

Intuïcions dels alumnes de secundària sobre la probabilitat.

Una recerca sobre la influència del treball empíric en el cas d'un esdeveniment compost

Fermí Rojo Cort

INS Miquel Bosch i Jover, Artés (Barcelona), frojo@xtec.cat

Jordi Deulofeu Piquet

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona, jordi.deulofeu@uab.cat

Resum

En aquest article es presenta una investigació relacionada amb dos conceptes probabilístics, l'espai mostral i la probabilitat d'un esdeveniment compost, realitzada amb alumnes de 2n d'ESO. En el camp de la probabilitat és sabut que un ensenyament efectiu s'ha de fomentar en el coneixement previ per part dels professors de les intuïcions que presenten els alumnes. En aquest sentit, un dels objectius d'aquest treball és determinar i classificar les intuïcions dels alumnes en relació amb els dos conceptes esmentats.

Aquesta tasca s'ha realitzat seguint els paràmetres següents: el conjunt d'estratègies desenvolupades, la comprensió de les situacions presentades i la naturalesa de les argumentacions en relació amb els diferents significats que pot prendre la probabilitat. Per a l'obtenció de les dades s'ha utilitzat una de les proves d'avaluació de les competències bàsiques aplicades pel Departament d'Educació en els anys 2006-2007. Paral·lelament, s'ha analitzat la influència del treball empíric en la formació i la modificació de les intuïcions dels alumnes. En aquest sentit, els resultats de la investigació assenyalen un camí a seguir per ajudar els estudiants a crear intuïcions correctes, i a la vegada mostren que certes intuïcions que poden interferir en aquest camí sovint són evitables amb l'ajut de l'experimentació.

Abstract

This paper presents an investigation with two probabilistic concepts, the sample space and the probability of a compound event, made with 13-14 years students. In the field of probability it is known that effective teaching should be preceded by research into the primary intuitive substrate of the relevant subject. In this sense, one of the objectives of this study is to determinate and classify the students' intuitions about the two concepts mentioned above. This task was carried out according to the following parameters: the set of strategies developed, the understanding of the situations presented and the nature of the students' arguments in relation to the different meanings of the concept of probability. To obtain the data, we used one of the basic skills test implemented by the Education Department in 2006-2007. Simultaneously, we analyzed the influence of empirical work in the formation and modification of the students' intuitions. In this sense, the results of the investigation indicate a way forward to help students create correct intuitions showing, at the same time, that the existence of certain intuitions that can interfere in their way are often avoidable with the help of experimentation.

1. Introducció: intuïció, matemàtiques i probabilitat

En matemàtiques, la intuïció té un paper que podríem qualificar d'ambigu. En efecte, a vegades una qüestió no necessàriament gaire complexa es respon de manera *intuitiva*, que, després d'una reflexió més aprofundida, es demostra que és falsa. O a l'inrevés: una afirmació que *intuitivament* es donaria per falsa al cap d'un quant temps es demostra que és certa. Una *intuïció*, doncs, per més brillant que sigui, no és suficient; pot caldre molt de treball per poder arribar a una demostració que la legitimi o, contràriament, una demostració que la invalidi.

En probabilitat es donen moltes falses intuïcions, ja que, a les imprecisions de llenguatge (confusió entre el llenguatge habitual i el matemàtic, que sovint fa servir les mateixes paraules amb un sentit més restrictiu, però més precís) cal afegir-hi les conclusions impròpies que es treuen d'una experiència concreta, sense tenir en compte que les lleis de la probabilitat es refereixen sempre a prediccions globals i no pas a experiències particulars.

En el camp de la didàctica de la probabilitat, s'ha demostrat que un ensenyament efectiu s'ha de fonamentar en el coneixement previ respecte a aquestes intuïcions que presenten els estudiants, ja que, quan s'ensenyava alguna cosa nova, els alumnes construïen aquest nou coneixement connectant la nova informació amb la que ells ja havien assumit prèviament com a correcta.

El curs escolar 2006-2007, el fet que l'institut on treballàvem fos responsable de l'aplicació de les proves de les competències bàsiques proposades pel Departament d'Educació ens va brindar una oportunitat excel·lent per dur a terme una investigació en el tema. Una de les proves tractava els conceptes d'espai mostral i de probabilitat d'un esdeveniment des d'una vessant totalment intuïtiva i presentava activitats a alumnes que no havien rebut instrucció prèvia sobre el tema. Tots els alumnes que cursaven 2n d'ESO d'arreu de Catalunya havien de realitzar les proves i, per tant, disposàvem de les respostes dels alumnes del centre on treballàvem. Com responien els alumnes sense instrucció davant d'aquestes tasques? I com aquests resultats podien ajudar a prendre decisions per tal de millorar l'ensenyament efectiu en aquest camp?

Segons els estudis de Fischbein (1991), les persones fan servir intuïcions errònies en el raonament probabilístic. Se n'han estudiat certs aspectes, com ara les intuïcions dirigides per una sèrie de mecanismes investigats per psicòlegs i didactes de la matèria anomenades heurístiques (Tversky & Kahneman, 1982). Altres investigacions han intentat determinar quin paper té la instrucció en el desenvolupament del raonament probabilístic (Fischbein, 1984). No obstant això, hi ha determinats aspectes que no han estat gaire investigats. En particular, no coneixem cap estudi que es refereixi de manera explícita al paper que té l'experimentació, entesa com la generació i l'anàlisi de dades per part dels alumnes, en la creació o modificació de les intuïcions dels individus, concretament de les intuïcions que s'utilitzen per fer el pas de l'empirisme a l'anticipació davant de situacions aleatòries.

Aquest article presenta una part de la recerca motivada per les qüestions anteriors (Rojo, 2009). Els objectius fonamentals de la recerca són els següents:

1. Determinar les intuïcions dels alumnes sobre *espai mostral* i *probabilitat d'un esdeveniment compost* en les situacions proposades per les competències bàsiques.
2. Classificar les intuïcions i interpretar-les d'acord amb el model descrit en el marc teòric escollit.
3. Analitzar la influència del treball empíric en la creació i la modificació de les intuïcions dels alumnes.

En concret, en aquest article veurem els resultats obtinguts en relació amb els tres objectius centrants en un cas concret i representatiu dels diferents que es van estudiar en la recerca.

2. Referents teòrics: intuïcions i nivells de raonament

Per al nostre estudi són especialment interessants els treballs de Fischbein (1975, 1984, 1991, 1997) en el camp de les intuïcions i també les investigacions de Polaki (2000, 2005) en relació amb els raonaments en situacions aleatòries.

Fischbein (1975) es va interessar per l'exploració dels fonaments intuïtius i precursors del coneixement probabilístic per tal de mostrar que els nens tenen idees correctes parcialment formades, i va analitzar l'efecte de la instrucció en la millora d'aquestes intuïcions. Va atorgar, també, una gran importància al paper de la intuïció com a component de la intel·ligència. En aquesta obra, Fischbein considera que l'ensenyament d'una nova matèria, per tal que sigui efectiu, ha d'anar precedit d'una detallada investigació sobre el substrat intuïtiu que en tenen els alumnes, de la mateixa manera que és necessari analitzar el terreny sobre el qual es vol construir un nou edifici. L'estudi de les intuïcions pot materialitzar-se en el camp de la probabilitat, ja que la complexitat de les situacions quotidianes ens indueix a adoptar contínuament un comportament probabilístic. La necessitat de prendre decisions ens obliga a fer estimacions intuïtives de possibilitats (la majoria de vegades, de tipus subjectiu). Els infants s'enfronten des de molt petits a una realitat regida, en molts casos, per les lleis de l'atzar.

Les intuïcions, segons Fischbein, són processos cognitius que intervenen directament en les accions pràctiques o mentals dels individus, i que tenen les característiques següents: immediatesa, globalitat, capacitat d'extrapolar, estructurabilitat, i autoevidència. En poques paraules: la immediatesa significa que sorgeixen amb freqüència de forma espontània tot i ser el resultat de la maduració de moltes experiències anteriors; el caràcter global s'oposa a la descomposició en parts; les intuïcions van més enllà d'un cas particular i, en cert sentit, tenen un caràcter teòric i per això serveixen per extrapolar o fer prediccions; diverses intuïcions es relacionen entre si formant estructures de raonament, i finalment acostumen a ser autoevidents per a l'individu, de manera que per a ell no necessiten demostració.

Hi ha tres situacions que es poden preveure en relació amb el substrat intuïtiu:

1. La informació transmesa durant el procés d'aprenentatge es troba amb una intuïció prèvia compatible, i aquesta compatibilitat es pot utilitzar directament en l'ensenyament (per exemple, «la distància més curta entre dos punts és la línia recta»).
2. La intuïció prèvia és oposada i no és compatible, de manera que s'arriba a una contradicció entre la intuïció primària i el fet objectiu o demostrable (per exemple, «el conjunt dels nombres racionals és equipotent amb el conjunt dels nombres enters»).
3. L'absència de cap intuïció prèvia pertinent a la informació proporcionada (per exemple, «les medians d'un triangle es tallen en un punt»).

Fischbein anomena *intuïció primària* aquelles que existeixen abans i independentment de qualsevol ensenyament sistemàtic intencionat, i *intuïcions secundàries* aquelles que són sistemàticament construïdes durant el procés d'ensenyament.

Una conclusió global dels seus estudis (Fischbein, 1984 i 1991) és que l'irregular, i a vegades sorprenent, substrat intuïtiu ha de ser sistemàticament explorat abans de l'inici de la construcció d'un sistema conceptual en el camp de la probabilitat. Així, si un vol intentar desenvolupar, a partir de

l'ensenyament, un substrat intuïtiu fort, correcte, coherent i formal per al raonament probabilístic, s'haurà d'enfrontar amb una àmplia varietat d'intuïcions errònies, biaixos, tendències emocionals i malentesos.

D'altra banda, Polaki (2005) analitza les habilitats dels estudiants fins a 14 anys en el moment de generar un conjunt de resultats associats a un esdeveniment compost en relació amb esdeveniments simples i compostos, i, en particular, al llançament de dos daus.

Polaki considera que, per tal que els alumnes puguin comprendre experiments compostos, han de ser capaços de:

- generar els conjunts complets de resultats per cada experiment, i
- analitzar i utilitzar la composició, la simetria o l'experimentació sobre l'espai mostral com a base per fer bones prediccions probabilístiques.

D'acord amb això, conclou que els conceptes d'espai mostral i probabilitat d'un esdeveniment constitueixen un bon context per explorar les habilitats dels estudiants en el moment d'enfrontar-se a esdeveniments compostos.

A partir d'aquestes consideracions, cal fer referència a l'estructura del pensament probabilístic que presenta Polaki (2000), la qual descriu el pensament probabilístic dels estudiants a partir de cinc pilars: espai mostral, probabilitat d'un esdeveniment, comparació de probabilitats, probabilitat condicional i independència. La validació de l'estructura proposada per Polaki el va portar a suggerir l'existència de quatre nivells, que va anomenar: subjectiu (nivell 1), de transició (nivell 2), quantitatiu informal (nivell 3) i numèric (nivell 4).

Tal com descriu Polaki (2000), els estudiants que raonen a nivell 1 generalment donen respostes de tipus subjectiu, incloent, fins i tot, raonaments de tipus deterministes. Per exemple, argumentaran que un nombre determinat és més probable que surti que no pas un altre en el llançament d'un dau «perquè és el seu favorit» o bé «perquè sol sortir així».

Contràriament, els estudiants de nivell 2 tenen més èxit a l'hora de fer prediccions en esdeveniments simples i comencen a utilitzar raonaments quantitatius vàlids, tot i que informals i de forma inconsistent, per predir quin és el resultat més o menys probable. Per exemple, aquests estudiants faran servir l'expressió «3 de 6» si se'ls demana la probabilitat d'obtenir un nombre parell en el llançament d'un dau. No obstant això, aquest llenguatge informal quantitatiu s'utilitza de forma força inconsistent i a vegades els alumnes es remetent a raonaments subjectius. Aquest fet se l'ha anomenat *reconeixement de la incertesa sense saber quantificar-la*.

En un nivell 3, els estudiants són capaços, per exemple, de generar conjunts complets de resultats per esdeveniments compostos fent servir una estratègia parcialment generativa. I en el nivell 4, els estudiants ja són capaços d'utilitzar una estratègia completa. Per exemple, una de les tasques que es va proposar és llistar totes les possibles combinacions de dinar en un restaurant la carta del qual conté 7 plats i 3 begudes. Els estudiants agafaven cadascun dels plats i el combinaven amb les diferents begudes de manera que obtenien el conjunt de 21 resultats. English (citada en Polaki, 2005) anomena aquesta estratègia *comptaquilòmetres*.

3. Disseny de la recerca

3.1. Objecte de l'anàlisi: una prova de les competències bàsiques

A partir de les proves i els resultats de les competències bàsiques que es van realitzar als centres de secundària de Catalunya a alumnes de 2n d'ESO, 13-14 anys, els cursos 2005-06 i 2006-07, en què s'avaluava, entre moltes altres coses, el pas de l'empirisme a l'anticipació davant de situacions d'atzar i des de la seva vessant més intuïtiva, vam realitzar un estudi sobre les intuïcions que presenten els alumnes en el moment de resoldre situacions contextualitzades d'aquesta mena amb esdeveniments compostos. Cal tenir en compte que aquests alumnes no havien rebut instrucció prèvia específica del tema, però disposaven, d'acord amb l'activitat d'avaluació proposada en la prova de les competències bàsiques, d'una sèrie de dades que ells mateixos havien obtingut experimentalment.

Per tal d'avaluar les competències bàsiques entre l'alumnat de 13-14 anys, el Departament d'Educació va proposar un conjunt d'activitats estructurades en quatre proves d'avaluació: les proves 1 i 2 es realitzaven per escrit individualment, la prova 3 es realitzava individualment en suport TIC i, finalment, la prova 4 es realitzava per escrit en petit grup (3 o 4 alumnes), amb observació en directe del treball dels grups.

La prova 4, anomenada «Un parell de daus», va ser l'escollida com a document d'estudi per a la nostra recerca. Aquesta prova s'encarregava d'avaluar les competències bàsiques següents:

- M5-Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes, i modificar-les si no es mostren prou eficaces.
- M9-Comparar la factibilitat de fets aleatoris en situacions simples.

En aquesta activitat, que es realitzava en grups de quatre, els alumnes havien de tirar dos daus 50 vegades per tal d'operar els números que sortien en les tirades i estudiar les freqüències amb què es repetien els resultats. Abans, però, de realitzar les tirades, els alumnes s'havien de repartir les tasques següents:

1. Un membre del grup havia d'efectuar la suma dels dos números que anaven apareixent als daus en cada tirada.
2. Un altre havia d'efectuar-ne la resta (el més gran menys el més petit)
3. Un altre havia d'efectuar-ne la multiplicació.
4. El quart membre del grup simplement s'havia de fixar en quin era el número més gran dels dos. En el cas que algun grup fos format únicament per tres membres, aquesta darrera tasca no es realitzava.

Així doncs, la feina que se'ls demanava era la d'anotar els resultats de les operacions mentre es feien les tirades i, en acabat, respondre un seguit de preguntes en relació amb els resultats obtinguts i la freqüència amb la qual s'havien obtingut. Les preguntes estaven estructurades en les activitats 19 i 20 de les proves.

L'activitat 19 tracta del concepte d'esdeveniment elemental, la seva identificació i generació. Els alumnes un cop identificat si els esdeveniments llistats eren possibles o no, havien de generar els diferents casos favorables que porten a cadascun dels esdeveniments.

Així, amb la finalitat de provocar una reflexió que permeti la immersió, de manera individualitzada, en la qüestió central de la prova (l'estudi de fenòmens aleatoris), es pretenia, d'una banda, ajudar

a fer el pas de l'empirisme (dades obtingudes) a l'anticipació (dades possibles), pas indispensable per a l'èxit general de la prova. D'altra banda, també es pretenia facilitar la reflexió que permetés en el seu moment mesurar la «magnitud de possibilitat» que tenia cada resultat, demanant que es fes una anàlisi de casos, pas que hauria de permetre finalment efectuar una estimació qualitativa de la probabilitat de cada esdeveniment, o bé, fins i tot (malgrat que no era l'objectiu de la prova), quantificar-ne aquesta probabilitat. És en aquest pas de l'anticipació en què els alumnes havien de recórrer a les seves intuïcions per tal de donar una resposta, correcta o no, a l'activitat, i són aquestes intuïcions les que intentarem extreure de les diferents respostes donades pels alumnes.

D'altra banda, l'activitat 20 tracta del concepte d'espai mostral, tot i que de manera indirecta, i del concepte d'esdeveniment més probable. En cadascun dels apartats, els alumnes havien de fer un estudi de l'espai mostral i de la seva estructura. En primer lloc, per tal de d'escriure tots els esdeveniments que no en formaven part, els estudiants havien de generar el conjunt complet d'esdeveniments elementals per a les quatre operacions proposades (tasca recomanada per Polaki [2005] per tal d'arribar a comprendre el concepte d'experiment compost) i, en segon lloc, calia fer l'anàlisi de l'estructura de l'espai mostral i dels diferents casos favorables de cada esdeveniment, per tal de poder arribar a veure quins són els esdeveniments més probables.

La guia d'aplicació de la prova de competències bàsiques emmarcava aquesta activitat en el tipus de treball que s'hi demana i que hem descrit anteriorment: discussió en petits grups per tal d'aconseguir fer el pas de l'empirisme a l'anticipació. Aquest pas és el que es pretenia avaluar amb aquesta activitat, i en cap cas els conceptes ni els procediments específics de la teoria de la probabilitat, més enllà de la seva vessant intuïtiva. Aquesta vessant intuïtiva que es pretenia posar en marxa amb la discussió és el que volíem explorar i estudiar.

El segon apartat de l'activitat 20 era una continuació natural de l'anterior, tal com indica Polaki de com cal tractar la introducció d'experiments compostos. Aquí l'anàlisi més precisa de les possibilitats prenia més valor: ja no es tractava que conclouguessin que un resultat era possible o no en tant que hi havia possibilitats dels daus que el feien possible, sinó que es tractava de quantificar i raonar quins eren més possibles que d'altres.

El tercer apartat era, en certa manera, la culminació del pas de l'empirisme a l'anticipació que s'havia provocat en els anteriors, tot i que realment era possible abordar aquesta activitat amb un procediment empíric centrat a comptar «quants parells havien sortit en cada operació» (de fet també és en si mateix una manera d'efectuar una anticipació basada en recomptes «del que havia passat»). La resolució òptima d'aquesta activitat, i l'argumentació corresponent, calia esperar-la en l'anàlisi de possibilitats englobades en la dicotomia parell/imparell.

3.2. Procediments d'obtenció de dades i població d'estudi

La recollida de dades es va dur a terme a partir de dues fases ben diferenciades:

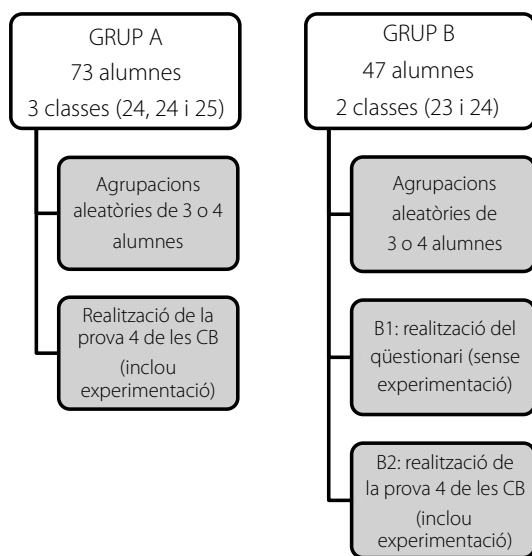
- Una primera, que inicialment havia de ser l'única, on es van recollir les respostes del 73 alumnes de l'IES Gorgs (Cerdanyola del Vallès) a la prova 4 de les competències bàsiques. Estaven distribuïts en tres grups classe (de 24, 24 i 25 alumnes, respectivament) i les dades es van recollir en tres sessions més o menys seguides. D'ara en endavant, ens referirem a aquest grup com el Grup A.
- La segona fase va tenir unes característiques diferents de les descrites anteriorment, ja que un cop recollides les primeres dades, i després de fer-ne una primera lectura, es van considerar insufi-

cients atenent als nostres objectius. Per això, es va decidir tornar a recollir dades amb una població diferent a partir dels alumnes d'un altre centre, en aquest cas, de 47 alumnes de segon d'ESO de l'IES Miquel Bosch i Jover (Artés).

Aquesta segona fase es va dividir en dues parts, totes dues de 60 minuts cadascuna. En la primera els 47 alumnes havien de debatre i respondre les mateixes preguntes de la prova 4 de les competències però sense llançament de daus. La finalitat d'aquesta primera fase era la de recollir dades que serien comparades amb les dels mateixos estudiants un cop havien fet el llançament dels daus, i així poder estudiar la influència de l'empirisme en l'anàlisi de les diferents situacions plantejades. Ens referirem a les dades d'aquest grup com el Grup B1.

La segona part va ser l'aplicació de la prova als 47 alumnes tal com indicaven les instruccions d'aplicació i s'havia fet al primer centre. Per a la resta del treball, ens referirem a les dades d'aquest grup com el Grup B2.

En total, van respondre als dos qüestionaris els 47 alumnes distribuïts en dos grups classe amb 5 i 6 grups respectivament. Es van passar els diferents qüestionaris en quatre sessions diferents, dues per dia.



3.3. Trets metodològics i instrument per a la recollida de dades

Tenint en compte que les finalitats del treball tenien com a objectius «identificar» i «explicar» intuïcions dels nostres alumnes, vam abordar la disjuntiva enfocament quantitatiu/qualitatiu.

Així, l'anàlisi que es va dur a terme se centrà en dues fases: un estudi quantitatiu de les respostes correctes dels alumnes que participaren en la recerca, i un estudi qualitatiu de les respostes verbals a les proves, classificant-les a partir del marc teòric construït.

Per a cadascuna de les operacions es van classificar els motius exposats pels alumnes en els diferents grups (A, B1 i B2) i s'analitzaren seguint una sèrie de paràmetres relacionats amb els diferents aspectes

descrits en el marc teòric, intentant cercar-hi una possible interpretació. Aquests paràmetres van ser: el conjunt d'estratègies desenvolupades (nivell de raonament en què els alumnes treballen segons els descrits per Polaki, 2000), la comprensió de la situació i dels propòsits plantejats (explícit i implícit), i la naturalesa de les argumentacions donades en relació amb els diferents significats que el concepte de probabilitat pot prendre.

Les respostes es van classificar en tres grans blocs: equiprobabilitat, anàlisi subjectiva i anàlisi combinatòria.

Equiprobabilitat: Es consideren els resultats que es poden obtenir en l'experiment compost igual de probables. Conseqüentment, per un alumne que pensi així tant pot sortir un nombre com un altre i no hi ha justificació per pensar que un cert valor té una freqüència absoluta major.

Anàlisi subjectiva: Els alumnes atribueixen una creença personal al fet que hagi sortit més vegades un cert valor. Aquests raonaments subjectius provenen, en casos més elaborats, de raonaments quantitius (sovint invàlids).

Anàlisi combinatòria: Aquest tipus de raonaments, més o menys sofisticats, estan relacionats amb un estudi de la composició de l'espai mostral, i el tipus de respostes fan referència, d'una manera o altra, al nombre de casos favorables per obtenir un cert esdeveniment. Cal tenir present que molts individus presenten anàlisis combinatòries que poden ser errònies.

4. Resultats, discussió i conclusions

Per tal de mostrar els resultats de la investigació, analitzarem amb detall l'estudi de l'esdeveniment més probable en el cas de la suma (cas representatiu de la recerca) en relació amb els objectius de la investigació. Dels altres casos no en presentem els resultats, que es poden trobar a Rojo (2009), però sí que els esmentem, de manera general, en la part de conclusions, en comparació amb els obtinguts en el cas de la suma, ja que en alguns aspectes difereixen clarament.

4.1. En relació amb les intuïcions que presenten els alumnes

En la taula 1 es reflecteixen els resultats, en percentatges, obtinguts pels diferents grups en el moment de raonar quin era l'esdeveniment més probable en el cas de la suma. *N* representa el nombre d'agrupacions de cadascun dels grups.

Categoria	A	B1	B2
	% de respostes (N = 17)	% de respostes (N = 11)	% de respostes (N = 11)
Equiprobabilitat	47	27,2	0
Anàlisi subjectiva	5,8	9	0
Anàlisi comb. correcta	47	54,5	100
Anàlisi comb. errònia	0	9	0
Sense resposta	0	0	0

Taula 1. Esdeveniment més probable (cas de la suma).

Tal com es pot observar a la taula 1, la intuïció errònia més present és l'equiprobabilitat: afecta gairebé la meitat de les respostes del grup A, disminueix a una quarta part en el grup B1 (tot i representar el 60% de les respostes incorrectes) i acaba desapareixent en les respostes del grup B2. Aquesta intuïció estava justificada, principalment, per dos tipus de raonaments: d'una banda, aquells que provenien d'una concepció lligada a la freqüència del concepte de probabilitat, i per tant eren respostes amb una anàlisi totalment empírica a partir del que havia succeït, i, de l'altra, els que provenien d'una concepció intuïtiva del concepte, justificant la igualtat de probabilitats com un efecte purament de l'atzar, sense esperar un resultat més que un altre. L'heurística de l'*enfocament del resultat aïllat* podria influir en aquest tipus de raonaments. En qualsevol d'aquestes dues opcions, els alumnes no assoliren l'objectiu de la tasca: l'anàlisi a partir d'un recompte de casos.

En el cas de respostes en què es consideraven diferents probabilitats, les justificacions varen ser de dos tipus. D'una banda, les de tipus subjectiu amb elements sobre creences i preferències personals, derivades d'una concepció subjectiva del concepte de probabilitat, i, de l'altra, les que presentaven una anàlisi de les combinacions dels diferents esdeveniments i, per tant, un estudi de la composició de l'espai mostral.

Cal anotar que la proporció d'alumnes que utilitzaren un raonament de tipus combinatori no va variar gaire entre els estudiants dels grups B1 i A, i, en canvi, va augmentar fins a la totalitat en els estudiants del grup B2.

En relació amb els resultats obtinguts per Fischbein, vàrem corroborar el fet que els alumnes d'aquesta edat tenen la capacitat intuïtiva d'avaluar l'estructura de l'espai mostral, i poden basar els seus raonaments a partir d'aquesta estructura. Ara bé, a la pràctica vàrem veure que els nostres estudiants construïen o bé l'espai mostral Ω_1 , amb 36 esdeveniments, o bé un espai mostral més petit, que anomenarem Ω_2 , amb 21 esdeveniments. Per tal de ser precisos, l'espai Ω_1 es pot construir com el producte del conjunt $\{1,2,3, \dots, 6\}$ per ell mateix. De manera similar, podem definir el segon espai mostral Ω_2 com el quocient d' Ω_1 mòdul la simetria que relaciona els punts (x, y) i (y, x) d' Ω_1 . En el model Ω_1 , els dos daus, tot i no poder-los distingir a la pràctica, es mantenen *individuals*, mentre que en el cas de Ω_2 , s'identifiquen resultats indistingibles (per exemple, $[2, 1]$ i $[1, 2]$).

4.2. En relació amb la influència del treball empíric

La metodologia emprada, realitzant la prova a un primer grup tal com la presentava el Departament d'Educació i a un segon grup, primer sense llançament de daus i seguidament amb llançament, ens va permetre comparar resultats i concloure el que presentem a continuació.

Pel que fa a la influència del treball empíric, en primer lloc vam poder observar que els efectes i la influència de l'empirisme van variar en relació amb els conceptes involucrats i amb les operacions presentades en la prova de les competències bàsiques.

Pel que fa a la identificació i a la determinació de l'espai mostral, l'empirisme hi tingué un paper gairebé neutre. El fet de posseir una sèrie de dades experimentals només va influir, de manera positiva, en la determinació de l'espai mostral corresponent al producte dels valors dels dos daus. El fet de poder observar quins valors s'obtenien afavorí la identificació dels casos impossibles.

Pel que fa a la suma i a la resta, l'empirisme va ser un factor que no distorsionà el tractament conjunt de la informació recollida d'ambdues operacions. Contràriament al que nosaltres podríem esperar,

el grup que no realitzà la part empírica és el que va obtenir un percentatge més alt de respostes amb anàlisi combinatòria correctes. El fet de no posseir dades empíriques i no poder basar-hi les respostes va fer que els alumnes haguessin de cercar un motiu que justificués la seva elecció i estudiar la composició de l'espai mostral. Així mateix, els resultats d'aquest grup milloraren de manera notable gràcies a l'empirisme.

En síntesi, comparant de manera global els resultats obtinguts segons les característiques en què van realitzar les proves els tres grups, podem concloure que el fet de proposar als alumnes la realització de les proves sense fase experimental i seguidament amb llançament de daus potenciat l'èxit en la resolució de la tasca, afavorint l'anàlisi a partir de raonaments combinatoris i recompte de casos. Millora considerablement els nivells de raonament dels estudiants en aquestes anàlisis, ampliant el total de casos que cada estudiant analitza, i provoca una clara disminució (fins i tot desaparició) de les intuïcions errònies que influeixen en aquests raonaments.

En el gràfic 1 mostrem el percentatge de respostes amb anàlisi combinatòria per a cadascuna de les operacions tractades i grups. Podem observar que els casos en què la millora fou més considerable van ser la suma i la resta, seguit del producte i del cas més probable.

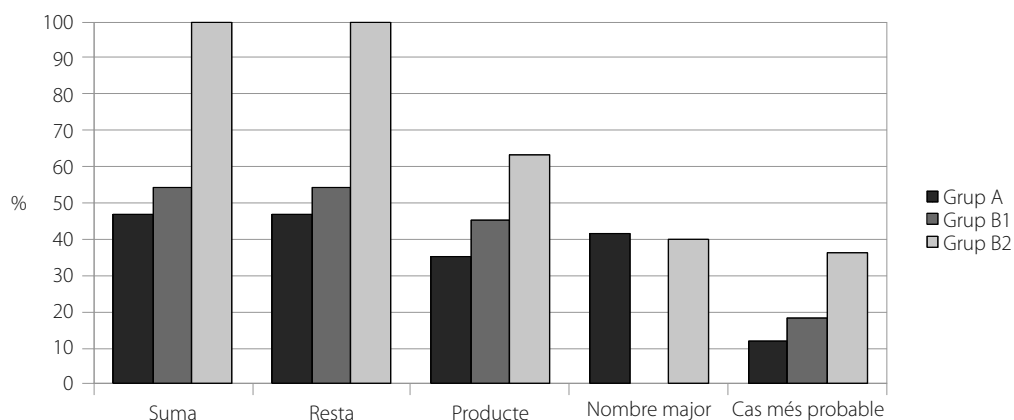


Figura 1. Resultats per a les diferents operacions de cada grup (%).

5. Implicacions didàctiques

En la investigació, i amb l'objectiu d'analitzar el procés d'ensenyament/aprenentatge dels conceptes d'atzar i probabilitat, vam escollir una de les proves de les competències bàsiques utilitzades pel Departament d'Educació amb la finalitat de facilitar elements que permetessin la reflexió i la discussió en la presa de decisions sobre aspectes de gestió del currículum. Amb aquesta finalitat ens proposem, a continuació, analitzar les possibles aportacions de la nostra recerca al procés d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques i, en particular, als conceptes probabilístics involucrats.

A la vista dels resultats obtinguts, podem concloure que un camí a seguir per ajudar els estudiants a construir intuïcions correctes sobre els conceptes d'espai mostral, probabilitat i la seva relació amb la corresponent estructura de l'espai mostral, és utilitzar activitats d'ensenyament en què, primerament, l'estudiant cerqui l'espai mostral i faci prediccions sobre les possibilitats d'obtenir diferents esdeveniments en experiments aleatoris senzills (simples i compostos), com per exemple el llançament d'un

dau o dos, seguidament obtingui dades empíriques d'aquests experiments i finalment analitzi de nou les situacions presentades. Les tasques amb aquesta estructura culminarien amb la comparació entre les possibilitats experimentals generades i les seves prediccions originals.

Ara bé, tot i que aquest camí anterior hem vist que funciona prou bé (d'acord amb els resultats del gràfic 1) en els casos de la suma i de la resta, estem d'acord amb el suggeriment de Konold (1995) segons el qual la simple realització de prediccions i la seva comparació amb les dades obtingudes experimentalment no són sempre suficients per tal que els estudiants canviïn les seves intuïcions, ja que, com en el cas del producte i del nombre més alt, les dades no revelen amb prou claredat tots els resultats que volíem que els nostres estudiants veiessin i la variabilitat de les dades pot jugar alguna mala passada.

Així doncs, un camí que complementa la mancança en aquests casos, d'acord amb les idees de Polaki (2005), seria ampliar les tasques anteriors amb la simulació dels experiments, amb l'ajuda de l'ordinador, mostrant les dades als alumnes i demanant-los que reexaminin les seves respostes i les discuteixin en petits grups.

D'altra banda, i d'acord amb Batanero (2002), hem vist com els diferents significats del concepte de probabilitat són presents de forma intuïtiva en els raonaments dels estudiants i com poden variar segons el tipus de tasca realitzada. Calen, en l'ensenyament de la probabilitat, activitats de tipus experimental i de tipus formal per ajudar els estudiants a conèixer els diferents tipus de significats i a superar les possibles dificultats que poden presentar.

Una altra de les recomanacions didàctiques que es desprèn de l'estudi té relació amb l'estructura que presenta la prova dels daus de les competències bàsiques, en què es considera adient la jerarquia presentada: identificació de casos possibles i impossibles a partir de casos particulars; generalització, cercant i descrivint l'espai mostral pertinent, i predicció de probabilitats d'esdeveniments a partir de l'anàlisi de l'estructura de l'espai mostral. Tenint en compte que els alumnes només inicien aquesta anàlisi quan se'ls fa calcular i predir probabilitats d'esdeveniments, cal presentar situacions que promoguin aquest tipus de tasques. Cal emfatitzar i treballar la relació entre l'estructura de l'espai mostral i el càlcul de probabilitats d'esdeveniments compostos a partir d'aquesta estructura.

Tal com indica Polaki (2005) per tal que els alumnes puguin comprendre els experiments compostos han de ser capaços de generar la totalitat dels esdeveniments elementals d'un cert experiment i analitzar i utilitzar l'estructura de l'espai mostral com a base per fer prediccions probabilístiques. D'acord amb això i amb l'anàlisi realitzada, la prova 4, que tracta els conceptes d'espai mostral i de probabilitat d'un esdeveniment, constitueix un bon context per explorar les intuïcions dels estudiants en el moment d'enfrontar-se a diferents tipus d'esdeveniments en experiències compostes.

L'estudi del substrat intuïtiu en relació amb el concepte d'espai mostral ha revelat l'existència d'un substrat compatible. Aquesta compatibilitat es pot utilitzar per a l'ensenyament efectiu del concepte. No obstant això, cal tenir en compte que, en el cas dels dos daus, quan es vol estudiar l'estructura de l'espai mostral trobem una intuïció errònia que no permet distingir-ne l'ordre.

En relació amb els conceptes de probabilitat d'un esdeveniment i relació amb la composició del pertinent espai mostral, la recerca ha mostrat que hi ha un seguit d'intuïcions oposades que cal tenir en compte en el moment de l'ensenyament i l'aprenentatge d'aquests conceptes. Aquestes intuïcions són, principalment i per grau de presència, l'equiprobabilitat i la subjectivitat, les quals es poden evitar o disminuir, tal com hem vist en la nostra recerca, amb l'ajut de l'experimentació.

6. Bibliografia

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 247-263.

Batanero C., Henry M. i Parzysz B. (2005). The nature of chance and probability. A: G. A. Jones (ed.). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 15-37. Nova York: Springer Science +Business Media.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E., Barbat, I. i Minzat, I. (1975). Primary and secondary intuitions in the introduction of probability. A: E. Fischbein (ed.), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. [Apèndix 1, 139-155]. Reidel: Dordrecht.

Fischbein, E. i Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.

Fischbein, E., Nello, M. S. i Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Fischbein, E. i Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.

Garfield, J. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review*, 63, 25-34.

Godino, J. D., Batanero, C. i Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

Hugues Galindo, E. (2001). Estudio sobre heurísticas empleadas por estudiantes en sus razonamientos probabilísticos. *Memorias de la XI Semana Regional de Investigación y docencia en Matemáticas*, 82-88. Hermosillo: Universidad de Sonora.

Kahneman, D., Slovic, P. i Tversky, A. (1982). *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*. Cambridge: Cambridge University Press.

Konold, C. (1995). *Confessions of a coin flipper and would-be instructor*. *The American Statistician*, 49 (2), 203-209.

Lecoutre, M. i Durand, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: Etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19 (3), 357-368.

Muñoz, A. (1998). Algunas ideas preconcebidas sobre probabilidad. *Suma*, 29, 29-34.

Polaki, M. V., Lefoka, P. J. i Jones, G. A. (2000). Developing a cognitive framework for describing and predicting Basotho students' probabilistic thinkin. *Boleswa Educational Research Journal*, 17, 1-21.

Polaki, M. V. (2005). Dealing with compound events. A: G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 191-214. Nova York: Springer Science+Business Media.

Rojo, F. (2009). *Probabilitat i competències bàsiques: un estudi de les intuïcions dels alumnes de 2n d'ESO*. [Treball de Recerca. Programa de doctorat de Didàctica de les Ciències i de les Matemàtiques]. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona. Document no publicat.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. i Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los estudiantes de secundaria. *Educación matemática*, 10 (1), 7-25.

— (2001). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísticos en las secuencias de resultados aleatorios. *Suma*, 36, 23-32.

Speiser, R., Walter, C. (1998). Two dice, two samples spaces. A: L. Pereira-Mendoza, L. Seu Kea, T. Wee Kee, & W. K. Wong (ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference on the Teaching of Statistics* [Vol. 1, 1041-1047]. Holanda: International Statistical Institute.

