada. Això és clar, ja que el resultat de l'operació (iv) és un múltiple de 9 i la suma de les xifres de qualsevol múltiple de 9 és també un múltiple de 9 [...].

O'Conor Sloane (1922, pàgs. 181-182) va afegir que, si es multiplica la diferència obtinguda per qualsevol nombre, aquest joc també funciona amb el producte obtingut. El resultat té molt a veure amb la regla del 9 per a la comprovació d'operacions, la qual probablement té el seu origen en les matemàtiques índies o àrabs malgrat que l'escriptor romà Hipòlit (segle III) ja la usava en certes consideracions numerològiques (Smith, 1958, pàgs. 154-156, i Krantz, 2010, pàgs. 67-70). Fibonacci la va incloure al seu *Liber abaci* (Siegler, 2002, pàgs. 41-42 i 46-47) i després va ser àmpliament reproduïda a les aritmètiques renaixentistes, com per exemple al *Triparty en la science des nombres* de Nicolas Chuquet (1484, pàgs. 51-53) o, a casa nostra, a la *Summa de l'art d'aritmètica* de Francesc Santcliment (1482, pàgs. 93-101).

Malgrat no tenir una relació directa amb el nombre 1.089, és important notar que una de les primeres referències a un problema que implica la inversió de les xifres d'un nombre es pot trobar al *The Ladies' Diary* de 1751, una publicació orientada al públic femení que tractava temes molt diversos, entre els quals problemes matemàtics (Leybourn, 1817, pàg. 49):

Qüestió 338, a càrrec de Mr. William Leighton

> Dues persones, A i B, apostant en una juguesca, A guanya de B un cert nombre de guinees, consistent en [un nombre de] tres xifres que estan en progressió aritmètica de manera que si el nombre de guinees es divideix entre la suma de les seves xifres, el quocient és igual a 48; i si restem 198 del nombre de guinees, les xifres queden invertides. Troba el nombre de guinees guanyades.

La resposta va ser donada l'any següent per R. Gibbons resolent el sistema d'equacions corresponent. Si el nombre és $100a+10b+c$, com que les xifres estan en progressió aritmètica, tenim que $a+c=2b$. A més a més:

$$\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = 48 \quad \text{i} \quad (100a+10b+c) - 198 = 100c+10b+a$$

Resolent, obté el nombre 432.

2.3. Presentació didàctica

Aquesta activitat està pensada per dur-la a terme després de treballar la suma i la diferència amb nombres decimals a 2n d'ESO. Se suposa que l'alumnat ja té un cert bagatge en el tema des de cursos anteriors, malgrat que s'hagi de tornar a repassar, i en alguns casos a reaprendre. La temporització programada és de dues sessions d'una hora i tot comença plantejant les cinc instruccions inicials. És evident que l'alumnat necessita llapis o bolígraf i paper i que en el procés dels càlculs és necessari un silenci remarcable, ja que, si es comencen a compartir resultats abans d'hora, es perd la gràcia final del joc.

Un cop garantit que tot l'alumnat ha finalitzat els cinc passos demanats, el professor o professora comença a demanar el resultat obtingut per cadascun dels alumnes i a anotar-lo a la pissarra (taula 1).

Taula 1. Resultats obtinguts pels 25 alumnes de segon A després de seguir les instruccions.

10,89	10,10	10,89	9,09	0,00
10,89	10,89	0,00	10,89	10,89
10,89	10,89	10,89	10,89	0,00
10,10	0,00	10,89	0,00	10,89
10,89	10,89	10,89	10,89	10,89

A mesura que els resultats es van escrivint a la pissarra, s'esdevé la reacció de sorpresa esperada, ja que l'alumnat no pensava que partint de qualsevol nombre es pogués arribar a uns resultats comuns. Com es pot veure, van sortir quatre resultats possibles: 0,00, 9,09, 10,10 i 10,89. Per al professor o la professora, és evident que hi ha cinc casos en què l'alumnat ha pensat un nombre capicua i tres en què té dificultats en l'algorisme de la resta.

► *Pregunta 1: per què s'obté 0,00?*

Si al costat de cadascun dels resultats escrivim ara el nombre original pensat per cadascun dels alumnes (taula 2), de seguida surt l'evidència.

Taula 2. Nombres pensats pel 25 alumnes de segon A.

6,70	7,30	7,92	4,73	3,83
7,25	9,37	5,45	8,23	2,99
2,25	2,76	6,23	0,57	6,66
5,27	9,99	3,75	7,57	3,20
2,99	7,40	3,50	8,37	7,26

Per tant, entre tots els alumnes de la classe s'arriba a la conjectura:

si el nombre inicial és palindròmic	$\Rightarrow$	el resultat és 0,00

Ara es pot suggerir a l'alumnat que havia arribat a aquest resultat que torni a fer els cinc passos amb un nou nombre que no sigui capicua (taula 3) i abordar la segona pregunta:

► *Pregunta 2: per què s'obté 9,09 i 10,10?*

Taula 3. Nombres pensats (no palindròmics) pels 25 alumnes de segon A i els resultats obtinguts.

6,70 → 10,89	7,30 → 10,10	7,92 → 10,89	4,73 → 9,09	9,92 → 10,89
7,25 → 10,89	9,37 → 10,89	3,35 → 10,89	8,23 → 10,89	2,99 → 10,89
2,25 → 10,89	2,76 → 10,89	6,23 → 10,89	0,57 → 10,89	4,87 → 10,89
5,27 → 10,10	2,97 → 10,89	3,75 → 10,89	5,98 → 10,89	3,20 → 10,89
2,99 → 10,89	7,40 → 10,89	3,50 → 10,89	8,37 → 10,89	7,26 → 10,89

Aquest tema és un pèl delicat perquè es tracta de ressaltar l'error comès per tres alumnes concrets. Tanmateix l'aclaparadora aparició del nombre 10,89 ja ha de fer reflexionar els qui no l'han obtingut com a resultat. En l'experiència concreta d'aquesta aula, un dels alumnes que havia obtingut un 10,10 va voler sortir a la pissarra a fer les operacions corresponents:

$$\begin{array}{rr} 725 & 208 \\ -\,527 & +\,802 \\ \hline 208 & 1010 \end{array}$$

De seguida hi va haver un alumne que va advertir on era l'error i va passar el mateix per al cas 9,09. Per tant, entre l'alumnat es dóna un control dels resultats i s'acaba concloent que tots els resultats han de ser 10,89:

si el nombre inicial no és palindròmic	⇒	el resultat és 10,89

Ara ens podem preguntar:

► *Pregunta 3a: per què s'obté 10,89?*

Aquesta pregunta agafa per sorpresa l'alumnat, ja que habitualment no té les eines necessàries per a poder abordar la seva resposta. Des del punt de vista de la resolució de problemes, la demostració final és l'última etapa de l'activitat que ha d'aconseguir precisar les idees (Tall, 1991, pàg. 16). Seguint Dreyfus (1991, pàg. 35), l'estratègia que s'ha d'adoptar per a generalitzar un resultat és la de derivar-lo de casos particulars, identificant coses comunes i expandint els dominis de validesa. Per tant, reconvertirem la tercera pregunta en:

► *Pregunta 3b: què tenen en comú tots els nombres pensats perquè s'obtingui sempre el nombre 10,89?*

Les respostes correctes donades pels alumnes es poden resumir en les tres afirmacions següents:

1. Tots els nombres tenen una xifra senar.
2. Cap dels nombres pensats té un 1.
3. Cap nombre acaba en 4.

Ara l'alumnat pot comprovar per si mateix què passa en cadascun d'aquests casos. Evidentment, aplicant el problema a un nombre amb les tres xifres parelles, a un altre que tingui un 1 a la xifra de les unitats i a un de tercer que tingui un 4 a les centèsimes, l'alumnat arriba a la mateixa conclusió: el resultat és 10,89. Per tant, la casualitat en la no-aparició de certs paradigmes numèrics no és suficient per a poder demostrar la conjectura inicial. Hem particularitzat els casos i no hem trobat contraexemples que la refutin. A més a més, els exemples semblen confirmar-la i conseqüentment és molt probable que sigui certa. La justificació ha de ser descoberta a partir de l'estructura subjacent a la relació que connecta les dades del problema amb la conjectura (Torregrossa i Callejo, 2011, pàg. 41). Així, doncs, el pas següent és demanar a l'alumnat quin és el resultat de la diferència calculada en el segon pas del problema (taula 4).

Taula 4. Resultats de les diferències obtingudes després del segon pas.

5,94	6,93	4,95	0,99	6,93
1,98	1,98	1,98	4,95	6,93
2,97	3,96	2,97	6,93	2,97
1,98	4,95	1,98	2,97	2,97
6,93	6,93	2,97	0,99	0,99

Ara l'alumnat treu ràpidament dues conclusions:

1. La xifra de les dècimes sempre és 9.
2. La suma de totes les xifres és 18. Conseqüentment, la suma de les xifres de les unitats i de les centèsimes és igual a 9.

Els nombres que compleixen les dues condicions anteriors són 0,99, 1,98, 2,97, 3,96, 4,95, 5,94, 6,93, 7,92, 8,91 i 9,90. Analíticament, és fàcil comprovar que la suma d'aquests nombres amb els respectius resultats d'invertir les seves xifres és sempre 10,89. Per tant, només cal demostrar:

si el nombre inicial no és palindròmic	$\Rightarrow$	la seva diferència amb el resultat d'invertir les xifres és de la forma $A{,}9C$, on $A + C = 9$

Sense buscar-ho, el professor acaba de mostrar la necessitat d'introduir el llenguatge simbòlic, o algebraic, al problema. Així, el pensament matemàtic queda absolutament generalitzat d'una manera clara i simple i l'alumnat pot començar a procedir formalment (Isoda i Katagiri, 2012, pàg. 82). A més a més, hem canviat l'enunciat de la conjectura inicial de manera que el problema ens queda força simplificat i podem canviar la pregunta 3b per:

► *Pregunta 3c: si considerem un nombre de tres xifres, li invertim les xifres i calculem la diferència entre ambdós, sempre obtenim un resultat de la forma $A{,}9C$ amb $A + C = 9$?*

La resposta és donada per l'argument de W. W. Rouse Ball (1892), segons el qual, amb paciència i amb un exemple numèric concret al costat, és factible poder explicar qualsevol cosa a alumnat de 2n d'ESO. Això no obstant, el grau de comprensió d'aquest últim pas de la demostració no és global, ja que és el primer contacte de l'alumnat amb el llenguatge algebraic i no precisament d'una manera senzilla. S'ha de tenir en compte que la dificultat en l'abstracció que implica el llenguatge algebraic és una de les tres categories principals en les quals poden ser classificades les dificultats d'aprenentatge que implica la introducció de l'àlgebra (Lee, 2007). Les altres dues són la poca familiaritat que l'alumnat té amb la sintaxi del llenguatge algebraic i la confusió causada per les diferents aparicions de les lletres. Probablement, s'haurà de tornar a fer la demostració quan el bagatge en el camp de l'àlgebra sigui més complet. A favor del raonament queda la percepció global de la veracitat de la conjectura en vista dels resultats de la taula 4, ja que la noció de demostració tampoc no està encara consolidada.

2.4. Per tancar... un nou problema

La pregunta «Què passa si el nombre és major de 10,00?» va sorgir durant la classe. Un cop assimilada la propietat, la curiositat pot més que la dificultat i apareix de manera natural una pregunta com aquesta. La temporització de l'activitat no va permetre abordar la resposta dins de la primera sessió, ja que la seva resolució no és fàcil i la seva comprensió passa un cop més pel llenguatge algebraic. Tanmateix, vist l'interès que semblava que hi havia, es va quedar que l'alumnat que hi estigués interessat escollís un parell de nombres entre 10,00 i 99,99 i els apliqués els mateixos cinc passos inicials; a la classe següent, vint dels vint-i-cinc alumnes havien fet la feina (un nombre força elevat si es té en compte que la tasca era voluntària). Els nombres pensats i els resultats obtinguts es van entrar en un full de càlcul amb els algoritmes introduïts que va ser projectat a la pissarra digital mentre els altres cinc alumnes també feien el joc pensant un nombre i aportant també la seva participació (taula 5).

Taula 5. Resultats d'aplicar el joc del 1089 a nombres de quatre xifres (després d'haver corregit les errades comeses).

56,35 → 09,90	18,11 → 09,90	88,01 → 108,90
27,59 → 99,99	98,79 → 09,90	58,17 → 99,99
35,27 → 99,99	40,53 → 99,99	91,91 → 99,99
67,14 → 108,90	56,40 → 108,90	75,36 → 108,90
41,51 → 99,99	10,89 → 108,90	18,78 → 99,99
29,04 → 99,99	58,00 → 108,90	66,17 → 99,99
38,88 → 109,89	49,93 → 109,89	53,25 → 09,90
24,26 → 99,99	87,67 → 108,90	48,78 → 99,99
23,62 → 09,90	41,39 → 108,90	61,46 → 09,90
12,34 → 108,90	90,85 → 99,99	10,06 → 109,89
97,69 → 09,90	54,62 → 99,99	40,64 → 09,90
56,97 → 108,90	52,55 → 09,90	36,77 → 108,90
21,59 → 108,90	46,09 → 99,99	23,47 → 108,90
58,41 → 108,90	25,23 → 99,99	68,14 → 108,90
50,74 → 99,99	14,41 → 00,00	88,71 → 108,90

En vista dels resultats, l'alumnat intenta generalitzar el que ha après en el cas de tres xifres a la nova pregunta i de seguida veu que s'obtenen cinc casos: 00,00, 09,90, 99,99, 108,90 i 109,89, el primer dels quals només es dóna quan el nombre és palindròmic. Per tant, ja es pot conjecturar:

si el nombre inicial és palindròmic	⇒	el resultat és 00,00

L'alumnat de seguida també és capaç de reconèixer el segon cas:

si el nombre inicial té la primera i l'última xifres iguals	$\Rightarrow$	el resultat és 09,90

I també el cinquè:

si el nombre inicial té la segona i la tercera xifres iguals	$\Rightarrow$	el resultat és 109,89

En aquesta experiència concreta, cap dels vint-i-cinc alumnes (ni tampoc els altres alumnes de 2n) va ser capaç de trobar la norma per la qual es podia arribar a 99,99 i a 108,90. Tanmateix, aïllant els casos en què la xifra de les desenes és major que la xifra de les centèsimes (taula 6), sí que hi va haver tres alumnes que van donar la solució. En aquestes condicions, si la xifra de les unitats és major que la de les dècimes, s'obté 108,90; si la xifra de les unitats és menor que la de les dècimes, aleshores s'obté 99,99. A partir d'aquí, de seguida va ser fàcil explicar que si la xifra de les desenes és menor que la de les centèsimes, aleshores s'obté el cas contrari.

Taula 6

67,14 → 108,90	41,51 → 99,99
58,41 → 108,90	50,74 → 99,99
56,40 → 108,90	40,53 → 99,99
58,00 → 108,90	90,85 → 99,99
87,67 → 108,90	54,62 → 99,99
88,01 → 108,90	91,91 → 99,99
75,36 → 108,90	
68,14 → 108,90	
88,71 → 108,90	

L'únic intent de demostració real que es va fer es correspon amb el del segon cas i es va dur a terme introduint un cop més el llenguatge algebraic. La premissa inicial va ser suposar un nombre de la forma *AB, CA* (suposant $B > C$ de manera que es pugui restar) i calcular la diferència corresponent:

$$\begin{array}{rcccc} & A & B & C & A \\ - & A & C & B & A \\ \hline & 0 & ? & ? & 0 \end{array}$$

Per tant, el problema queda simplificat a calcular totes les diferències possibles de nombres de dues xifres menys el seu invers.

$$\begin{array}{rcc} & B & C \\ - & C & B \\ \hline & ? & ? \end{array} \qquad \begin{array}{c} C < B \\ \rightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{rcc} & B-1 & 10+C \\ - & C & B \\ \hline & B-1-C & 10+C-B \end{array}$$

I ara, usant l'àlgebra: $(B-1-C)+(10+C-B)=9$. Per tant, la diferència plantejada serà un nombre del tipus *0X,Y0* amb $X+Y=9$, és a dir, 00,90, 01,80, 02,70, 03,60, 04,50, 05,40, 06,30, 07,20, 08,10 i 09,00. Comprovant la suma de cadascun dels casos amb el corresponent resultat d'invertir les xifres, s'obté sempre 09,90. Globalment, el raonament es va entendre i, per a comprovar-ho, es va demanar que es resolgués el cinquè cas. Es va dividir l'alumnat en grups heterogenis de tres o quatre persones (un total de set grups) i el resultat va ser el següent:

- Tots els grups van començar a reproduir el raonament del segon cas per analogia, copiant les lletres *A*, *B* i *C* per a representar les xifres desconegudes.
- Dos dels grups van començar expressant correctament el nombre inicial com a *AB, BC* i tres grups més van referir-s'hi com a *AC, CB*.
- Tres grups van preguntar si s'havia de suposar que la xifra de les desenes era major que la xifra de les centèsimes i dos més ho van donar per descomptat.
- Quatre grups van començar a buscar exemples numèrics cercant paradigmes del resultat final. Tres d'ells van conjecturar que els resultats de les diferències havien de ser del tipus *X9,9Y* amb $X+Y=9$.
- Només un grup (un alumne probablement) va aconseguir demostrar-ho. A més a més, es va mostrar interès per saber resoldre el tercer i el quart cas (referència a Bogomolny).

Una de les conclusions interessants que es desprèn d'aquesta activitat és la de veure que l'alumnat intenta seguir fil per randa el segon cas i que ni tan sols es planteja el canvi de les lletres en el seu raonament. Podem observar que, fins i tot, hi va haver tres grups que van usar la lletra *C* per a referir-se a la xifra repetida, saltant-se l'ordre alfabètic natural. Una altra observació interessant és la constatació real que el problema plantejat és per a ells força difícil, en ser un dels primers problemes en llenguatge algebraic que resolen. Ja s'ha dit que majoritàriament els grups van començar a posar-se exemples numèrics, confirmant la idea recollida per Neria i Amit (2004), que verifiquen la constatació que l'alumnat prefereix expressar-se sempre per una via no algebraica. Tanmateix l'objectiu inicial queda assolit: l'alumnat ha vist la necessitat de fer una traducció al llenguatge algebraic per a poder generalitzar un resultat que sembla sortir dels casos concrets.

Referències

Álvarez, M. D., Hernández, J. i altres (2008). *Matemàtiques 2 ESO*. Vol. 1. Barcelona: Grup Promotor Santillana.

Berkeley i Rowland, T. B. (1892), *Card Tricks and Puzzles*. Londres: George Bell & Sons.

Bogomolny, A. Four Digits Magic Prediction from Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Arithmetic/FourDigitsPrediction.shtml

Burgos, S., Domínguez, M., Rojas, F. J., Planas, N., Vilella, X. (2006). La participación en el aula de matemáticas. Dins J. M. Goñi (coord.), *Matemáticas e interculturalidad* (pàgs. 49-62). Barcelona: Graó.

Carroll, L. (1989). *The Lewis Carroll Picture Book: A Selection from the Unpublished Writings and Drawings of Lewis Carroll*. Elibron Classics, 2005.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

Chuquet, N. (1484), *Triparty en la science des nombres*. Roma: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques, 1884.

Decret 142/2007 DOGC 4915. *Currículum de l'Educació Primària. Àrea de matemàtiques*.

Decret 143/2007 DOGC 4915. *Currículum d'educació secundària obligatòria. Àrea de matemàtiques*.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. Dins D. O. Tall (ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pàgs. 25-42). Nova York: Kluwer Academic Publishers.

Dudeney, H. E. (1917). *Amusements in Mathematics*. Nova York: Dover Publications, Inc., 1970.

Educational Times (1890). *Mathematical Questions and Solutions from the* «Educational Times» *with many Papers and Solutions*. Vol. LIII. Londres: Francis Hogson.

Gibney, S. (1893). An arithmetical flourish for drawing-room shows. *The Boy's Own Paper* 734 i 750 (Vol. 15).

Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Suma*, 4, 61-64.

Isoda, M., Katagiri, S. (2012). *Mathematical Thinking. How to Develop it in the Classroom*. Nova Jersey, Londres, Singapur: World Scientific.

Konic, P. M., Godino, J. D., Rivas, M. A. (2010). Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números*, 54, 57-74.

Krantz, S. G. (2010). *An Episodic History of Mathematics. Mathematical Culture Through Problem Solving*. The Mathematical Association of America.

Lee, P. Y. (2007). *Teaching Secondary School Mathematics: a Resource Book*. Singapur: McGraw-Hill.

Leybourn, T. (1817). *The Mathematical Questions Proposed in the Ladies' Diary, and their Original Answers, Together with Some New Solutions, from its commencement in the year 1704 to 1816*. Vol. II. Londres: printed by W. Glendinning.

Neria, D., Amit, M. (2004). Students Preference of Non-Algebraic Representations in Mathematical Communication. Dins *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 3 (pàgs. 409-416).

O'Conor Sloane, T. (1922). *Rapid Arithmetic. Quick and Special Methods in Arithmetical Calculation Together with a Collection of Puzzles and Curiosities of Numbers*. Nova York: D. van Nostrand Company.

Rouse Ball, W. W. (1892). *Mathematical Recreations and Essays*. Londres: MacMillan and Co., Limited. Edició de 1905.

Rouse Ball, W. W., Fitz-Patrick, J. (1898). *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*. París: Librairie Scientifique A. Hermann. Edició de 1907.

Santcliment, F. (1482). *Summa de l'art d'aritmètica*. Introducció, transcripció i notes a cura d'A. Malet. Vic: Eumo, 1998.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber abaci*. Nova York: Springer-Verlag.

Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics*. Vol. II. Nova York: Dover Publications, Inc.

Steinle, V., Stacey, K, Chambers, D. (2006). *Teaching and learning about decimals*. Melbourne: University of Melbourne.

Tall, D. O. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. Dins D. O. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pàgs. 3-24). Nova York: Kluwer Academic Publishers.

Torregrossa, G., Callejo, M. L. (2011). Procesos matemáticos en la educación secundaria. Dins J. M. Goñi (coord.). *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar* (pàgs. 29-56). Barcelona: Graó.