

Més sobre conjectures i demostracions¹

George Pólya

El professor George Pólya, professor emèrit de matemàtiques a la Universitat de Stanford, és un reconegut matemàtic de recerca, autor d'aproximadament dos-cents cinquanta articles en matemàtiques i en educació matemàtica, així com d'uns quants llibres àmpliament llegits. Entre d'altres: *Com plantejar i resoldre problemes*, *Matemàtiques i raonament plausible* i *El descobriment en matemàtiques*, entre d'altres. Les seves conferències, vídeos i escrits han estimulat extraordinàriament l'interès en la resolució de problemes i han influït en ensenyants de totes les etapes educatives.

More on Guessing and Proving

Sóc un professor de mates. També sóc molt vell i, per tant, tothom espera que sigui antiquat. En canvi, de fet, sóc perfectament conscient que els joves d'avui dia no aprecien especialment els consells o la filosofia dels vells, i fins i tot puc entendre per què no ho fan. Perquè, sabeu, jo també vaig ser jove i recordo alguns acudits sobre «els consells» i la «filosofia».

—Quin és el millor consell? —No donar-ne cap.

—Què és un filòsof? —Un filòsof ho sap *tot*, però no sap res més.

Ara podeu comprendre que me n'estigui, de donar-vos cap consell, i que també me n'estigui de deixar anar generalitats de tipus filosòfic. Parlaré sobre alguns problemes del meu ofici. Potser hi trobareu alguna relació amb els vostres estudis i els vostres problemes.

El títol del meu article parla de «conjecturar i demostrar». Sóc conscient que potser teniu reserves sobre aquest títol, perquè potser està molt bé que un matemàtic parli sobre *demostrar*, però què hi pinta un matemàtic parlant sobre *endevinar*?²

1. Aquest article és una versió, lleugerament editada, d'una xerrada impartida al claustre de la Universitat de Waterloo, el 22 d'octubre de 1971, publicada a *The Two-Year College Mathematics Journal*, 10, 4 (setembre del 1979), p. 255-258. Traducció al català de Pelegrí Viader Canals.

2. Aquí hi ha una dificultat de traducció difícilment salvable. Pólya utilitza «guess», que es tradueix per 'suposar', 'conjecturar' o també 'endevinar', i hi aprofita una mica aquest doble sentit.

Els que hi teniu recels, a l'institut potser vàreu ser alumnes d'algun professor de mates passat de moda. A les seves classes, conjeturar era tabú, i quan li donàveu una resposta titubejant, us escridassava: «No facis suposicions! Ho has de saber!».

Jo, però, m'oposo a aquesta mena de professors o, més ben dit, intento convertir-los. Crec que les conjetures han de formar part de totes les classes, i especialment de la de matemàtiques.

Per què? Des del meu punt de vista, per dues raons. En primer lloc, perquè és important que tothom tingui una actitud correcta respecte a conjeturar. I en segon lloc, perquè aprendre matemàtiques és més divertit, i dóna més bons resultats, si el professor engresca a fer conjetures.

Començarem centrant-nos en la importància de conjeturar. No cal que us recordi que vivim enmig d'una crisi mundial,³ en un món altament complex, ple de perills i de mentides. Ens bombardegen amb tota mena d'afirmacions per totes bandes: dels vells i dels joves; de la dreta, el centre i l'esquerra; per la premsa, la ràdio i la televisió; en discursos públics i en converses privades... Per tal de filtrar el que sentiu i el que veieu us cal.

Criteri

Però, què és criteri? Essencialment, és l'habilitat de saber distingir: entre fets i fantasia, entre fets i impressions, entre fets i sospites, fets i teoria, fets i conjetures, demostracions i conjetures. Però potser el més important és saber distingir entre unes conjetures i unes altres. Les conjetures poden ser

més raonables o menys,
més de fiar o menys,
més ben argumentades o menys,
més respectables o menys.

En qualsevol professió, la clau consisteix a distingir entre unes conjetures d'una mena i les de l'altra. La prova circumstancial de l'advocat, la prova documental de l'historiador, la prova estadística de l'economista o la prova inductiva del naturalista són exhibides per reforçar conjetures. I cal tota la subtilitat de l'expert per tal de valorar fins a quin punt la prova aportada sustenta la conjetura en qüestió.

I és que us farà falta tot el criteri del món per distingir entre unes conjetures i les altres en un món ple d'enganys i afirmacions contradictòries. I no cal que us digui que el nostre món és entabanador. O és que us creieu el que diuen els anuncis?, o el que llegiu als diaris?

No vull entrar en detalls sobre el que en penso, però us explicaré una anècdota. Fa setanta anys, el diari més popular de Berlín era el *Berliner Zeitung*. La gent el coneixia per les seves inicials, BZ. I deien: «El *Berliner Zeitung* és el millor diari». Sabeu per què? «Perquè els altres diaris menteixen de la A a la Z i el *Berliner Zeitung* només ho fa de la B a la Z.»

Que us creieu el que diuen els polítics? Òndia!, no ho hauria d'haver dit, això. Ens podria portar a barallar-nos i ja sóc massa vell per barallar-me. Deixeu-me que ho plantegi d'una altra manera: Us creieu el que us diuen els diplomàtics? (Tot polític necessita una mica de diplomàcia.) Altre cop no vull entrar en detalls sobre el que en penso, però us explicaré una anècdota.

3. Pólya deia això l'any 1976. És curiós que la situació de crisi encara sigui vigent!

En un cert any de la dècada dels cinquanta, vaig fer classe a Ginebra durant unes quantes setmanes. Al mateix temps, però, hi tenia lloc un esdeveniment molt més important que les meves classes: la conferència internacional en la qual França abandonava Indoxina. No vull recordar qui representava els Estats Units perquè la seva negativa a signar el protocol va ser el principi de l'espantós embolic de Vietnam. La Gran Bretanya estava representada per Eden, Rússia per Molotov i Xina per Chou En-lai. A la ciutat, en corria aquest acudit: Eden va fer un gran sopar i va convidar Molotov i Chou En-lai. Chou En-lai va anar a veure Molotov i li va demanar consell: «Mira, el cas és que mai he estat convidat a cap sopar oficial d'un diplomàtic occidental i no sé com m'hi he de comportar. Com que tu has estat en sopars d'aquests, em podries dir què he de fer?» «És fàcil», va contestar Molotov, «you chew and lie».⁴

Ara tornem a la meua pregunta principal: què pot fer el professor de matemàtiques? Primer de tot, pot introduir els seus alumnes a les demostracions matemàtiques. I això, per què és rellevant? No hi ha demostracions realment estrictes fora de les matemàtiques: la diferència entre una conjectura i una altra pot ser molt gran, inconfusible; però la diferència entre una demostració matemàtica i qualsevol conjectura és més acusada. Té el caràcter d'*absoluta*, si és que tal cosa existeix al món.

Per tant, sóc del parer que fins i tot l'estudiant que no farà servir mai les matemàtiques hauria de tenir l'oportunitat de veure una demostració matemàtica. No s'ha de preocupar per les demostracions de coses que es dedueixen de manera intuïtiva; no se l'ha d'obligar a aprendre demostracions de memòria —aquestes coses simplement el desmotivarien—, però un bon llibre de text i un bon professor que facin servir bons exemples li haurien de fer entendre el *paper* i l'*interès* que tenen les demostracions rigoroses. Per a alguns estudiants pot representar una gran experiència i hi ha moltes probabilitats que a tots els enriqueixi essencialment en la seva cultura general i els ajudi a fer un pas endavant cap a la maduresa. Quan saps què és una demostració rigorosa i la pots distingir inequívocament d'una conjectura, llavors realment estàs ben preparat per distingir entre unes conjectures de les altres.

Ara us diré una altra cosa que hauria de fer un professor de matemàtiques:

Ensenyar a conjecturar

En la recerca matemàtica ho tenim gairebé com una regla: «Primer conjectura i després demostra». La conjectura pot ser incompleta; la seva demostració pot trigar hores o dies o fins i tot mesos o anys —normalment aquests detalls no es fan públics, encara que alguns cops sí—. El gran Euler publicava proposicions importants que només eren conjectures i, després d'anys d'esforços, en trobava la demostració i la publicava.

Crec que de la proposta d'ensenyar a conjecturar me'n puc atribuir els mèrits (o acceptar-ne les culpes). En qualsevol cas, ho he provat (i alguns professors que han seguit les meves classes també ho han provat) i els resultats són molt bons. Cal tenir en compte, també, per a qui es fa la classe.

A secundària, quan el professor proposa un problema que s'ha de discutir, hauria de començar per deixar als estudiants l'oportunitat de conjecturar-ne el resultat. D'aquesta manera, els que estan impacients per saber si la seva conjectura és correcta o no treballaran amb molt més d'interès.

4. La broma perd tota gràcia amb la traducció: «chew and lie» vol dir 'mastegar i mentir', i sona exactament com Chou En-lai.

En una classe per a futurs enginyers, les demostracions llargues i enrevessades no són gaire populars. En comptes d'una demostració rigorosa, és molt més profitós que el professor presenti una «demostració heurística»—que, estrictament parlant, no és cap demostració: conté forats que s'omplen amb suposicions plausibles.

En una classe per a futurs matemàtics es pot fer alguna cosa més sofisticada: es pot presentar en primer lloc una demostració heurística i, després, la rigorosa, de manera que les idees principals de la demostració rigorosa vagin precedides i insinuades per la demostració heurística. I amb això estareu fent una cosa molt important per als vostres alumnes: els ensenyeu a ensenyar.⁵

En qualsevol estadi, els estudiants més intel·ligents de la classe us estaran especialment agraïts per haver-los mostrat com pot sorgir una conjectura i com s'hauria de sospesar.

L'estudi de les matemàtiques pot enriquir de moltes maneres la vostra cultura general i desenvolupar la vostra personalitat. He fet èmfasi en allò que és poc conegut i poc practicat a les escoles: entendre la naturalesa de les demostracions, distingir-les de les conjectures i distingir entre una mena de conjectures i unes altres. A força d'anar fent èmfasi en aquestes coses, la classe de matemàtiques pot desenvolupar el vostre criteri. I en els nostres temps de crisi mundial, el criteri pot ser el que us farà més falta davant les complexitats i els enganys de la vida moderna.



5. Per a un exemple explícit important, vegeu George Pólya i Gordon Latta, *Complex Variables* [John Wiley & Sons Inc., 1974. N'hi ha una traducció a l'espanyol de l'Editorial Limusa, Mèxic, 1976], en què la frase que enceta la darrera línia de la pàgina 157 [primera línia de la pàgina 174 en l'edició espanyola] diu: «El lector s'hauria d'adonar que la demostració precedent, més formal, de fet fa més explícita la demostració intuïtiva de la Secció 5.2 i l'explica amb més profunditat».