L'adquisició de competències matemàtiques d'alumnes de primària en contextos de jocs de taula i resolució de problemes

Edelmira Badillo, Mequè Edo i Jordi Deulofeu

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
edelmira.badillo@uab.cat, meque.edo@uab.cat, jordi.deulofeu@uab.cat

Resum

En aquest article es presenta una reflexió teòrica i metodològica sobre una manera d'entendre l'aprenentatge i l'ensenyament de les matemàtiques, basat en un enfocament competencial. Des d'aquesta perspectiva, hem anat dissenyant i implementant seqüències didàctiques, validades en diferents aules de primària d'Europa i Llatinoamèrica, que busquen tant el desenvolupament de la competència matemàtica —el coneixement matemàtic, els processos associats a l'activitat matemàtica i el context d'aprenentatge— i el desenvolupament d'altres competències, com l'argumentativa i l'autonomia personal. La proposta que presentem pretén ser una petita aportació a aquest gran desafiament, mostrant que és possible desenvolupar competències matemàtiques en un context d'ús didàctic de jocs de taula. En particular, ens centrem en el desenvolupament d'estratègies de resolució de problemes i tècniques de càlcul mental i, en general, en el desenvolupament del sentit numèric fraccionari.

Abstract

This paper presents a theoretical and methodological reflection about one way to understand learning and teaching mathematics, based on a competence approach. From this perspective, we have been designing and implementing didactic sequences, validated in primary classrooms in Europe and Latin America, seeking both the development of mathematical competence —mathematical knowledge, the processes associated with mathematical activity, and the learning context— and the development of other skills, such as the argumentative ability and personal autonomy. Our proposal aims to be a small contribution to this great challenge, showing that it is possible to develop mathematical skills in a context with an educational game. In particular, we focus on the development of strategies for problem solving and mental calculation techniques and, in general, the development of fractional number sense.

1. Introducció

Qualsevol joc genera una situació regida per unes normes i regles especials, singulars i pròpies de cada joc. En aquest sentit Vigotski (1988) afirma que «el joc crea una Zona de Desenvolupament Proximal en l'infant. Mentre dura el joc, l'infant sempre està per damunt de l'edat mitjana, per damunt de la conducta diària; en el joc és com si fos un cap més alt del que és en realitat» (pàgs. 125-126). Per aquest autor el joc és una activitat essencial en el desenvolupament humà perquè proporciona beneficis cognitius, socials i morals que no només no s'han de reprimir en cap etapa del desenvolupament infantil, ni posteriorment d'adult, sinó que s'han de potenciar.

Diversos autors afirmen que l'ús del joc a l'aula, especialment el joc col·lectiu, és una activitat que permet el desenvolupament de diverses àrees: social, política (normes i regles), moral, del llenguatge, emocional i cognitiva (Kamii i DeVries, 1980; Cockcroft, 1982). Els resultats d'estudis que vinculen l'ús dels jocs col·lectius a l'aula de matemàtiques revelen que el temps destinat a jugar a la classe de matemàtiques pot ser una inversió de gran valor si sabem escollir els jocs adequats i aconseguim involucrar activament els alumnes en aquesta activitat (Edo, 1998; Corbalán i Deulofeu, 1996). De la mateixa manera, mostren que la connexió dels jocs amb les matemàtiques és múltiple i es refereixen tant a l'aprenentatge de conceptes i de tècniques com d'estratègies. En aquest punt hi ha una relació directa amb la resolució de problemes (Edo, Deulofeu i Badillo, 2007; Edo, Baeza, Deulofeu i Badillo, 2008).

El punt 227 de l'informe Cockcroft (1982) recomana, en diferents edats i en qualsevol nivell de coneixement dels alumnes, la utilització ben planificada de trencaclosques i jocs matemàtics per introduir continguts curriculars i per al desenvolupament del pensament logicomatemàtic. D'altra banda, Edo (2002) va analitzar diferents currículums de matemàtiques de les diferents comunitats autònomes de l'Estat espanyol i va concloure que en tots hi ha referències concretes i recomanacions perquè s'utilitzin jocs i recreacions per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques a primària, i en destaca que es promou l'ús dels jocs a l'aula de matemàtiques per a la resolució de problemes.

Des de la investigació en didàctica de la matemàtica també hi ha una preocupació per analitzar la relació que hi ha entre les fases de resolució d'un problema matemàtic i el procés de recerca de l'estratègia guanyadora d'un joc determinat (Edo, Baeza, Deulofeu i Badillo, 2008). Des d'aquest context, ens interessa demostrar la importància que té la introducció de jocs matemàtics en el desenvolupament de competències tant de caràcter general com matemàtiques.

Aquest article s'estructura en cinc apartats. En el segon, situem la nostra proposta dins de la tendència actual del currículum de Catalunya. En l'apartat següent, descrivim els referents teòrics que sustenten la proposta. Posteriorment, presentem una proposta didàctica, que s'il·lustra amb un joc d'exemple i amb les diferents activitats dissenyades que relacionen els jocs d'estratègia amb la resolució de problemes, centrant-nos en el concepte de fracció. Finalment, presentem algunes conclusions sobre la potencialitat que ofereix el context de jocs de taula i la resolució de problemes per al desenvolupament de competències matemàtiques i no matemàtiques.

2. Enfocament competencial de l'aprenentatge de les matemàtiques

Adúriz-Bravo (2011) postula que en la didàctica de les ciències i de les matemàtiques, així com en la investigació educativa en general, la noció de competència és considerada alhora problemàtica i potent. Tal com afirma l'autor

> els problemes provenen, entre altres coses, dels orígens extraeducatius del concepte (principalment, des dels camps de l'economia, el desenvolupament i el treball) i dels seus nombrosos

> —i delicats— matisos politicoideològics; la potència, per la seva banda, es deriva de la seva capacitat de fer que es reestructurin a fons els currículums, l'avaluació (formadora o acreditativa, interna o externa) i la formació del professorat.

En aquest article s'assumeix el terme de competència, de manera global des de la perspectiva de l'àmbit de l'Espai Europeu d'Educació Superior:

> La capacitat general basada en els coneixements, experiències, valors i disposicions que una persona ha desenvolupat mitjançant el seu compromís amb les pràctiques educatives. (Eurydice, 2002: 13)

No obstant això, matisem el terme, de manera particular, tal com el planteja Adúriz-Bravo (2011), el qual proposa una definició operativa de competència, que denomina «model de les tres ces (3C)» que pot ajudar els professors de ciències i de matemàtiques a veure de manera potent i alhora senzilla la relació que hi ha d'haver entre els diferents continguts de matemàtiques, en les seqüències que dissenyem, per tal que els alumnes construeixin coneixement científic a l'aula:

> [...] una competència científica escolar és qualsevol *capacitat* (cognitiva, discursiva, material, afectiva) d'ordre superior específica de fer alguna cosa sobre un *contingut* (científic) determinat, dins d'un *context* delimitat recognoscible (escolar significatiu i, per tant, transferible a la vida ciutadana).

Des d'aquesta visió, Sanmartí (2009) afirma que un treball competencial a l'aula implica tenir en compte cinc variables:

1. Complexitat, que implica xarxa de coneixements, incertesa, emergència, etc.
2. Integració de coneixements en la resolució de problemes
3. Funcionalitat i transferibilitat del coneixement en l'aplicació a situacions rellevants socialment i imprevisibles
4. Autonomia, per aprendre i actuar eficaçment, gestionar el coneixements i per regular-se
5. Avaluabilitat, per poder autoregular el pensament, els valors, les emocions i l'actuació.

Així, els nous plans curriculars ens plantegen a tots els professors un desafiament important: passar d'una formació centrada en l'assoliment d'objectius específics definits des dels continguts de l'àrea, a un ensenyament centrat en el desenvolupament de competències orientada a potenciar el pensament matemàtic dels estudiants. Assumir aquest enfocament implica reconèixer la importància tant de l'acció com de la comprensió i per tant reconèixer que en la noció de competència s'involucren i es relacionen diversos coneixements: saber què, saber què fer i saber com, quan i per què fer-ho. En aquest sentit, hem de tenir en compte que quan parlem de la competència matemàtica, és necessari tenir en compte tres aspectes que es relacionen permanentment: el coneixement matemàtic (tant el conceptual com el procedimental), els processos associats a l'activitat matemàtica (formular i resoldre problemes, modelar processos i fenòmens de la realitat; comunicar; raonar i formular comparar i exercitar procediments) i el context d'aprenentatge (Badillo, Jiménez i Vanegas, 2011).

En el currículum actual, basat en un enfocament competencial, i concretament en el desplegament curricular proposat per la Generalitat de Catalunya, es remarca el següent:

> Les competències bàsiques són l'eix del procés educatiu. El currículum orientat a l'adquisició de competències estableix que la finalitat de l'educació obligatòria és aconseguir que els alumnes i les alumnes adquireixin les eines necessàries per entendre el món i siguin persones capaces d'intervenir activament i crítica en la societat plural, diversa i en canvi continu que ens ha tocat viure. Un currículum per competències significa ensenyar per aprendre i seguir aprenent al llarg de tota la vida (Gencat, 2009, pàg. 6)

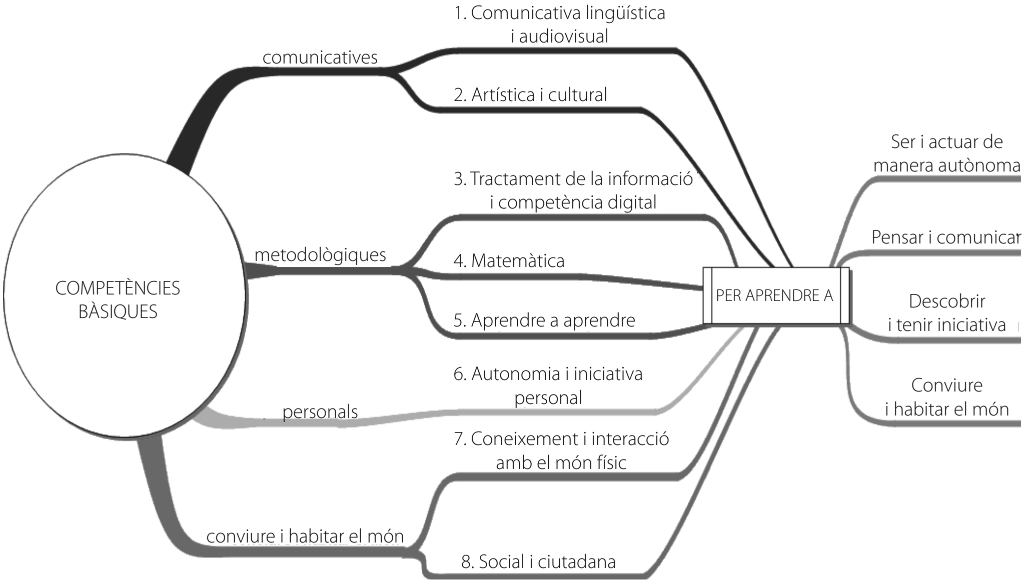


Figura 1. Esquema sobre competències bàsiques del web de la Generalitat de Catalunya.

Així, s'identifiquen dos grups de competències bàsiques. D'una banda, les competències transversals, que són la base del desenvolupament personal i de la construcció del coneixement, entre les quals es consideren: (1) les comunicatives, per comprendre i expressar la realitat; (2) les metodològiques, que activen l'aprenentatge, entre les quals hi ha la competència matemàtica; i (3) les personals. D'altra banda, les competències específiques per conviure i habitar el món relacionades amb la cultura i la visió de la realitat. En síntesi, les competències bàsiques són les vuit que presentem en la figura 1.

3. Una perspectiva teòrica sobre l'ús dels jocs d'estratègia a l'aula de matemàtiques de primària

En el camp de la didàctica de les matemàtiques existeix, des de fa anys, un interès especial per la investigació en l'ensenyament i l'aprenentatge de la resolució de problemes, que en ocasions es vincula amb el fet d'utilitzar jocs a l'aula. Aquest interès radica en l'èmfasi que els actuals currículums de matemàtiques competencials posen a la resolució de problemes, com un dels processos que s'ha de potenciar perquè els alumnes adquireixin la competència matemàtica. Aquest fet ha portat a considerar els jocs matemàtics com a elements clau en el procés d'aprenentatge de les matemàtiques i a usar-los no només per introduir continguts, sinó també, i molt especialment, per afavorir el desenvolupament de processos matemàtics vinculats a la resolució de problemes (Gómez-Chacón, 1992).

Entenem per joc matemàtic l'activitat col·lectiva basada en regles fixes, senzilles, comprensibles i assumides per tots els participants (Edo, Deulofeu i Badillo, 2007). Les regles establiran no només els objectius per al conjunt de jugadors, sinó també els objectius específics de cadascun dels participants que hauran de buscar les estratègies per bloquejar i/o guanyar la resta dels participants.

Depenent de l'objectiu el joc presenta diverses potencialitats a l'aula de matemàtiques i pot tenir diferents finalitats. Corbalán i Deulofeu (1996) distingeixen entre dues grans categories de jocs que es poden utilitzar en el marc escolar:

a) Els jocs de coneixement, que persegueixen la comprensió de conceptes o la millora de tècniques matemàtiques.
b) Els jocs d'estratègia, que se centren en l'adquisició de mètodes o heurístiques de resolució de problemes.

Per aquests autors, els jocs d'estratègia són aquells en els quals hi ha una estratègia, entesa com una determinada manera de jugar, que permet guanyar sempre un dels dos jugadors (o almenys no perdre, quan les taules són possibles). En aquest tipus de jocs totes les decisions estan en mans dels jugadors, ja que en tot moment la informació de què disposen és tota i no hi intervé l'atzar. Per tant, més enllà de practicar el joc, es tracta que els jugadors descobreixin l'estratègia guanyadora, és a dir, que trobin una manera de jugar que permeti a un dels jugadors guanyar sempre, o evitar que l'altre jugador guanyi, depenent del torn de la jugada (Edo, Deulofeu i Badillo, 2007).

Corbalán (1994) afirma que els jocs en el context escolar també necessiten l'ús de material que permeti registrar els processos de resolució del problema matemàtic implicats en el joc, tals com taulers i fitxes o simplement llapis i paper. Si analitzem els jocs de taula (amb cartes, taulers, fitxes, daus, etc.) una manera de classificar-los és en funció del grau d'atzar que contenen. Es poden distingir tres categories (Edo, Deulofeu i Badillo, 2007):

a) Jocs d'atzar pur. Per exemple, l'oca o l'escala. Són jocs en els quals els jugadors es limiten a executar les ordres dictades pel dau. No necessiten, ni poden, decidir res i per tant la seva actuació només consisteix a moure la peça associant la quantitat que marca el dau amb el valor posicional de la peça al tauler. En aquest grup podem situar el bingo.
b) Jocs amb alguna estratègia afavoridora. Per exemple, el parxís. Són jocs amb presència de l'atzar, però en el qual els jugadors han de prendre decisions que poden influir en el resultat de la seva partida: amb quina de les meves peces avanço? és millor posar fora de perill aquesta peça? si moc aquesta puc matar un contrincant?, etc. Encara que les partides continuen depenent en gran part de l'atzar perquè els daus segueixen manant, el resultat final també depèn de l'estratègia afavoridora que adoptin els jugadors. En aquest grup podem situar també el dòmino i molts jocs de cartes com la botifarra o el bridge.
c) Jocs d'estratègia. Per exemple, el marro. En aquests jocs totes les decisions estan en mans dels jugadors, que poden arribar a descobrir una estratègia guanyadora. És a dir, per a una determinada condició (com ara ser el primer a tirar) és possible descobrir quins són els passos per guanyar sempre o perquè l'altre jugador no guanyi mai. En aquest grup també podem situar els grans jocs d'estratègia com els escacs, el go i els mancala, i els petits jocs d'estratègia com el nim

Els jocs categoritzats en *b*) i *c*) comporten un tipus de raonament estretament vinculat al pensament matemàtic desitjable en els processos de resolució de problemes, tals com reconeixement i identificació de dades rellevants, planificació, aplicació d'estratègies, anticipació, etc. (Edo, Deulofeu i Badillo, 2007). Per això, recomanem que es destini temps, a l'aula de matemàtiques, per ensenyar les regles d'alguns jocs (especialment de curta durada), per jugar-hi en petits grups i per analitzar i discutir en gran grup els descobriments realitzats.

De la mateixa manera, considerem que tots aquests jocs poden ajudar al desenvolupament i la comprensió de continguts matemàtics específics, com els relacionats amb els sistemes de numeració, el valor de posició, la descomposició de quantitats, el càlcul mental exacte i aproximat i, en general, el desenvolupament del sentit numèric, però també el geomètric en jocs de posició.

Un tercer aspecte que cal destacar de l'ús d'aquests tipus de jocs a l'aula de matemàtiques, i no per això menys important, és el valor del desenvolupament de la competència de l'autonomia personal i social que pot comportar aquesta activitat, sempre que el professor tingui en compte, d'una banda, la importància que els alumnes en petits grups realitzin una tasca que només es pot dur a terme amb la implicació i el seguiment de les normes per part de tots ells, sense la participació de cap adult, i, de l'altra, la condició de jugar en parelles que formen un sol equip (contra altres equips) i que han de pactar les jugades abans de realitzar-les, la qual cosa afavoreix la comunicació entre companys perquè intenten explicar-se raonaments complexos (ambient de resolució de problemes) al mateix temps que s'afavoreix l'empatia i la diversió pròpia d'un joc (ambient lúdic vinculat a les matemàtiques).

Finalment, un aspecte clau que hem de tenir en compte en l'ús dels jocs d'estratègia relacionats amb la resolució de problemes és que tots dos comparteixen el mateix procés heurístic. Per tant, a l'hora de relacionar les fases de l'heurística de la resolució d'un joc d'estratègia i d'un problema matemàtic, tal com afirma Pólya (1965), és important l'anàlisi de les heurístiques de resolució d'un problema matemàtic determinat, perquè implica comprendre el mètode que condueix a resoldre'l. En particular, les operacions mentals típicament útils en aquest procés. Aquestes operacions mentals impliquen, entre d'altres, la indagació, l'exploració i el descobriment, que tenen una estreta relació amb el desenvolupament de les habilitats que activa un alumne quan busca l'estratègia guanyadora d'un joc matemàtic (Edo, Baeza, Deulofeu i Badillo, 2008).

Per estudiar el possible paral·lelisme entre el procés de resolució d'un problema matemàtic i el procés de descobriment de l'estratègia guanyadora d'un joc matemàtic, considerem el paral·lelisme proposat per Edo, Baeza, Deulofeu i Badillo (2008), que al seu torn es van basar en l'estudi d'Edo (2002) sobre l'anàlisi entre les fases de la resolució d'un problema matemàtic en l'àmbit de l'educació primària i les fases de resolució d'un joc (quadre 1).

Fases de resolució de problemes (Pólya, 1979)	**Fases de resolució d'un joc** (Edo, 2002)
I. Comprensió del problema.	• Comprensió dels objectius del joc i de les normes que cal seguir.
II. Disseny i execució d'un pla general o de plans parcials successius	• Desenvolupament de la partida: experimentació, realització de conjectures, disseny de plans parcials, planificació d'una estratègia
III. Verificació de la solució obtinguda	• Validació o rebuig de l'estratègia i anàlisi del que ha passat

Quadre 1. Relació entre les fases de resolució d'un problema i les fases de resolució d'un joc (Edo, Baeza, Deulofeu i Badillo, 2008).

4. Uns jocs d'estratègia per treballar el sentit numèric de les fraccions a primària: recobrir els hexàgons

Com ja hem esmentat en l'apartat anterior, els jocs en general, i els de taula en particular, tenen una estreta relació amb les matemàtiques. En primer lloc, molts jocs utilitzen les matemàtiques en el seu desenvolupament, ja sigui per les relacions numèriques (per exemple, el dòmino) o per les geomètriques (per exemple, el marro), però sobretot, pel tipus d'estratègies que cal descobrir quan s'intenta guanyar la partida. Aquestes estratègies o heurístiques que utilitzen els alumnes poden ser molt variades d'acord amb les característiques del joc i impliquen el desenvolupament de processos matemàtics que tenen una gran similitud amb les estratègies utilitzades en la resolució de problemes matemàtics (Shoenfeld, 1985).

En segon lloc, la naturalesa de les matemàtiques fa que sovint s'assemblin a un joc. No podem afirmar que les matemàtiques siguin un joc, perquè la finalitat i les seves aplicacions són molt més complexes i transcendeixen el caràcter de diversió dels jocs. No obstant això, quan fem matemàtiques i, concretament, quan resolem problemes, sí que trobem objectius comuns al procés de determinar l'estratègia guanyadora d'un joc. En aquest sentit, els currículums competencials actuals emfatitzen la necessitat que fer matemàtiques es converteixi en una activitat lúdica i sobretot intel·lectual estimulant. Així, el caràcter lúdic dels jocs de taula i el repte que ens planteja jugar-hi s'assemblen molt a fer matemàtiques. D'aquesta manera, considerem que implementar-los a l'aula crea un entorn ideal per reflexionar sobre conceptes matemàtics i sobre les heurístiques de resolució aplicades durant la recerca de l'estratègia guanyadora.

Per a la implementació d'un taller de jocs de taula que promogui el desenvolupament d'estratègies de càlcul mental en un entorn significatiu i lúdic, els jocs són escollits atenent el nivell d'escolaritat, els continguts matemàtics i la dificultat de les estratègies implícites per guanyar. Pel que fa a la metodologia, proposem escollir dos jocs de taula per nivell (curs). Cada joc ocupa una unitat de programació i, generalment, suggerim implementar-la en l'últim trimestre del curs amb una dedicació de quatre sessions d'una hora per cada joc (amb un total de vuit sessions de classe d'una hora). Per tant, en el tercer trimestre es fan dues unitats de programació que corresponen a dos jocs (figura 2).

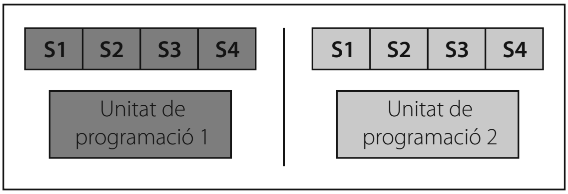


Figura 2. Organització de les sessions del taller de jocs de taula a primària.

Cada sessió del taller —sigui la S1, la S2, la S3 o la S4 (figura 2)— té una seqüència d'activitats pròpia, i tots els alumnes juguen alhora a un joc escollit prèviament pel mestre. Les sessions estan estructurades de la manera següent:

- Primera sessió: s'expliquen les regles o normes del joc mentre es realitza una primera partida en la qual juguen el mestre i els alumnes. En acabar la partida inicial s'atura el joc i s'enceta un diàleg preguntant als alumnes què consideren que aprendran jugant en aquest joc. L'objectiu del diàleg és que els alumnes facin una representació, tan ajustada com sigui possible, del que faran, com ho faran i, sobretot, per què ho faran. El mestre, mitjançant preguntes, suggeriments i reflexions al voltant del joc que acaben de conèixer, ajuda els alumnes a fer conjectures, plantejar hipòtesis i descobrir i verbalitzar el coneixement i els processos matemàtics que s'espera que aprenguin jugant. Tot seguit, els alumnes es col·loquen per grups (un material per taula de 4 alumnes) i comencen a jugar sols. El mestre observa i fa anotacions (en la taula d'observació preparada per a cada joc), i quan ho trobi convenient intervé jugant i actuant conjuntament amb els grups i alumnes que consideri necessari.

- Segona i tercera sessió: s'inicien amb una conversa col·lectiva amb diferents focus d'atenció. Es poden recordar les regles del joc, els alumnes poden explicar al mestre descobriments o aprenentatges relacionats o es poden comentar incidències positives o negatives sobre conductes entre els companys de grup en les sessions anteriors. Seguidament, els alumnes juguen en petits grups i el mestre els observa, en fa anotacions i hi intervé només quan sigui necessari.
- Quarta sessió: el mestre recorda que aquesta serà l'última sessió del joc i comenta als alumnes que jugaran només entre ells, però que després hauran d'exposar en grup l'estratègia o les estratègies guanyadores i els continguts matemàtics utilitzats. Si ho considera important, demana als alumnes que redactin les seves impressions, que expliquin l'estratègia (o les estratègies) i que justifiquin els continguts matemàtics implícits en les estratègies guanyadores.

A manera d'exemple, presentem un joc que pot ajudar a desenvolupar diversos dels continguts presentats, que forma part d'una col·lecció de jocs de primària elaborada, i en fase d'experimentació, pels autors d'aquest article i docents del grup de recerca PREMAT de la UAB. Els jocs d'estratègies permeten explorar i desenvolupar el sentit numèric fraccionari que tenen alumnes de 10 a 12 anys que cursen cinquè de primària.

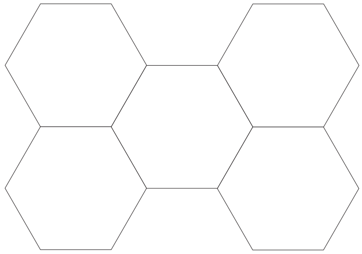
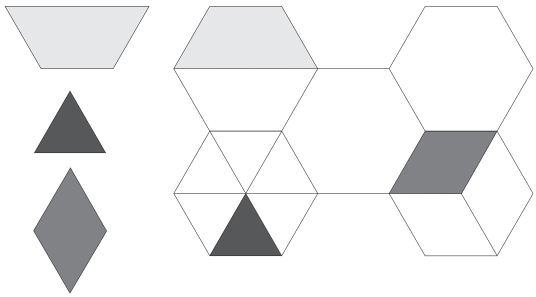
Entenem per sentit numèric la comprensió general que té un alumne sobre els nombres i les operacions juntament amb la capacitat per usar-los de manera flexible per emetre judicis matemàtics i desenvolupar estratègies útils per resoldre problemes complexos (Godino, Font, Konic i Wilhelmi, 2009); en el nostre cas trobar i argumentar la validesa de l'estratègia guanyadora d'un joc. El National Council of Teachers of Mathematics (1989) va identificar cinc components que caracteritzen el sentit numèric: el significat del nombre, les relacions numèriques, la grandària dels nombres, les operacions amb els nombres i els referents per als nombres i quantitats.

El desenvolupament d'un sentit numèric òptim implica l'adquisició de destreses relacionades amb el càlcul mental, l'estimació de la grandària relativa dels nombres i del resultat d'operacions, el reconeixement de les relacions part-tot, així com el concepte de valor posicional i la resolució de problemes (Godino, Font, Konic i Wilhelmi, 2009). Tal com assenyalen Godino et al. (2009), «a la vida quotidiana apareixen diversos tipus de situacions en què s'utilitzen expressions que relacionen dos nombres de manera multiplicativa; tals nombres poden ser divisibles entre si o no. Aquestes relacions es descriuen mitjançant fraccions, raons, decimals i percentatges, i en general estan lligades a quantitats de magnituds i a pràctiques específiques segons els tipus de situacions en què participin». Aquests autors fan una revisió sobre estudis que s'han centrat en l'anàlisi semàntica de les fraccions i nocions relacionades, i han assenyalat que són diverses les interpretacions que s'atribueixen, tant als racionals com a les fraccions. També destaquen com a conceptes centrals el quocient, la raó, l'operador i una versió de la relació part-tot.

4.1. Un joc d'estratègia: recobrir els hexàgons

En el quadre 2 es presenta la fitxa didàctica del joc, que fa referència als aspectes següents:

a) nivell d'escolaritat;
b) materials necessaris que es poden fabricar amb cartolina i plastificar-los;
c) nombre de jugadors;
d) les normes del joc;
e) algunes variants de les normes inicials, però que el mestre ha de tenir clar que impliquen l'aparició d'altres tipus d'estratègies i l'aplicació d'altres conceptes matemàtics, i

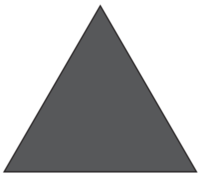
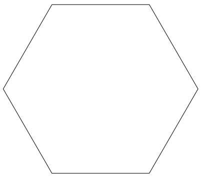
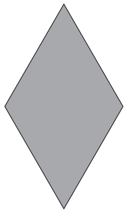
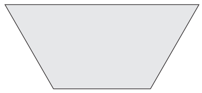
Nivell:	5è i 6è de primària (10-12 anys)
Material:	Tauler format por cinc hexàgons regulars iguals.  Tres tipus de peces de diferents colors: 10 trapezis isòsceles (1/2 hexàgon), 15 rombes (1/3 de hexàgon) i 30 triangles equilàters (1/6 de hexàgon). 
Nombre de jugadors:	Joc per a dos jugadors, en el qual en juguen quatre (en parelles).
Normes:	En un tauler format per cinc hexàgons regulars iguals, dos jugadors, per torns, col·loquen una peça en cada jugada per recobrir els hexàgons. El jugador que col·loca l'última peça i deixa tots els hexàgons plens, guanya la partida. Hi ha tres tipus de peces que permeten recobrir tot el tauler: 10 trapezis isòsceles, 15 rombes i 30 triangles equilàters. S'hi juga lliurement (posant cada peça on vol), però hi ha dues condicions: *a*) Cada peça haurà de quedar completament col·locada a dins d'un hexàgon (una peça no pot cobrir parts de dos hexàgons alhora). *b*) Es comença a jugar omplint hexàgon a hexàgon, és a dir no es poden col·locar peces a un altre hexàgon fins que no estigui del tot ple l'anterior.
Variants:	1. Les mateixes normes anteriors, però amb la variant que es pot anar col·locant peces a qualsevol hexàgon encara que no estigui complet (s'hi poden deixar forats). 2. Si en posar una peça ja n'hi ha una altra en aquell hexàgon, s'ha de posar de manera que tinguin un costat comú. Per tant, no poden quedar dos forats en un mateix hexàgon.
Situació problema:	• ¿Quina és l'estratègia guanyadora? • ¿Què passa si variem el nombre de hexàgons del tauler?

Quadre 2. Fitxa didàctica del joc de recobrir els hexàgons.

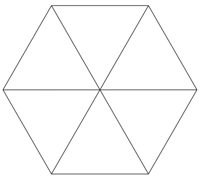
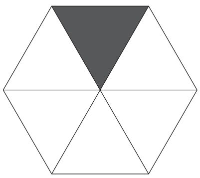
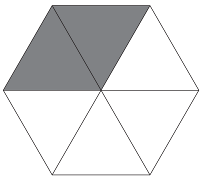
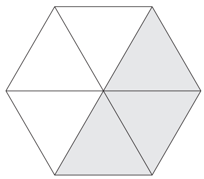
f) algunes situacions problemes que es poden plantejar des de la primera sessió perquè els alumnes puguin intentar respondre a mesura que coneixen i intenten trobar l'estratègia guanyadora. Aquestes situacions seran el centre de discussió en la quarta i última sessió de joc de la unitat de programació.

En la primera sessió, en presentar les normes del joc i en el procés de familiarització dels alumnes amb els materials del joc, el mestre pot aprofitar per plantejar uns primers reptes als alumnes:

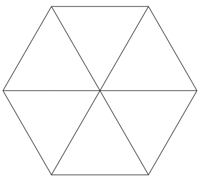
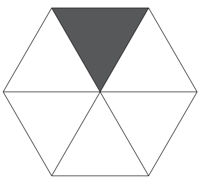
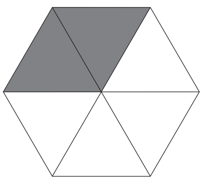
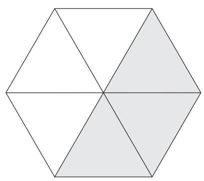
1. Identificar les figures geomètriques presents en el joc i classificar-les:

Polígons			
Regulars		Irregulars	
			
Triangle Equilàter acutangle	Hexàgon	Quadrilàter paral·lelogram Rombe	Quadrilàter Trapezi isòsceles

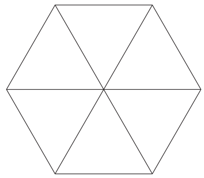
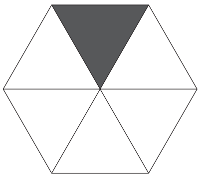
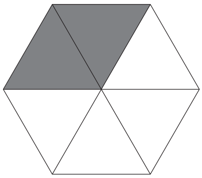
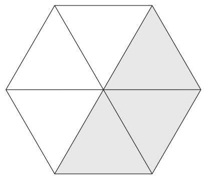
2. Identificar figures en posicions no prototípiques, aspecte fonamental per disminuir l'emergència d'errors i obstacles en l'aprenentatge dels alumnes (importància de presentar la representació gràfica de les figures en diferents rotacions):

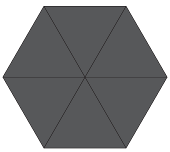
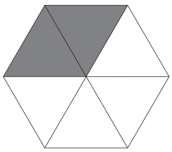
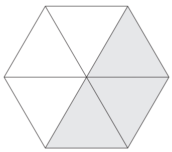
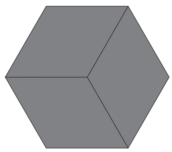
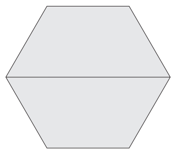
3. Buscar la relació numèrica entre les figures que formen les peces del joc prenent com a unitat un dels hexàgons del tauler:

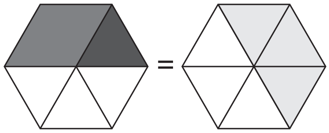
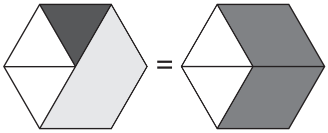
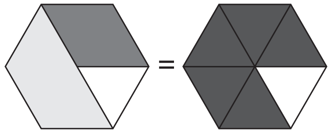
			
Unitat 1	Una sisena part $\frac{1}{6}$ (un sisè)	Dues sisenes parts $\frac{2}{6}$ (dos sisens)	Tres sisenes parts $\frac{3}{6}$ (tres sisens)

4. Introduir l'equivalència de fraccions:

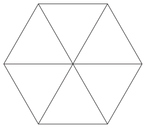
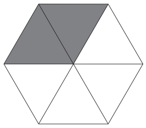
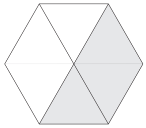
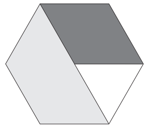
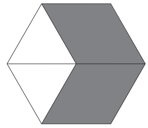
			
Unitat 1	Una sisena part $\frac{1}{6}$	Dues sisenes parts $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	Tres sisenes parts $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

5. Introduir (o ampliar) operacions amb fraccions homogènies i heterogènies a partir de la força de la traducció de la visualització gràfica cap a l'algorisme numèric. A manera d'exemple, per qüestió d'espai, n'il·lustrem només la suma i la resta amb alguna de les possibles operacions:

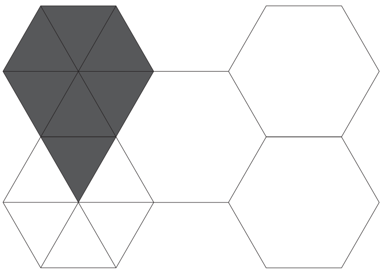
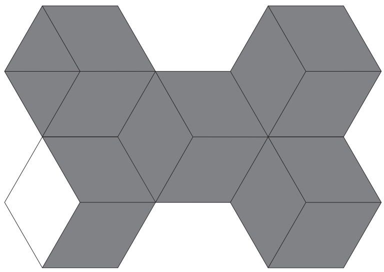
Suma i resta de fraccions homogènies				
				
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+$ $+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$
$1-\frac{6}{6}=\frac{6}{6}-\frac{6}{6}=$ $=\frac{0}{6}=0$	$1-\frac{2}{6}=\frac{6}{6}-\frac{2}{6}=$ $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$1-\frac{1}{2}=\frac{2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	$1-\frac{3}{3}=\frac{3}{3}-\frac{3}{3}=$ $=\frac{0}{3}=0$	$1-\frac{2}{2}=\frac{2}{2}-\frac{2}{2}=$ $=\frac{0}{2}=0$

Suma i resta de fraccions heterogènies		
		
$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$
$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{6}{6}-\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=$ $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}-\frac{1}{6}=$ $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$	$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{6}{6}-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

6. Introduir (o ampliar) diferents expressions d'un nombre racional: diferents representacions de la relació part-tot (a/b), decimal, percentatge, etc.

Representació gràfica					
Expressió fracció (a/b)	$\frac{6}{6}=\frac{3}{3}=\frac{2}{2}=1$	$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=$ $=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$
Expressió decimal	1,0	$0{,}333\ldots=0{,}\overset{\frown}{3}$	0,5	$0{,}5+0{,}\overset{\frown}{3}=0{,}8\overset{\frown}{3}$	$0{,}\overset{\frown}{3}+0{,}\overset{\frown}{3}=0{,}\overset{\frown}{6}$
Percentatge	100 %	33,3 %	50 %	83,3 %	66,6 %

7. Introduir l'expressió de fraccions majors que la unitat en forma de nombre mixt.

	
$1+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}+\frac{1}{6}=\frac{7}{6}=1\frac{1}{6}$	$4+\frac{2}{3}=\frac{12}{3}+\frac{2}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$
Una unitat i un sisè de la unitat	Quatre unitats i dos terços de la unitat

El grau d'aprofundiment que els mestres posin en els aspectes anteriors afavorirà el grau de desenvolupament del sentit numèric fraccionari dels alumnes.

4.2. Cap a la determinació d'estratègies guanyadores

Quan els alumnes practiquen i analitzen aquest joc, amb la finalitat de trobar una estratègia guanyadora, utilitzen dos enfocaments diferents. El primer de caràcter aritmètic, se centra en els espais ocupats i el buits que deixen després de les seves jugades en un mateix hexàgon, tenint en compte que cada hexàgon equival a 6 triangles, 3 rombes o 2 trapezis. El segon, de caràcter geomètric global, se centra en la simetria. L'aplicació de qualsevol de les dues estratègies permet assegurar que sempre guanyarà el segon jugador si les aplica correctament en cadascuna de les jugades de la partida. El jugador que domina les dues estratègies arriba a ser conscient que el que omple el primer hexàgon del tauler s'assegura guanyar la partida

- Estratègia numèrica: en la figura 3 s'il·lustren les diferents opcions de guanyar aplicant l'estratègia numèrica.

  — Primera jugada guanyadora: quan un jugador inicia posant la peça del trapezi, perd perquè el segon jugador té dues opcions per guanyar: (a) col·locar un trapezi i, (b) col·locar un triangle però deixant 2/6 separats; és a dir, 1/6 a cada costat.

— Segona jugada guanyadora: quan un jugador inicia amb la peça del triangle, l'opció numèrica guanyadora és la (b), és a dir, col·locar un trapezi deixant 1/6 a cada costat.
— Tercera jugada guanyadora: quan un jugador inicia amb la peça del rombe, l'opció numèrica guanyadora és la (c), que consisteix a col·locar un rombe però deixant 2/6 separats; és a dir, 1/6 a cada costat.

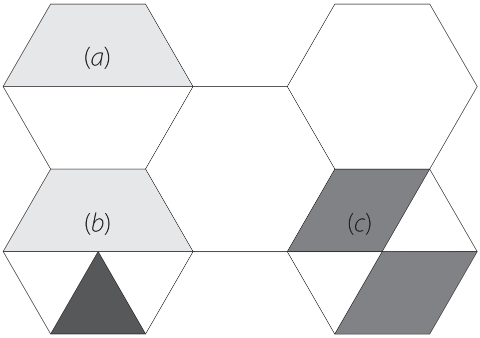


Figura 3. Estratègia numèrica: operacions amb fraccions (deixar 2/6 separats).

- Estratègia geomètrica: en la figura 4, s'il·lustren les diferents opcions de guanyar aplicant l'estratègia geomètrica, que consisteix a col·locar la peça simètrica a la que col·loca el primer jugador que inicia la partida (simetria axial).

— Primera jugada guanyadora: sempre que el primer jugador col·loca la peça del trapezi, automàticament perd perquè el segon jugador (que serà el guanyador) col·loca la figura simètrica que és el trapezi (a).
— Segona jugada guanyadora: sempre que el primer jugador col·loca la peça del triangle, l'opció geomètrica guanyadora és la (b), que consisteix a anar col·locant la figura simètrica a la peça col·locada en aquest cas un altre triangle. Aquesta jugada es repeteix fins a tres ocasions que és quan es guanya el primer hexàgon i, en conseqüència, la partida.
— Tercera jugada guanyadora: sempre que el primer jugador col·loca la peça del rombe, l'opció geomètrica guanyadora és la (c), que consisteix a anar col·locant la figura simètrica a la peça col·locada que serà un altre rombe, i només deixa al primer jugador l'opció de col·locar un triangle. Es guanya el primer hexàgon en col·locar el triangle simètric i, en conseqüència, la partida.

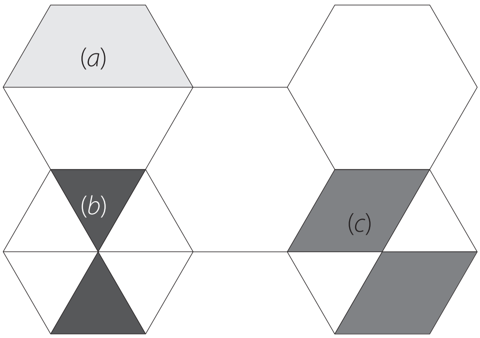


Figura 4. Estratègia geomètrica: simetria axial de polígons regulars.

5. A manera de conclusió

Un dels aspectes clau, després d'haver implementat diverses seqüències didàctiques utilitzant contextos de jocs matemàtics per al desenvolupament del sentit numèric a primària, és la motivació dels alumnes durant tot el desenvolupament de l'activitat que es genera a l'aula. Un altre aspecte que cal destacar és que el context de jocs d'estratègia permet la construcció de significats col·lectius en relació amb els conceptes numèrics i geomètrics implicats en la recerca de les estratègies guanyadores i en els problemes matemàtics implícits en cada joc.

De la mateixa manera, les respostes dels mestres que han participat en els diferents programes de formació sobre com millorar l'aprenentatge i l'ensenyament de les fraccions en el cicle superior de primària han valorat positivament les experiències proposades en un marc competencial, perquè consideren que el context de joc matemàtic permet:

1. Establir connexions de manera permanent entre els coneixements matemàtics implícits en la determinació de les estratègies guanyadores, distingint-ne aspectes conceptuals i procedimentals.
2. Desenvolupar de manera progressiva el sentit numèric, i concretament el sentit numèric fraccionari perquè facilita: la construcció del significat del nombre racional com a quocient, raó, operador i relació part-tot; l'establiment de relacions numèriques; la comparació de la grandària dels nombres; la comprensió de les operacions amb els nombres utilitzant diferents registres semiòtics i la construcció de referents per als nombres i les quantitats que apareixen.
3. Centrar l'atenció en els processos associats a l'activitat matemàtica, ja que es crea un ambient de formulació i resolució de problemes, modelització de processos i fenòmens de la realitat a partir de l'estudi i l'argumentació matemàtica durant l'anàlisi de les estratègies que utilitzen els alumnes per guanyar una partida.
4. Generar contextos d'aprenentatge funcional i significatiu, perquè es treballa amb igualtat d'importància els aspectes matemàtics i els aspectes emocionals i afectius associats a la dinàmica d'interacció dels alumnes en la recerca de les estratègies guanyadores.

6. Bibliografia

Adúriz-Bravo, A. (2011). Competencias metacientíficas escolares dentro de la formación del profesorado de ciencias. A: E. Badillo, L. García, A. Marbà i M. Briceño (ed.) *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*. Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry. Universidad de los Andes.

Badillo, E., Giménez, J. i Vanegas, Y. (2011). Desarrollo de competencias en un contexto artístico: construyendo significados sobre la forma. A: E. Badillo, L. García, A. Marbà i M. Briceño (ed.) *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas*. Mérida: Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry. Universidad de los Andes.

Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Síntesis.

Corbalán, F. i Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 7, 71-80.

Edo, M. (1998). Juegos y matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de primaria. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, 21-37.

— (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesi doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Edo, M., Deulofeu, J. i Badillo, E. (2007). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. *Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Granada.

Edo, M., Baeza, M., Deulofeu, J. i Badillo, E. (2008). Estudio del paralelismo entre las fases de resolución de un juego y las fases de resolución de un problema. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 14, 61-75.

Eurydice (Red Europea de Información en Educación) (2002). *Las competencias clave: Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria*. Madrid: Ministeri d'Educació, Cultura i Esport.

Gencat (2009). *Currículum Educació Primària*. Barcelona: Servei de Comunicació, Difusió i Publicacions. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació.

Godino, J., Font, V., Konic, P. i Wilhelmi, M. (2009). El sentido numérico como articulación flexible de los significados parciales de los números. A: J. M. Cardeñoso i M. Peñas. *Investigación en el aula de Matemáticas. Sentido Numérico* (p. 117-184). Granada: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. [en línia] http://thales.cica.es/granada

Gómez-Chacón, I. (1992). Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas. *Apuntes IEPS*, 55. Madrid: Narcea.

Kamii, C. i DeVries, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza: implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Mèxic: Trillas.

Sanmartí, N. (2009). ¿Qué cambios implica la introducción del concepto de competencia en la educación científica? Conferencia dictada en el *VIII Congreso Internacional*. Barcelona. [Disponible en línia]

Shoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press, Inc.

Vigotski, L. S. (1988). *Liev Semiònovitx Vygotski: Pensament i llenguatge*. [ed. a càrrec d'Ignasi Vila i Rosa Colomina]. Vic: EUMO/Barcelona: Diputació de Barcelona.