La construcció del pentàgon regular de l'*Almagest*. Un primer pas en la ruta cap a les estrelles

Carles Ignasi Gómez Ruiz

Resum

Explicació d'una manera senzilla de construir amb regle i compàs un pentàgon regular inscrit en una circumferència, descrita i demostrada per Claudi Ptolemeu en el seu tractat sobre astronomia i matemàtiques anomenat *Almagest*, i basada en diverses proposicions dels *Elements* d'Euclides.
Estudi, també, d'altres aspectes relacionats que formen part del context històric i científic del problema, amb implicacions didàctiques.

Abstract

Explanation of a simple way to build with ruler and compass a regular penthagon inscribed in a circumference described and demostrated by Claudius Ptolomeus in his essay about astronomy and maths named Almagest*, and based on several proposicions of the* Elements *of Euclides. This essay is also about other related aspects that belong to the historic and scientific knowledge of the problem, with didactic implications.*

1. Introducció

El tema central d'aquest article és la construcció del pentàgon regular. Com i en quins cursos resolem habitualment aquest problema?

Segurament podem trobar respostes diverses. Totes poden ser símptomes de com ensenyem habitualment la geometria.

El mètode que proposo es fa a la manera dels geòmetres grecs, amb regla i compàs (estris avui en dia emulables amb programes com el Geogebra) i és aplicable als primers cursos de l'ESO.

És el més senzill que he trobat després d'experimentar diverses solucions. Això no vol dir que sigui banal, és a dir, que no tingui cap originalitat o interès. Sobretot si ens demanem d'on procedeix i per què funciona.

L'originalitat s'ha de cercar, és clar, en l'obra primitiva, i això m'ha dut a fer un viatge al passat, a les arrels, que us invito a compartir.

Tot just acabava de començar el curs, i ens vam trobar davant del primer repte: el professor Josep Pla[1] ens va demanar la recerca d'una bona manera de construir el pentàgon regular. Amb aquesta proposta ens convidava a visitar territoris matemàtics que no perquè són coneguts sempre són prou explorats.

Quantes sorpreses ens pot oferir un estudi acurat de la història de les matemàtiques? Personalment n'he trobat unes quantes en aquest petit viatge a la recerca de la construcció, amb regle i compàs, i d'una manera senzilla, d'un pentàgon regular.

Per resoldre un problema d'aquesta mena, no és difícil trobar-hi referències de tot tipus en les abundants fonts d'informació que actualment tenim a l'abast. Però si volem aprofundir-hi, res millor que recórrer als clàssics. El punt de partida va ser Euclides, i de seguida vam comprovar que els seus *Elements* contenen gairebé totes les respostes a les preguntes que ens planteja la resolució d'aquest problema.

Continuant la recerca, més tard vaig descobrir una altra construcció que em va cridar l'atenció per la seva senzillesa i eficàcia. La vaig veure fullejant l'*Almagest*, de Claudi Ptolemeu (Ptolemeu, 1984). No em va costar gaire trobar-la. Quan aquest gran astrònom va iniciar el seu viatge científic cap a l'estudi del firmament i els cossos que l'habiten, en primer lloc va elaborar amb gran precisió una taula de cordes.[2] Com a pas previ, va estudiar la construcció d'alguns polígons regulars i el primer de tots va ser el pentàgon (conjuntament amb el decàgon i l'hexàgon), mitjançant el mètode que és objecte d'aquest estudi.

No es limita a fer-ne la construcció, sinó que demostra que és exacta, com també veurem. La justificació es basa en teoremes ja demostrats per Euclides, que tenen en compte les característiques peculiars d'aquest polígon:

> D'entre tots els polígons regulars, el pentàgon (i per extensió el decàgon, el pentadecàgon...) és el que gaudeix més clarament d'una estreta relació amb la raó àuria, també anomenada divina proporció (Luca Pacioli) o secció divina (Johannes Kepler).

No és objecte d'aquest article incrementar els innombrables estudis que ja s'han fet sobre el nombre d'or, però la recerca sobre el pentàgon regular (i les formes de construir-lo) no pot passar-ne l'existència per alt, ja que Φ es troba indissolublement unit a la naturalesa d'aquest encisador i màgic polígon, de múltiples i sorprenents maneres.

Tampoc no es trobarà aquí un tractat exhaustiu de la història de les matemàtiques, però sí que se'n recullen alguns aspectes que, a més d'il·lustratius, també poden ser una font de propostes didàctiques aplicables a l'aula. Quan es vol abordar a fons l'estudi d'un problema d'aquesta mena no convé aïllar-lo del seu context històric, ni deixar de considerar les connexions amb altres problemes i altres ciències. Si deixéssim la història oblidada en voluminosos llibres polsosos amagats en racons recòndits de certes biblioteques, seria una història morta que no serviria per res, i si ens limitéssim a digitalitzar-la i a convertir-la en cadenes de bits tancats en grans magatzems de discs durs o altres

1. En el curs de postgrau de didàctica de les matemàtiques de la UPF.
2. El concepte de *corda* és molt similar al de *sinus*, tal com queda explicat en l'apartat 3.2.2.

dispositius de memòria també seria un coneixement inert. En les nostres classes diàries hem de ser capaços de donar-hi una nova vida, revifar el foc del coneixement, recuperar les idees i les lliçons que són l'herència d'una llarga i fecunda tradició.

2. Els antecedents: un breu viatge a través de la història

És una tasca àrdua intentar resseguir les empremtes que porten a l'origen de les idees matemàtiques. El seu rastre es perd més enllà de les boires que ens impedeixen mirar enrere.

Qui va dibuixar el primer triangle equilàter o la primera circumferència perfecta? I de quina manera?, sobre la sorra o a la paret d'una cova?, amb quina mena d'estris? No ho sabem. Probablement no ho sabrem mai.

Però en els vestigis conservats de les cultures prehistòriques ja podem observar la dèria dels humans per representar la realitat que els envolta amb gràfics estilitzats, molt sovint de caire geomètric, i el gust per la decoració amb formes simètriques.

Segurament la geometria neix tant de l'observació de les formes sobre la terra com del desig de desxifrar els misteris del firmament estudiant la posició i el moviment del Sol, la Lluna, els planetes... Hi ha una certa tradició que atribueix a Egipte la invenció de la geometria, necessària per mesurar els camps, inundats de manera recurrent per les aigües del Nil. Tal com relata Heròdot en els nou llibres d'*Històries*:

> Els sacerdots deien que aquell rei [Sesostris] distribuí les terres d'Egipte entre els seus habitants, i donà a cadascú un tros igual, en forma de quadrat [...]. Si el riu s'emportava una part del lot d'algun, [...] el rei enviava gent per examinar i mesurar la reducció del terreny [...]. Crec que aquí es va inventar la geometria, que després passà a Grècia.

Aquesta opinió la podem veure repetida en molts textos posteriors, i per exemple Procle s'hi refereix en els comentaris al llibre I dels *Elements* d'Euclides. S'ha anat transmetent de generació en generació.

Evidentment és una visió etnocèntrica. No hem d'oblidar els coneixements assolits per altres cultures de manera simultània (i de vegades coincident) com ara la babilònica i la hindú, o també la xinesa (Pla, 2009) i la maia —per esmentar les més conegudes avui dia— , però certament Egipte va ser, ja fa molts segles, un dels llocs del món on la geometria va assolir fites més elevades.

Pel que fa als coneixements matemàtics d'aquesta antiga cultura, amb prou feines ens n'han arribat documents escrits (un nombre reduït de papirs com el Rhind o el de Moscou), però sí interessants rastres que podem trobar en les seves obres arquitectòniques. Per exemple, coneixem l'existència dels «tensadors de cordes» gràcies a algun gravat que s'ha conservat al fons de laberíntics passadissos protegits per carreus de pedres i que corroboren el que explicava Heròdot, entre d'altres.

Sabem que els constructors de les piràmides eren coneixedors del «secret» dels triangles rectangles (el posterior teorema de Pitàgores), i que sabien fer tots els complexos càlculs necessaris per realitzar admirables i sorprenents construccions (Buhigas, 2008).

D'altra banda, l'observació del cel, origen de l'astronomia, ha estat sempre (i encara ho és) un estímul important en la gènesi de moltes i fecundes idees matemàtiques. L'origen d'aquestes observacions es perd en la nit dels temps, però per sort encara se'n conserven taules i càlculs d'èpoques molt antigues.

L'escola d'Alexandria, com veurem més endavant, va tenir un paper molt important en els balbucients orígens de l'astronomia i altres coneixements relacionats, com la trigonometria. Aquesta ciutat propera al delta del Nil va ser l'escenari de la història de la construcció del pentàgon regular, tema central d'aquest article, però abans hem de viatjar cap a l'altra riba del Mediterrani, fent també un salt cronològic.

El pentagrama pitagòric va ser un símbol emblemàtic dels seguidors de Pitàgores. Els integrants d'aquesta escola van ser devots de les formes perfectes i les proporcions exactes, i les consideraven un reflex de la naturalesa divina de la creació. Així doncs, van quedar especialment corpresos per l'anomenat pentagrama místic pitagòric, símbol de vida i salut, emblema de la seva comunitat.

Diversos historiadors consideren que el descobriment dels incommensurables probablement es va produir a partir d'aquesta figura[3] (Fritz, 1945); amb el llenguatge actual, sabem que el nombre d'or, omnipresent en el pentàgon, és un irracional. Plató, en el *Timeu*, també fa referència a aquesta proporció com a divina, i considera que quan tres números la verifiquen formen una unitat perfecta.

És una opinió preponderant considerar que l'origen de les matemàtiques com a ciència es troba en la cultura grega, i probablement les matemàtiques actuals serien ben diferents sense l'alè del seu pensament i la seva filosofia. Però no podem oblidar que Pitàgores va beure de la font dels coneixements babilònics i egipcis, mitjançant els viatges que va fer per consell del seu mestre Tales, del qual sabem que havia trobat l'altura de les piràmides aplicant el seu conegut teorema i mesurant ombres. També és cert que quasi sense excepció la matemàtica egípcia i babilònica anterior a Tales és eminentment empírica, desenvolupada en forma de «receptes» i que tracta de resoldre problemes pràctics com els relacionats amb l'agrimensura, la determinació de volums, el càlcul d'impostos... De fet, es pot afirmar que el concepte de demostració és producte de la cultura grega.

L'obra d'Euclides va néixer a l'escola d'Alexandria, sobre l'ègida de la cultura hel·lènica. Ptolemeu,[4] successor d'Alexandre el Gran, havia establert en aquesta ciutat la capital de l'imperi hel·lènic i s'iniciava així un llarg i fecund període. Alexandria va brillar amb llum pròpia, i no només a causa del seu famós far.

Hereva de tota la saviesa antiga des de la seva fundació per Alexandre el Gran, va tenir una rica i fascinant biblioteca, que formava part del Museu.

Després d'Euclides, Eratòstenes va exercir com a director de la biblioteca, que va acollir il·lustres estudiosos com Arquimedes. Aristarc també hi va estudiar, gaudint de la saviesa acumulada als seus nombrosos volums, fruit de les ments més privilegiades de tots els confins del món conegut. I posteriorment, a la mateixa ciutat, Diofant va elaborar la seva interessant *Aritmètica*. Aquesta vitalitat cultural es va mantenir durant molts anys, fins a la malaurada desaparició de la valenta i sàvia Hipàtia.

Ja havien passat quatre-cents anys des de la mort d'Euclides quan Ptolemeu hi va desenvolupar la seva obra i, entre altres coses, va deixar constància del procediment per construir el pentàgon regular que he triat com a preferit i que exposaré més endavant. El naixement i el desenvolupament de les matemàtiques és producte d'una ingent obra col·lectiva, en la qual alguns genis brillen amb llum

3. Una altra possibilitat es deriva de la mesura de la diagonal del quadrat.
4. No s'ha de confondre aquest general (Ptolemeu I Soter, segle IV aC) amb el creador de l'*Almagest*.

pròpia, clarament distingible, com un far en la foscor, però que sempre han desenvolupat el seu treball fent com a primer pas un estudi de les obres dels seus predecessors. En aquest sentit, és ben coneguda una frase de Newton: «Si he aconseguit veure-hi més lluny que els altres, és perquè he pujat a l'esquena de gegants».

Totes aquestes reflexions han sorgit quan he volgut seguir la pista d'una bona construcció del pentàgon regular. No podem discutir a Euclides el mèrit de ser el primer que ho resol de manera sistemàtica. O més ben dit, el primer que en fa una exposició clara i completa, ja que molts historiadors consideren que la seva obra és una recopilació ordenada, sintètica i bastant completa de resultats anteriors, una feina de compilació amb indiscutibles mèrits que no li podem negar. Així doncs, la divisió d'un segment en mitjana i extrema raó (Euclides VI, definició 3) n'és la porta d'entrada:

> Es diu que una recta ha estat tallada en extrema i mitjana raó quan la recta sencera és al segment major tal com el segment major és al segment menor.

La proposició 11 del llibre II (Euclides 1991) resol el problema de trobar la secció àuria d'un segment. Les proposicions 10 i 11 del llibre IV expliquen la construcció del pentàgon regular, mètode que alguns autors atribueixen a l'escola pitagòrica.

No he triat aquest procediment com el preferit, perquè, sense discutir-ne el valor teòric, crec que ens porta a una construcció bastant complexa. En primer lloc s'ha de construir un triangle isòsceles de manera que cadascun dels angles de la base sigui el doble que l'angle restant, és a dir, un triangle amb angles de 72°, 72° i 36°. Per arribar a aquesta construcció, abans s'ha de trobar la secció àuria d'un segment —no és casualitat, com hem comentat més amunt, a causa de la seva relació amb el pentàgon—, i la resta de passos es poden consultar en les dues proposicions esmentades.

Una altra proposició interessant és la vuitena del llibre XIII:

> En un pentàgon equilàter i equiangular, unes rectes oposades a dos angles successius es tallen entre si en extrema i mitjana raó i els seus segments majors són iguals al costat del pentàgon.

En aquesta proposició es demostra, entre altres coses, la coneguda relació entre la diagonal i el costat d'un pentàgon regular, que és igual a Φ, però no ofereix un mètode directe de construcció.

Trobarem un mètode més senzill en l'*Almagest* de Ptolemeu, que és el que explico a continuació. Més endavant, també va ser utilitzat per Albert Dürer, considerat el millor geòmetra dels artistes del Renaixement italià. Avui en dia, és fàcil trobar-ho per internet, però només en forma de recepta, sense cap justificació. Ptolomeu, tot i que la utilitza amb motius pràctics, no en passa per alt la demostració, requisit imprescindible del pensament matemàtic.

3. La construcció de Claudi Ptolemeu

3.1. Context històric

L'obra de Claudi Ptolemeu es desenvolupa íntegrament dintre l'escola d'Alexandria, al segle II de la nostra era. No es coneixen gaires aspectes de la seva vida, però tot sembla indicar que va viure molts anys, almenys els necessaris per poder dur a terme una fructífera obra científica.

Els seus estudis astronòmics són els més coneguts i els que van tenir més influència al llarg de molts segles. Si bé el seu model de l'univers (geocèntric, com el que va proposar Aristòtil) es considera superat a partir de la revolució copernicana, no en podem ignorar els mèrits. Tot i ser fonamentalment erroni, va predir la posició i el moviment de tots els planetes amb més precisió que qualsevol model anterior, inclòs el sistema heliocèntric d'Aristarc.

En l'*Almagest*[5] va desenvolupar el primer intent seriós de modelitzar el moviment dels cossos celestes. Intentant donar versemblança a la seva teoria, va construir un enginyós sistema geomètric basat en cicles, epicicles, òrbites excèntriques i equants. Les seves observacions astronòmiques van ser molt importants; en va utilitzar de pròpies i altres de més antigues, fetes per Aristarc, Hiparc, Teó d'Esmirna, i també alguns registres babilònics anteriors, que coneixem gràcies a la seva obra, ja que s'han perdut les dades originals.

Es pot considerar un dels precursors de la trigonometria. Els estudis d'Hiparc són anteriors, però Ptolemeu ens va deixar el registre de les primeres taules trigonomètriques que es conserven, i amb una precisió gens menyspreable, molt sovint amb errors absoluts menors que un deumil·lèsim. Es tracta de les seves taules de cordes, concepte molt proper a l'actual del sinus.

També va proposar la projecció estereogràfica, utilitzada més endavant en la construcció de l'astrolabi i en la confecció de mapes, disciplina que també va conrear elaborant la seva coneguda *Geografia*. Diversos estudis d'òptica i mecànica formen part de la seva obra coneguda, sense oblidar el *Tetràbiblos*, un tractat d'astrologia de molta influència en tota l'edat mitjana. Ptolomeu no va considerar incoherent ni sense fonaments relacionar el moviment dels astres amb certs esdeveniments del món sublunar, és a dir, de la Terra i els seus habitants.

Aquesta diversitat d'interessos intel·lectuals no n'eclipsen la importància en certs aspectes de les matemàtiques. L'*Almagest* és sobretot una obra d'astronomia, però amb una sòlida base matemàtica.

No és estrany, doncs, que —per posar-ne només un exemple (Vernet, 2004)— el savi jueu del segle XII Abraham Bar Hiyya, nascut a Barcelona, recomanés als que es volien iniciar en el coneixement de les matemàtiques que llegissin en primer lloc els *Elements* d'Euclides i a continuació uns quants llibres intermedis abans d'abordar l'*Almagest* de Ptolemeu: les *Esfèriques* de Teodosi i de Menelau, l'*Esfera en moviment* d'Autòlic, les *Còniques* d'Apol·loni, i *L'esfera i el cilindre* d'Arquimedes, entre d'altres.

La influència d'Euclides en l'*Almagest* és indiscutible: segurament els *Elements* es conservaven a la mateixa biblioteca d'Alexandria quatre segles després, potser l'original o en tot cas alguna còpia, ja que hi fa contínues referències. Però Ptolemeu tenia un objectiu clar: desxifrar el misteri del moviment dels cossos celestes. Va conrear les matemàtiques sobretot com una eina que li permetia assolir aquest objectiu, una eina fiable i exacta, és clar, però amb una utilitat pràctica, no tancada en ella mateixa. Aquesta és la impressió que fa la lectura de l'*Almagest*.

3.2. Construcció del pentàgon regular

El mètode que he triat és precisament el primer resultat matemàtic de tot el llibre, que es troba en el capítol I, apartat 10, després d'una introducció en què desenvolupa la seva concepció sobre la

5. El títol original d'aquest llibre va ser *Hè megalè sintaxis* [*El gran tractat*]. Generacions posteriors van afegir-hi el superlatiu «megiste», que vol dir 'el més gran'. Quan els àrabs van traduir aquesta obra a la seva llengua, hi van afegir l'article *el* («al» en àrab).

filosofia de la Ciència. No omet cap aspecte de la demostració, però el seu interès en la construcció del costat del pentàgon regular (que fa de manera simultània amb la del costat del decàgon) té un clar objectiu: el càlcul de les cordes de diferents angles, començant per 72°, 36° i 60° (a partir del pentàgon, decàgon i hexàgon); a continuació també troba les de 90° i 120° (a partir del quadrat i del triangle equilàter). Després, mitjançant altres teoremes, en particular el conegut pel seu nom,[6] troba la corda de la suma, la diferència, l'angle doble…amb fórmules similars a les de la trigonometria actual, fins a arribar a trobar les cordes de la resta d'angles en intervals de mig grau.

Cal observar que Ptolemeu es limitava a construir el costat del pentàgon, conjuntament amb el costat del decàgon, que és el que realment necessitava, tal com apareix en la figura 5. A partir d'aquest punt, completar el pentàgon no ofereix cap dificultat.

Les figures 1, 2, 3 i 4, que il·lustren el procediment, estan fetes amb programa Geogebra, i no amb regle i compàs, encara que emulen el procediment manual. Aprofito alguns avantatges, com el fet que el programa permet trobar el punt mitjà *E* del segment *DG* directament. Si només fem servir el regle i el compàs, *E* es pot trobar construint la mediatriu del segment *DG*.

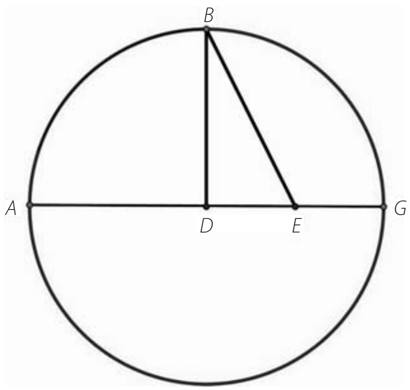
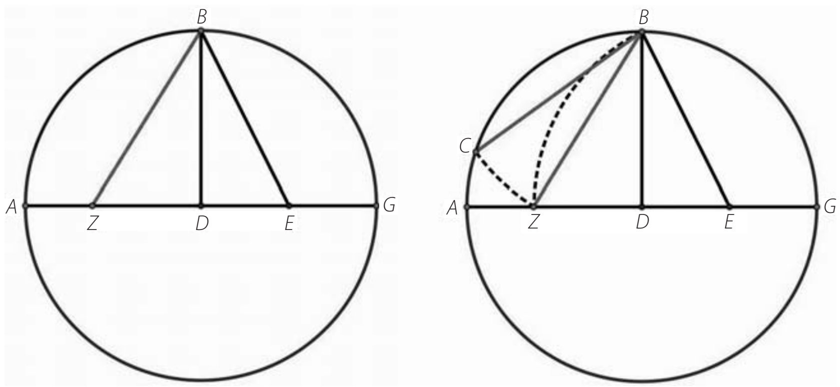


Figura 1. Inici del procés.



Figures 2 i 3. Passos següents.

6. Aquest teorema afirma que «el producte de les diagonals d'un quadrilàter inscrit en un cercle és igual a la suma dels productes dels costats oposats».

3.2.1. Passos a seguir per construir el pentàgon

- Construïm la circumferència, el diàmetre *AG* i el radi *DB*, perpendicular a aquest diàmetre.
- Construïm a continuació l'arc de circumferència amb centre *E* i radi *EB* fins a trobar el punt *Z*, punt de tall d'aquesta circumferència amb el diàmetre de la circumferència inicial. Aleshores,

El costat del pentàgon és igual a *BZ*.

- Traslladem aquest costat a la posició *BC* amb un simple moviment de compàs (dibuixant un arc amb centre *B* i radi *BC* fins que talli la circumferència inicial). Per tant *BC* també és el costat del pentàgon.
- Prenent la mida *BC* (costat del pentàgon) quatre vegades més, completem la figura.

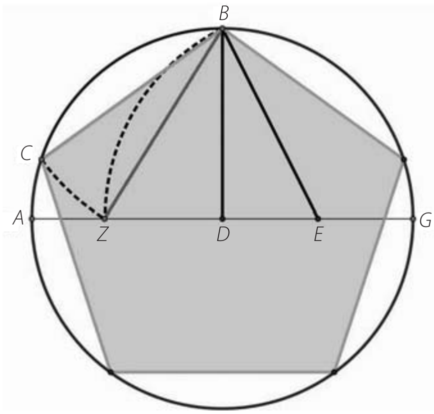


Figura 4. Final del procés. El pentàgon ja construït.

3.2.2. Justificació d'aquest procediment

Proposició: Considerem un semicercle *ABG* amb centre *D* i diàmetre *ADG*. Dibuixem *DB* perpendicular a *AG* per *D*. Biseccionem el segment *DG* i en trobem el seu punt mitjà *E*. Unim *E* amb *B* (construïm *EB*). Fem *EZ* igual a *EB*, i unim *Z* amb *B*. Aleshores,

- *ZD* és el costat del decàgon regular.
- *BZ* és el costat del pentàgon regular.

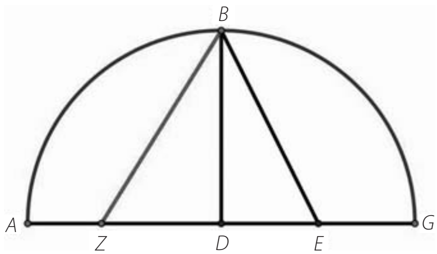


Figura 5. Reproducció de la imatge de l'*Almagest* sobre la qual es basa la demostració.

Tot el raonament que fa Ptolemeu i que explico a continuació es pot consultar a l'*Almagest* (Ptolemeu, 1984). Com ja he dit més amunt, es troba al principi, concretament en el capítol I, apartat 10, titulat «La mesura de les cordes».

No sempre és fàcil desxifrar-lo. Si volem comprendre bé tots els passos és imprescindible tenir a mà un exemplar complet dels *Elements* d'Euclides (Euclides, 1991), ja que Ptolemeu considerava que molts dels resultats que n'utilitza són prou coneguts, i que intentaré clarificar.

DEMOSTRACIÓ:

- En primer lloc, Ptolemeu demostra el següent:

  PROPIETAT: *ZG* queda dividit en extrema i mitjana raó pel punt *D*. Utilitzant una expressió més actual, el punt D determina una secció àuria sobre el segment *ZG*.

  Més concretament, Ptolemeu demostra que es verifica $GZ \cdot ZD = DG^2$. [1]

  En primer lloc, assegura, sense més explicacions, que $GZ \cdot ZD + ED^2 = EZ^2$. [2]

  És certa aquesta igualtat? D'entrada, cal pensar-hi una mica abans de donar-la per vàlida. Des d'un punt de vista algèbric actual, només cal aplicar la fórmula $(2a + b) \cdot b + a^2 = (a + b)^2$. [3]

  Fent $a = ED$ i $b = ZD$, aleshores $GZ = 2a + b$, ja que $2DE = DG$. Per tant, la relació [2] és clara. Ptolemeu la dóna per vàlida directament. Potser hi té en compte la proposició II, 6 d'Euclides, que afirma el mateix que [3] però des d'un punt de vista geomètric, no algèbric, és clar.

  La resta de passos són més evidents: com que $EZ = EB \rightarrow EZ^2 = EB^2$. D'altra banda, $EB^2 = ED^2 + DB^2$ (per Pitàgores, teorema també inclòs als *Elements*).

  Per tant, a partir de [2]: $GZ \cdot ZD + ED^2 = ED^2 + DB^2 \rightarrow GZ \cdot ZD = DB^2$ (restant ED^2 a cada membre). Com que $DB = DG$, la relació [1] queda demostrada: $GZ \cdot ZD = DG^2$, el segment *ZG* queda dividit en mitjana i extrema raó.[7]

- Per demostrar la resta de la proposició, raona de la manera següent:

  — *ZD* és el costat del decàgon regular

    Justifica aquesta afirmació aplicant clarament la proposició XIII, 9 d'Euclides, tot i que la suposa coneguda: «Si s'uneixen el costat d'un hexàgon i el d'un decàgon inscrits en el mateix cercle, la recta sencera queda tallada en extrema i mitjana raó, i el seu segment major és el costat de l'hexàgon».

    Queda clar que també té en compte que el costat de l'hexàgon regular és igual al radi de l'hexàgon.[8] De fet, quan Ptolemeu aplica aquesta proposició, està raonant de manera inversa, més o menys així: «Si la recta sencera *ZG* (tal com ha estat construïda) queda tallada en extrema

7. Aplicant la definició 3 del llibre VI d'Euclides: «Es diu que una recta ha estat tallada en extrema i mitjana raó quan la recta sencera és al segment major tal com el segment major és al segment menor».

8. Aquesta propietat també és ben coneguda per Euclides, que la utilitza en la proposició 15 del llibre IV: «Inscriure un hexàgon equilàter i equiangle en un cercle donat».

i mitjana raó per *D*, i el seu segment major *DG* és el costat de l'hexàgon, aleshores *ZD* és el costat del decàgon regular».

D'aquesta manera, està considerant que la condició esmentada és suficient, no només necessària. Si tenim en compte que, donada una circumferència, les mides dels costats de l'hexàgon, i el decàgon són úniques, podem donar per vàlid el seu raonament.

— *BZ* és el costat del pentàgon regular

Ara aplica la proposició XIII, 10 d'Euclides, que relaciona els costats del pentàgon, l'hexàgon i el decàgon regulars inscrit sen una circumferència: «Si s'inscriu un pentàgon equilàter en un cercle, el quadrat del costat del pentàgon és igual als quadrats dels costats de l'hexàgon i el decàgon inscrits en el mateix cercle».

En el triangle *BDZ*, es verifica la relació: $BZ^2 = BD^2 + DZ^2$. Ja sabem que *BD* és el costat de l'hexàgon, *DZ* el del decàgon, i per tant *BZ* és el costat del pentàgon. I la proposició queda demostrada. Sempre que considerem correctes, és clar, les demostracions prèvies d'Euclides.

Després d'una llarga presència de segles en els *curricula* de l'estudi de les matemàtiques, els *Elements* han caigut en molts casos en la indiferència i l'oblit. Els temps evolucionen, i no es tracta avui en dia de fonamentar l'ensenyament de la geometria en un seguiment dogmàtic dels *Elements* d'Euclides, però si la curiositat ens mou a obrir-ne algun dels volums i fullejar-lo, ens adonarem que moltes coses que expliquem en les nostres classes hi tenen l'origen i els fonament.

I d'altra banda, també hi podem trobar una font d'inspiració i estímul per resoldre nous reptes matemàtics. Sense anar més lluny, podem cercar i analitzar les dues darreres proposicions esmentades, que es refereixen a dos teoremes interessants i no gaire coneguts: Ptolemeu aprofita aquesta relació entre els costats del pentàgon, del decàgon i el radi de la circumferència (que és el costat de l'hexàgon) per començar a elaborar la seva taula de cordes. Aquí rau la importància d'aquest darrer resultat.

4. Aspectes complementaris

4.1. El número d'or. Una demostració alternativa a la donada per l'*Almagest*

4.1.1. Èxits i limitacions de les matemàtiques en el període hel·lènic

Les matemàtiques elaborades per la cultura grega van assolir fites elevades al llarg de gairebé un mil·lenni, però això no ens fa oblidar-ne les limitacions; parlem més aviat de geometria, molt al marge de l'aritmètica i l'àlgebra, quasi inexistents.

Així doncs, els grecs van viure la descoberta dels incommensurables com una experiència traumàtica, i els va condicionar molt la visió de l'univers matemàtic. La falta de confiança en la naturalesa de les magnituds relacionades d'alguna manera amb l'infinit i la inexistència del zero, més una notació no gaire eficient que assignava a cada número una lletra, van ser les causes principals d'una limitació operacional important.

Durant molt temps no van assignar a les figures geomètriques nombres que poguessin mesurar-ne les longituds, les àrees i els volums, i es troba a faltar la presència d'una àlgebra en sentit algorísmic i simbòlic. Això complica la comprensió dels seus textos matemàtics, malgrat reconèixer el domini que van tenir de sofisticades tècniques geomètriques.

D'altra banda, la filosofia platònica imperant va imposar en la matemàtica grega un rigor dominant per sobre de qualsevol altre valor (creativitat, intuïció…) que va cristal·litzar en obres com els *Elements* d'Euclides, paradigma de la manera de fer i de pensar d'aquella època. Durant molt temps, la cultura hel·lenística va desenvolupar una ciència més aviat teòrica i abstracta, feliç amb els seus mètodes i procediments allunyats de les aplicacions pràctiques relacionades amb la realitat sensible, corpòria. Donava preponderància a una visió de la matemàtica pura, considerant que el veritable científic basava el seu prestigi en un saber teòric, l'únic que li podia proporcionar una posició social eminent.

Però també formen part de la cultura hel·lenística (de la segona part d'aquest període) savis com Arquimedes i Ptolemeu, entre molts d'altres. Ells van contribuir de manera important al desenvolupament de la mecànica, la física, l'astronomia... *malgrat* la relació d'aquestes ciències amb el món sensible.

Ptolemeu desenvolupa tècniques de computació que li permeten fer càlculs posicionals amb una precisió molt acurada, i no es limita al conreu d'una matemàtica abstracta, ja que el seu objectiu és pràctic, si bé considera l'astronomia una de les ciències físiques de més rang, i no passa per alt el compromís amb el rigor matemàtic. A l'escola d'Alexandria, quatre segles més tard, l'ombra d'Euclides encara era allargada.

4.1.2. El número d'or i la secció àuria

Euclides coneix els incommensurables; totes les 115 proposicions del llibre X hi fan referència. Cal tenir en compte que es considera que els llibres V i VI són bàsicament d'un altre matemàtic. Es tracta d'Èudox de Cnidos, que, amb la seva teoria de la proporció, resol la crisi provocada en els fonaments de la matemàtica grega pel descobriment de les magnituds irracionals (designades pel mot grec *alogon*), però que no van gaudir d'una identitat pròpia com a nombres. Els límits imposats per la racionalitat i l'ordre hel·lènics que només podien tenir en compte un món regit pels nombres «racionals» no van permetre anar més enllà.

Euclides sap que la secció àuria (anomenada mitjana i extrema raó) produeix segments incommensurables:

> Si una recta commensurable es talla en extrema i mitjana raó, cadascun dels segments és la recta sense raó expressable anomenada apòtoma. (Euclides, XIII, 6)

Però sempre es parla en termes de proporció, i no de nombre.

Actualment, també podem parlar de proporció o raó, però el resultat d'aquesta proporció té entitat pròpia, és el número d'or,

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Figura 6. Divisió àuria d'un segment.

Observem la figura 6: Si B determina una secció àuria sobre el segment AC, aleshores

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

Si considerem AB com a unitat, i anomenen $AC = x$, obtenim la relació equivalent:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \ \rightarrow \ x^2 - x - 1 = 0$$

Aquesta equació només té una solució positiva, que és Φ.

*4.1.3. Una demostració alternativa de la que es dóna en l'*Almagest

La utilització de Φ ens permet una demostració alternativa a la propietat de l'apartat 2.3, diferent de la que fa Ptolemeu. Es tracta de provar que el punt D determina una secció àuria sobre ZG.

Tornem a la figura 5. Si agafem com a unitat el radi de la circumferència, $DG = BD = 1$, només cal demostrar que $ZG = \Phi$.

Si apliquem el teorema de Pitàgores en el triangle BDE,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = BE^2 \rightarrow BE = \frac{\sqrt{5}}{2} = EZ.$$

Per tant,

$$GZ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

4.2. La trigonometria de Ptolemeu. Les cordes

4.2.1. Origen de la trigonometria

Segons el Gènesi, l'origen del temps i de les claus que ens permeten desxifrar-lo és anterior a la creació de l'home (i de la dona). El quart dia Déu va dir: «Que hi hagi llumeneres al firmament del cel, que separin el dia, la nit, i facin de senyal per a les festes, i els dies i els nits». Va crear el Sol, la Lluna i les estrelles per «regular el dia i la nit i separar la llum de les tenebres». La separació no va ser radical, per sort per a tots els que, després d'aquesta creació (ja sigui real o virtual), han volgut desentranyar els misteris inherents al pas del temps, les estacions, els dies i les hores. No és total la foscor de la nit, atenuada per la llum de la Lluna i les estrelles, i durant el dia el Sol escampa ombres sobre tota la superfície il·luminada de la Terra. I així l'estudi de certes ombres ha donat la llum necessària per entendre molts esdeveniments. Segons un aforisme d'un antic llibre xinès, «el coneixement surt de l'ombra, i l'ombra surt del gnòmon».[9]

9. David E. Smith, en *History of Matematics*, fa aquesta citació provinent del llibre xinès *Chou Pei Suan Ching* (1105 aC).

Sabem que, utilitzant el mètode de les ombres, Tales va mesurar l'altura de les piràmides i Eratòstenes el radi de la terra. L'estudi de la proporcionalitat per mesurar distàncies es pot considerar un pas important en la gestació de la trigonometria. Hiparc, que va viure al segle II aC, i és considerat un dels astrònoms més importants de l'antiguitat, hi va fer avenços importants, però en coneixem l'obra només per referències.[10] Sabem que va construir una taula molt completa de cordes, que va donar la posició d'un miler d'estrelles, va descobrir la precessió dels equinoccis i també va desenvolupar el mètode de projecció estereogràfica que permet elaborar mapes del cel i de la Terra.

Tots aquests resultats van ser recollits per Ptolemeu en l'*Almagest*. Aquest llibre també consta de tretze capítols (com els *Elements* d'Euclides), i també es pot considerar una recopilació de molts coneixements anteriors, a més de les aportacions pròpies de l'autor. I, sobretot, les dues obres s'han conservat completes, i per tant són uns testimonis importants dels coneixements científics de la seva època.

4.2.2. Les cordes

Cada corda *AB* determina un arc sobre la circumferència i un angle central α corresponent:

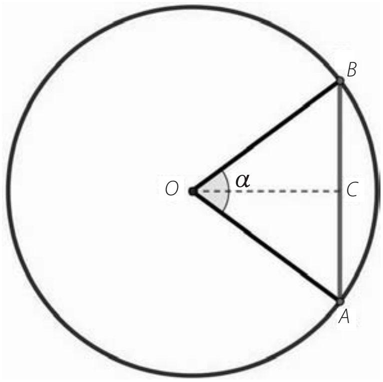


Figura 7

La taula de cordes que elabora Ptolemeu dóna la longitud de cada corda en funció de l'angle central corresponent de 0° a 180° en intervals de mig grau. Aquesta tabulació és necessària, ja que l'amplitud de l'angle i la longitud de la corda no són valors directament proporcionals.

El concepte de corda és molt proper al concepte del sinus i potser més natural. Si anomenem *d* a la longitud de la corda i *r* al radi del cercle, aleshores

$$d = corda\,(\alpha) = 2r \sin\,(\alpha/2).$$

Ptolemeu agafa com a radi del cercle el valor $r = 60$, ja que treballa en el sistema sexagesimal babilònic. Si considerem $r = 1$, aleshores

$$\sin\,(\alpha/2) = d/2.$$

Tal com ja he explicat abans, després de donar per justificada la construcció del costat del pentàgon regular, Ptolemeu utilitza aquesta construcció i altres resultats matemàtics per calcular una taula de

10. Per exemple, gràcies al comentaris de Teó d'Alexandria a l'*Almagest* de Ptolemeu.

cordes molt completa. Concretament enuncia i demostra l'anomenat teorema de Ptolemeu (vegeu nota 6) i a partir d'aquest teorema calcula la corda de la diferència de dos angles i la de l'angle meitat, amb fórmules similars a la del sinus de la diferència i el sinus de l'angle meitat de la trigonometria actual. D'aquesta manera, calcula les cordes d'angles separats per mig grau. Ja he observat que en el càlcul d'aquestes taules va assolir una gran precisió.

En les matemàtiques de l'*Almagest* no hi trobem només una matemàtica abstracta, pura: el còmput matemàtic es comença a obrir camí, sense complexos.

Abans d'acabar el capítol I estudia també molts aspectes de la trigonometria esfèrica; de fet, l'*Almagest* va influir en la trigonometria de tota l'antiguitat, i totes les taules astronòmiques aparegudes fins al segle XII hi tenen la base fonamental.

Escoltem, per acabar, el mateix Ptolemeu. Segurament era conscient que el deixant de la seva obra crearia solcs inesborrables:

> Sé molt bé que sóc mortal, criatura d'un sol dia.
> Però si la meva ment segueix els sinuosos passos de les estrelles
> aleshores els meus peus no es queden durant gaire temps a la terra,
> i sostingut pel mateix Zeus immortal
> m'alimento fins a la sacietat d'ambrosia, el menjar diví.

4.3. El triangle auri major o triangle de Price

Per acabar, proposo algun problema complementari per als que tinguin curiositat i ganes de pensar. És fàcil demostrar que l'únic triangle rectangle que té els costats en progressió aritmètica ha de ser el que té les mides de la coneguda terna pitagòrica 3, 4 i 5 (o per extensió, qualsevol triangle rectangle semblant, com ara el de mides 6, 8 i 10). Tots aquests es poden considerar de la mateixa forma (isomorfs), i és el que alguns anomenen triangle sagrat egipci: es pot trobar com a forma generadora de la piràmide de Kefren, en la seva semisecció meridiana (Ghyka, 1953).

També es pot demostrar que l'únic triangle rectangle que té els costats formant una progressió geomètrica té les mides 1, $\sqrt{\Phi}$ i Φ (o qualsevol altre congruent). Aquest és l'anomenat triangle auri major o triangle de Price (deu el nom al matemàtic anglès W.A. Price, que opinava que és present en la gran piràmide de Kheops). També altres científics i historiadors de la ciència consideren que la semisecció meridiana d'aquesta piràmide és un triangle auri amb costats proporcionals a 1, $\sqrt{\Phi}$ i Φ, respectivament. Es pot dibuixar fàcilment a partir de les construccions anteriors que he explicat (en la figura 8 és el triangle *CDG*).

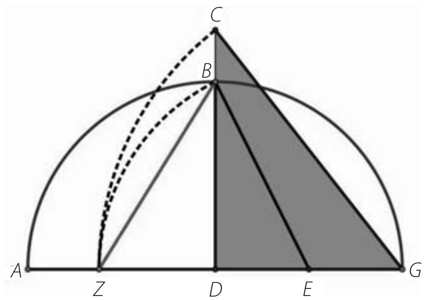


Figura 8. El triangle auri major.

Aquest dibuix l'he obtingut a partir del de la figura 5. Recordem que $DG = 1$. El punt E és el punt mitjà del segment DG, i D determina una secció àuria sobre GZ. Després només cal prendre la distància $GC = GZ = \Phi$ i considerar la propietat:

$$1 + \Phi = \Phi^2 \quad \text{per demostrar que} \quad DC = \sqrt{\Phi}.$$

Passats més de quatre mil anys des que va ser construïda, no podem precisar exactament les mides de la gran piràmide, ja que ha patit modificacions per causes diverses. Es pot comprovar, però, que encara actualment s'adiuen força a les del triangle auri. Tot i això, no deixa de ser una opinió discutible. I encara que fos encertada, aquest fet aïllat no implicaria el coneixement conscient de la proporció àuria en l'àmbit de la cultura egípcia.

Una visió platònica del coneixement ens fa considerar que les matemàtiques ja existeixen en el seu reialme, més enllà de les que podem arribar a conèixer, i que de fet el llibre de la natura està escrit en llenguatge matemàtic, com deia Galileu. Però quines són les que van arribar a conèixer els constructors de les piràmides? Són poques les estructures arquitectòniques que han generat tants mites i controvèrsies com la gran piràmide.

Explico, només com a mostra, una d'aquestes històries insòlites. L'historiador grec Heròdot, considerat el pare de la historiografia, va visitar Egipte el segle V aC. Segons diversos autors va deixar escrit: «El quadrat de l'altura de la piràmide és igual a la superfície d'una de les seves cares». Si la propietat enunciada és certa, es pot demostrar amb uns càlculs senzills que el triangle que forma el semiperfil de la gran piràmide és un triangle auri major exacte. Ho deixo com un repte, tot i que se'n pot trobar la solució consultant les fonts adequades (Livio, 2009).

El més insòlit d'aquesta història rau en el fet que durant més d'un segle s'ha anat citant en àmbits «científics» una afirmació que Heròdot no va fer mai. Només caldria consultar la font original, el llibre II, anomenat «Euterpe», dels nou llibres d'*Històries*, en el paràgraf 124. Ja se sap que normalment l'aigua és més pura com més properes siguin les deus.

5. Conclusions. Implicacions didàctiques

En una revista com aquesta, interessada per la didàctica de les matemàtiques, no podem deixar de fer-nos una pregunta: Quins dels aspectes contemplats en aquest article són aplicables a l'aula?

És clar que no tots els alumnes solen assolir els 5 nivells de Van Hiele. La deducció formal i el rigor difícilment són assolibles pels estudiants no universitaris. Sí que podran assolir fàcilment el mètode de construcció, visualitzar, experimentar…

Tot i això, abordar un problema com el de la construcció del pentàgon regular (i altres de relacionats) pot arribar a ser molt enriquidor i engrescador, com ho ha estat per a mi. També pot suggerir reflexions de tota mena sobre la dimensió cultural de les matemàtiques i el seu notable impacte en el desenvolupament de la humanitat, o sobre les peculiaritats que la distingeixen de les altres formes de coneixement i com se n'ha de plantejar de manera adient l'ensenyament.

Els temps canvien i també ho fa la societat d'una forma accelerada, irreversible. Noves idees sobre l'ensenyament de les matemàtiques neixen amb força arreu del món. Diverses idees que són convergents en els seus eixos principals ens conviden a prestar una atenció especial al desenvolupament de competències o habilitats com ara pensar matemàticament, saber argumentar, representar i comunicar, resoldre, modelitzar... i tot això en contextos reals, no gaire llunyans de l'experiència quotidiana. El món real significa l'entorn social, personal, laboral, científic... en el qual vivim.

Des de les matemàtiques hem d'educar les persones perquè es puguin beneficiar de la cultura matemàtica i puguin actuar, de la millor manera possible, en el món real en què han de viure. I cal fer-ho des de la faceta personal, social i professional, tant en el present com en el futur més o menys previsible.

La didàctica de la geometria és una de les parts dels *curricula* que ha estat sotmesa a més vicissituds en els darreres anys. L'agost del 1976, durant la celebració de l'ICME (International Congress on Mathematical Education) a Karlsruhe, el gran geòmetra anglès Michael Atiyah va dir, en una conferència plenària:

> Heu destronat a Euclides, hi estic d'acord. Però de quina manera heu substituït l'ensenyament de la geometria? La matemàtica que s'ensenya avui en la majoria dels països està encara més allunyada de la realitat, perquè no té cap suport geomètric. S'ha de tenir en compte que la intuïció geomètrica és i serà sempre la font més poderosa per a la comprensió de molts temes. Per tant, el pensament geomètric ha de ser estimulat al màxim possible i en tots els nivells.

Després de la preponderància de la geometria d'Euclides durant molts segles, i de l'abandó injustificat de la geometria intuïtiva o sintètica a causa de la implantació de la matemàtica moderna, i també per un ús exclusivista de la geometria analítica,[11] avui es considera una necessitat ineludible recuperar el contingut espacial i intuïtiu de la geometria.

Segons Miguel de Guzmán (2007):

> Quan parlo de pensament geomètric no em refereixo a l'ensenyament de la geometria més o menys fonamentada en els *Elements* d'Euclides, sinó a alguna cosa més bàsica i profunda que és el conreu d'aquelles porcions de la matemàtica que provenen de la capacitat de l'home per explorar racionalment l'espai físic en què viu, la figura, la forma física, i intenten estimular-la.

Quan es diu que és necessari que les matemàtiques incideixin en el *món real*, podem caure en un parany i oblidar-nos del món mental, indissoluble d'això de «fer matemàtiques». Aquest món mental és tan real com el món físic. Molts problemes reals, amb solucions reals, no s'haurien resolt sense un salt al món abstracte, laboratori fecund de molt invents matemàtics.

Es tracta d'explorar racionalment el món físic, és a dir, amb models mentals. Això és la veritable essència de la matemàtica que no podem oblidar a l'hora ensenyar-la. Determinar l'altura del salt, com fer-lo i trobar-hi el moment adequat són tasques que cal tenir en compte en el procés.

L'any 1995 es va celebrar a Catània el congrés ICMI «Study on Geometry». Després d'un debat molt enriquidor es va arribar a interessants conclusions, recollides en una publicació (Mammana, 1998).[12] En recomano la lectura a tots els interessats en qualsevol aspecte de la didàctica de la geometria, ja que segurament hi trobaran més d'una resposta si més no meditada, ja que aquest congrés es va preparar amb anys d'antelació i fòrums de debat previs.

11. Tot i els seus èxits indiscutibles, l'ús de l'àlgebra geomètrica de vegades fa els problemes irresolubles o simplement implantejables. Vegeu, si no, certs problemes geomètrics de les Olimpíades matemàtiques.

12. Alguns dels articles d'aquesta publicació es poden trobar traduïts a l'adreça http://www.euclides.org (vegeu mapa del web). També hi podem trobar un resum dels *Elements* d'Euclides.

Què han de contenir o què contenen els nous *curricula* de la geometria en diversos països del món? Quina és la tendència general? Com n'ha de ser l' ensenyament en totes les diferents etapes de l'escola? Quin paper hi han de tenir la visualització, l'exploració intuïtiva, el raonament i la demostració? Com poden incidir les noves tecnologies en els processos d'aprenentatge? Aquests aspectes i molts d'altres són desenvolupats en les actes corresponents. A més, el debat és ben viu i no ha perdut actualitat en aquests darrers anys.

En últim lloc, vull expressar el meu agraïment als professors i companys del curs de postgrau de Didàctica de les Matemàtiques de la UPF (curs 2008-2009), de grats records. Sense el seu estímul i comprensió aquest article no hauria sortit a la llum ni hauria quedat a l'ombra, per inexistent.

6. Referències

Boyer, Carl B. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Buhigas, Jaime. (2008). *La divina geometría*. Madrid: La Esfera de los Libros.

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Servicio de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

De Guzmán, Miguel. (2007). Enseñanza de la Ciencias y la Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 43, 19-58. Madrid: Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

Euclides. (1991). *Elementos*. Madrid: Gredos. [Obra completa en tres volums. 1r volum: llibres I-IV. 2n volum: llibres V-IX. 3r volum: llibres X-XIII].

Fritz, Kurt. (1945). The discovery of incommensurability by Hipassus of Metapontum. *Annals of Mathematics*, 46, 242-264. Princeton.

Ghyka, Matila. (1953). Estética de las proporciones en la naturaleza y en las artes. Buenos Aires: Poseidón.

González Urbaneja, Pedro Miguel. (2004). La història de la matemàtica com a recurs didàctic i instrument d'integració cultural de la matemàtica. Reconstrucció informàtica dels problemes històrics amb forta incidència a la classe de matemàtiques. Annex: Els incommensurables [en línia]. Barcelona: Memòria del treball realitzat durant la llicència d'estudis aprovada pel Departament d'Educació. http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/801a.htm [Consulta: 25-VII-2011].

Livio, Mario. (2009). *The golden ratio*. Nova York. Broadway Books.

MacTutor History of Mathematics Claudius Ptolemy biography [en línia]. http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Ptolemy.html [Consulta: 25-VII-2011].

Mammana, C. i Villani, V. (ed.). (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. An ICMI Study Series: New ICMI Study, vol. 5.

NCTM. (2003). *Principios y estàndares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OCDE. The PISA 2003: Assesment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. París.

Pedersen, Olaf (1974). *A survey of the Almagest*. Odense: Odense University Press.

Pla i Carrera, Josep (2009). *Liu Hui. Nueve capítulos de la matemática china*. Madrid: Nivola.

Plató. (2003). *La República*. Llibre VII. València: Universitat de València. Servei de Publicacions.

Pólya, G. (1982). *Cómo plantear i resolver problemas*. [10a reimpressió]. Mèxic: Trillas.

Ptolemeu, Claudi (1984). *Ptolemy's Almagest*. [Traducció i anotacions de G. J. Toomer]. Londres: Duckworth.

Puig Adam, Pedro (1960) *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

Romero Vallhonesta, Fàtima; Massa Esteve, M. Rosa. (2003). El teorema de Ptolemeu. *Biaix*, 21, 31-36. Girona.

Santaló, Lluís A. (1993). *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*. Vic i Girona: Eumo i Universitat de Girona.

Vernet, Joan; Parés, Ramon (2004). *La Ciència en la història dels Països Catalans*. [Volum I]. Institut d'Estudis Catalans i Universitat de València.