Incertesa i probabilitat. Un passeig per algunes paradoxes i problemes clàssics de la teoria de la probabilitat

Josep Lluís Solé
Departament de Matemàtiques, UAB

Resum

Els humans sempre han temut la incertesa que governa les seves vides. En aquest treball, fem la descripció d'un passeig amable per les nostres reaccions davant de l'aleatorietat, des dels vells temps passats —quan va ser divinitzada— , fins a la matematització que representa la teoria de la probabilitat, que, segons Laplace, no és més que el bon sentit reduït al càlcul. Considerarem algunes preguntes que ja apareixen a la correspondència entre Pascal i Fermat, en el naixement de la teoria, així com alguns dels problemes clàssics, com el famós problema de les tres portes, l'aposta a la martingala o el passeig aleatori amb barreres, seleccionats entre l'immens número de sorprenents resultats i paradoxes d'aquesta teoria.

Abstract

The humans always have feared the uncertainty that directs their lives. In this paper, we describe a kind walk along our behavior in front of randomness, from the old times, when it was divinized, until the present mathematical treatment with the Theory of Probability, that, as Laplace wrote, is only the common sense reduced to calculus. We will consider the first questions that appear in the correspondence among Pascal and Fermat, at the dawn of the Theory, and also some of the most classical problems, as for instance the martingale betting, and the random walk between barriers, selected in the so rich and enormous set of surprising results and paradoxes of this Theory.

1. Introducció

Els homes sempre han temut la incertesa i s'han preocupat per l'atzar que els governa les vides. Així com, quasi fins al segle XIX, les ciutats aixecaven alts murs de pedra per protegir-se dels enemics exteriors (que sempre acabaven sent inútils i les viles eren conquerides), també els homes s'han rodejat d'altes muralles físiques i mentals per protegir-se de la incertesa, sense ser conscients que aquesta s'emportarà la victòria final.

Podem trobar moltes cites d'autors clàssics que fan referència al domini que l'atzar i la incertesa tenen sobre nosaltres. En recordarem tan sols tres. Hi podríeu afegir les vostres preferides.

> *No hem d'estranyar-nos que l'atzar pugui tant sobre nosaltres, si considerem el fet que vivim i som per atzar* (Sèneca).

Què és l'home? Un vaixell exposat a tots els ultratges de la Fortuna.
Tot és atzar. Com al joc de daus, veig homes amb fortuna i d'altres sense sort (Electra, *Eurípides*).

Els nostres avantpassats grecs i romans convertiren l'atzar en mite i van divinitzar-lo. El destí dels homes era una responsabilitat dels déus. Crearen, dintre del seu esquema mitològic, representacions divines que eren les encarregades de regir les vides dels homes. A la figura 1, es mostren l'estàtua que representa la deessa Tyche (que significa fortuna en grec), trobada a Antioquia, i un fris en què apareixen Zeus i Nèmesi, la qual marcava el destí dels éssers moridors. Als seus peus, veieu la roda de la Fortuna, metàfora de la variabilitat de la sort, de l'alternança de temps d'alegria i de dissort associada al camí de tot home.

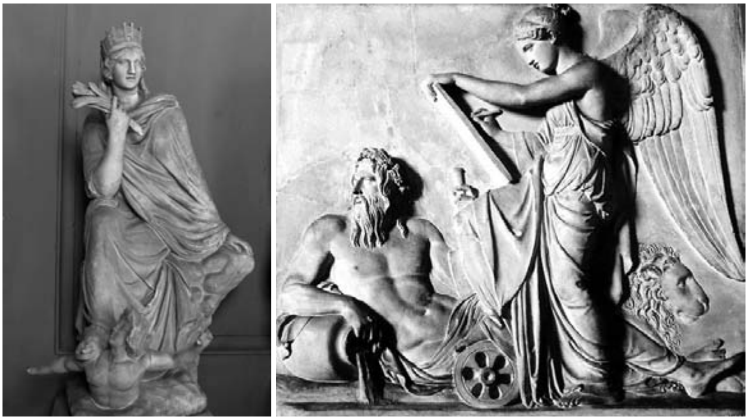


Figura 1. Tyche d'Antioquia. Nèmesi.

Figura 2. Roda de la Fortuna.

A la figura 2, veieu la imatge d'un pergamí medieval, on es representa també la roda de la Fortuna, que ens enlaira i ens fa caure en el curs de la nostra vida, en el seu gir constant. Aquesta metàfora era molt del gust dels teòlegs medievals.

2. Una mica de filosofia

És normal preguntar-nos què és l'atzar i per què hi ha incertesa. Podríem distingir dues posicions ben clares.

La primera línia considera que la incertesa és un problema motivat per la limitació del nostre coneixement. Ho podem resumir en la famosa frase de Pierre Simon, marquès de Laplace, en el seu cèlebre *Assaig filosòfic sobre les probabilitats* [9]:

Una intel·ligència que en un moment determinat conegués totes les forces que regeixen a la natura, i la situació respectiva de tots els éssers que la componen, si fos suficientment gran per analitzar totes aquestes dades, podria englobar en una sola fórmula els moviments dels cossos més grans de l'Univers i els de l'àtom més lleuger. Res li seria incert, i tant el futur com el passat estarien presents davant dels seus ulls.

La segona posició considera la incertesa com una qualitat intrínseca de la natura. La moderna física quàntica, la física del que és molt petit, és a dir, del món de l'àtom i de les partícules elementals, ens diu que l'atzar és propi de la natura, i no tan sols una conseqüència de la nostra intel·ligència imperfecta.

Deixeu-me citar dos famosos físics del segle passat que il·lustren aquesta idea.

> *Jo crec que l'indeterminisme, que és la no validesa de la causalitat rigorosa, és necessari i no tan sols possible* (Heisenberg).
> *El que no està rodejat d'incertesa és impossible que sigui cert* (Feynman).

Podríem resumir les dues posicions dient que per a la primera, en el cas que Déu existís, com que se li atribueix una intel·ligència infinita, per a ell no hi hauria atzar. La incertesa és un problema epistemològic, del coneixement forçosament limitat dels homes. En canvi, per a la segona posició, la incertesa és intrínseca a la natura, per tant, per a Déu també hi hauria atzar. La incertesa seria una qüestió ontològica, una propietat de l'ésser.

Aquesta controvèrsia enllaça amb la disputa eterna entre el determinisme i la causalitat absoluta per una banda, i la presència d'incertesa i del lliure albir per altra. Ja Sant Agustí, en el llunyà segle IV, es preocupà per la qüestió, doncs li era difícil d'acceptar un Déu infinitament bondadós i que fes viure homes condemnats forçosament a unes penes eternes inevitables. Aquesta dualitat fou objecte d'apassionats debats, tant filosòfics com teològics.

Poincaré també contribuí a la polèmica amb la seva definició d'un problema mal posat, que donà lloc al naixement del que ara s'anomena caos determinístic. Ell era un determinista convençut i, per tant, creia que si sabéssim les equacions diferencials que modelen l'evolució d'un sistema i poguéssim precisar-ne les condicions inicials, ens seria coneguda l'evolució futura. Però ni el nostre model és perfecte, ni les condicions inicials es poden determinar exactament, i com que, en certs models, les solucions que surten de condicions inicials molt properes, i que amb la nostra precisió no podem distingir, s'allunyen molt en passar el temps, no hi seria possible el determinisme. Això el portà a la necessitat d'introduir l'atzar segons la primera línia filosòfica que hem presentat, la de veure'l com un problema epistemològic. Us recomano llegir la brillant introducció al seu curs *Calcul des Probabilités* [12], que també és un capítol del seu assaig *Ciència i mètode* [13].

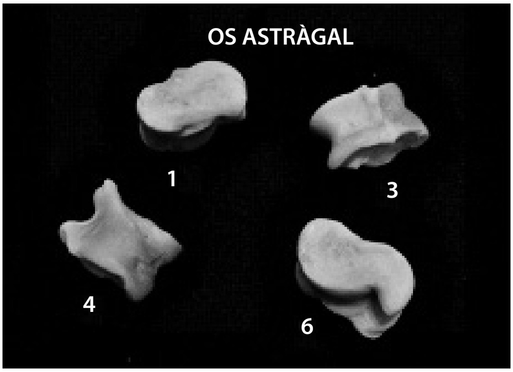
3. Joc i atzar. Una mica d'història

De molt antic, els homes han practicat els jocs d'atzar. En el cant III de la *Ilíada*, el poeta ens explica de manera admirable com el deífic Alexandre (Hèctor) i l'aqueu Menelau, el marit burlat d'Helena, es juguen a la sort qui serà el primer a tirar la llança de bronze en el seu combat singular. Posen les penyores en un casc que Hèctor sacseja mirant enrere i el poeta ens explica: "Com un llamp la sort de Paris va sortir".

Comentarem ara dos dels primers aleatoritzadors, els tali i els daus.

- **Els tali**

  El primer aleatoritzador sembla que va ser un os del taló anomenat *astragalus*. Entre les restes de les excavacions arqueològiques se n'han trobat amb una freqüència molt superior als altres ossos. Aquest fet ha portat, potser de forma agosarada, els experts a dir que en les llargues nits dels nostres avantpassats, els jocs d'atzar hi eren ben presents.



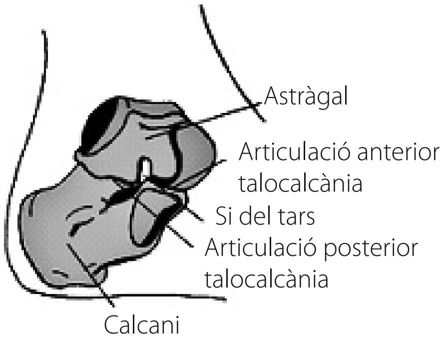


Figura 3

A la figura 3, veieu uns *talus* (astràgals). Fixeu-vos que tenen quatre cares no iguals, a les quals se'ls donava puntuacions 1, 3, 4, 6. La jugada més valorada era treure, en tirar-lo quatre vegades, aquesta sèrie de puntuacions (s'anomenava "Venus" en la Roma clàssica), i la més desfavorable, obtenir quatre uns ("gos").

De la gran afició dels romans a jugar-hi, n'és una mostra la següent frase de Propertius (50 aC). "Jo esperava que em sortís un Venus amb els tali favorables, però l'odiat gos sortia sempre".

En una tomba egípcia, datada cap a 3500 anys abans de Crist, hi ha pintats un home i una dona jugant-hi. A la figura 4 teniu una estàtua romana molt bella, que podeu veure en el Museu Vaticà, i que representa un nen llançant els *tali*.

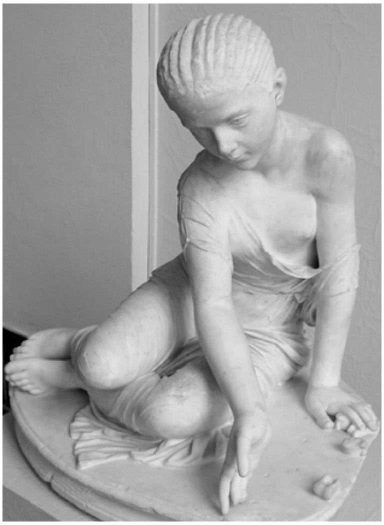


Figura 4

- **Els daus**

Els daus més antics que es coneixen (3000 aC) han estat trobats a Shahr-i-Sokhta, al sud-est de l'Iran. Són els que es mostren a la figura 5.

Altres daus remarcables per la seva antiguitat i perfecció són els trobats a Mesopotàmia (2700 aC), i a Egipte (1370 aC).

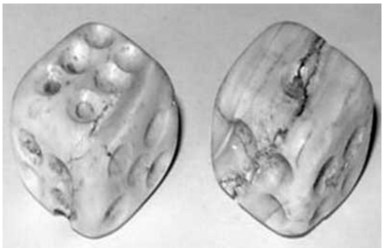


Figura 5

Els romans n'eren molt aficionats. L'emperador August va prohibir jugar-hi, excepte en el temps de les Saturnàlies. Horaci, per la seva banda, critica els joves que juguen a daus en lloc de dedicar-se a les coses de profit.

Com veieu, els vells sempre han criticat els joves amb arguments semblants.

A l'època medieval també s'hi jugava molt. Això provocà, per exemple, que Sant Lluís, rei de França, els prohibís.

Val a dir també que és curiosa l'arrel filològica de la paraula atzar. És un mot d'origen àrab, que podeu veure escrit en la figura 6, i que significa flor.

L'explicació, segons diu Joan Coromines en el seu diccionari etimològic, és que els àrabs jugaven amb uns daus que tenien dibuixos a les seves cares, com passa amb els actuals de pòquer. La cara més valuosa tenia dibuixada una flor, l'as del pòquer i, per extensió, el nom àrab de flor va esdevenir el que tantes llengües occidentals utilitzen per designar l'atzar.

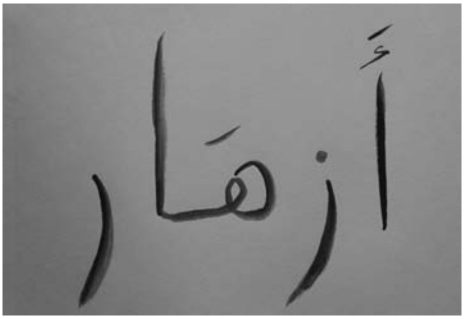


Figura 6

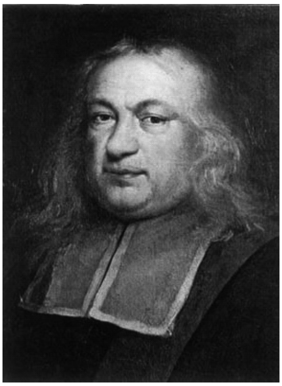
El terme llatí que designa el dau és *alea* (recordem la famosa frase de Juli Cesar en l'inici de la guerra civil "Alea iacta est"), i és l'arrel del nostre mot aleatori.

El joc de daus molt aviat interessà als estudiosos. Destaquem les obres:

De Vetula, escrit per Richard de Fournival (1200-1250), que és el primer estudi sobre daus.
Liber de Ludo Alae, de Cardano (1501-1576).
També Galileu (1613-1624) escriví sobre el tema a l'obra *Sopra le Scoperte dei Dadi*.

- **Origen de la teoria de la probabilitat**

La creença que el destí i la incertesa eren cosa dels déus és segurament la raó que explica per què el naixement de la teoria de la probabilitat va ser tan tardà. D'altra banda, sembla contradictori que sobre l'atzar i la incertesa en puguem dir alguna cosa. Recordem la frase del professor Bertrand, citada al pròleg del *Calcul des Probabilités* de Poincaré: "Com ens atrevim a dir coses sobre l'atzar? No és l'atzar l'antítesi de tota llei?" [12].



Fermat

Pascal

Laplace

Figura 7

Però els matemàtics són valents i temeraris. S'hi han atrevit i s'hi atreveixen encara!!

El naixement de la teoria de la probabilitat es produeix al segle XVII, amb la breu correspondència entre Fermat i Pascal, que dura del juny/juliol fins al setembre/octubre de 1654, motivada per les preguntes que un jugador aristòcrata, el Chevalier de la Méré, fa a Pascal. A la figura 7 teniu els retrats d'en Fermat i en Pascal. Us recomano el magnífic estudi sobre aquesta correspondència que trobareu al capítol 6 del llibre *Obra matemàtica vària* [6] dedicat a l'obra de Fermat.

És curiós de recordar l'opinió que els dos científics tenen sobre el Chevalier de la Méré, que no és matemàtic (a l'època, anomenats geòmetres).

> *Je n'ai pas le temps d'envoyer la demostration d'une difficulté qui etonnait fort Monsieur de Méré, car il a trés bon esprit, mais il n'est pas géomètre, et ça, comme vous savez, est un gran default.*

El marquès de Laplace (també a la figura 7) comenta que és remarcable que una ciència, que començà amb l'estudi dels jocs d'atzar, hagi esdevingut un dels més importants objectes del coneixement humà.

Ell mateix afirma com a conclusió del seu *Assaig filosòfic sobre les probabilitats* [9], que aquesta no és res més que el bon sentit aplicat al càlcul.

4. La probabilitat vista pels matemàtics. Com modelen la incertesa els matemàtics?

Explicarem sense gaires detalls quina és l'axiomàtica introduïda l'any 1933 per Kolmogorov [8]. Davant d'un experiment aleatori, considerem el conjunt de tots els resultats, que anomenem Ω. Per exemple, en el cas del llançament d'una moneda, Ω serà

$$\Omega = \{\mathit{cara}, \mathit{creu}\}$$

Si tirem consecutivament dues vegades una moneda,

$$\Omega = \{(\mathit{cara}, \mathit{cara}), (\mathit{cara}, \mathit{creu}), (\mathit{creu}, \mathit{cara}), (\mathit{creu}, \mathit{creu})\} \tag{1}$$

En el cas d'un dau

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Un esdeveniment és una afirmació que fem sobre el resultat del nostre experiment tal que, una vegada realitzat aquest, podem dir si s'ha complert o no. Per exemple, en el cas d'un dau, obtenir un número parell és un esdeveniment.

Si en el llançament del dau tan sols podem veure si surt una puntuació parella o senar, l'afirmació "obtenir un dos o un quatre" no és un esdeveniment, ja que no podrem assegurar sempre si s'ha produït o no (per exemple, si obtenim una cara parella no sabrem si ha estat un dos o un quatre, o ha estat un sis).

A un esdeveniment li podem associar el subconjunt d'Ω format pels resultats que satisfan l'afirmació lligada a l'esdeveniment. Per exemple, a obtenir una cara parella en tirar un dau li associem el conjunt $\{2, 4, 6\}$.

El que ens descriu l'experiment és el conjunt de tots els esdeveniments, ja que el conjunt associat no està determinat de manera única. Per exemple, si tirem consecutivament dues monedes, podem triar com a Ω el conjunt descrit en (1) o el conjunt de les successions de zeros i uns.

Aquest conjunt de tots el esdeveniments o, si voleu, el conjunt dels subconjunts associats als esdeveniments, ha d'incloure Ω, i ser tancat davant del complementari, les unions finites i les interseccions finites (si volguéssim ser precisos, hauríem de dir numerable en lloc de finit, però això ho deixem per a una altra ocasió).

El complementari correspon a negar l'esdeveniment, la unió de dos a tenir lloc l'un o l'altre, i la intersecció de dos a esdevenir, de manera simultània, l'un i l'altre.

El tercer ingredient és la probabilitat, és a dir, un número entre 0 i 1 que assignem als esdeveniments, i que ens indica la facilitat amb què aquest es produeix.

Aquesta assignació no la podem fer de qualsevol manera, si volem tenir el dret de dir-li probabilitat. Perquè puguem parlar de probabilitat s'ha de complir que

- P(surti qualsevol resultat) = 1.
- P(no passi l'esdeveniment) = 1 − P(passi).
- Si A i B no poden passar a la vegada, aleshores P(passi l'esdeveniment A o el B) = P(passi A) + P(passi B). (Aquí no entrem en el tema de σ-additivitat.)
  Això darrer ho escriurem tenint en compte que el subconjunt associat a l'esdeveniment que passi A o B correspon a la unió dels dos subconjunts associats respectivament a l'esdeveniment A i al B, de la manera següent:

$$P(A \cup B) = P(\text{passi } A) + P(\text{passi } B), \text{ si } A \cap B = \emptyset$$

Podem fer-nos ara la següent pregunta: Quina és la probabilitat que assignem a un esdeveniment?

En la definició clàssica, l'assignació es fa per mitjà de l'expressió

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos possibles}}$$

Per tant, la probabilitat es redueix a un problema de comptar. Per exemple, en el cas d'una moneda perfecta, la probabilitat que surti cara serà $\frac{1}{2}$.

En un dau perfecte, la probabilitat que surti un 5 o un 6 serà $\frac{2}{6}$.

Si tirem dos daus, l'espai Ω de resultats serà

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Comptant, podem trobar fàcilment les probabilitats dels següents esdeveniments:

$$P(\text{suma sigui } 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

ja que els casos favorables són les parelles que hi ha a la diagonal que va del (6,1) al (1,6).

$$P(\text{suma sigui 2 o 3}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12},$$

perquè els casos favorables són les parelles (1,1), (2,1) i (1,2).

- **El problema de l'aniversari**

Pregunta: *Quina és la probabilitat que, en un grup de* k *persones que coincideixen en una reunió, n'hi hagi almenys dues que facin els anys el mateix dia?*

Per contestar aquesta pregunta tan sols hem de comptar. Suposem un any de 365 dies (no tenim en compte que hi ha anys de traspàs), i també que hi ha com a màxim 365 persones, ja que si n'hi ha més és segur que hi ha alguna coincidència. Les k persones poden celebrar els seus aniversaris de 365^k maneres distintes.

Aleshores, $P(\text{almenys una coincidència}) = 1 - P(\text{cap coincidència})$.

Per calcular la probabilitat que no hi hagi cap coincidència, ordenem els k assistents i pensem així: el primer pot fer l'aniversari qualsevol dia de l'any, el segon pot fer-lo tots els dies excepte el que els fa el primer... i el darrer podrà tenir l'aniversari en els $365 - k + 1$ dies no ocupats per les altres persones. Per tant,

$$P(\text{almenys una coincidència}) = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365 - k + 1)}{365^k}$$

Si calculem aquesta probabilitat per a diferents valors de k, veiem en la taula següent que, si hi ha 23 persones, la probabilitat de trobar alguna coincidència és ja més gran que $\frac{1}{2}$.

k	p	k	P
5	0,0027	25	0,569
10	0,117	30	0,706
20	0,411	50	0,970
22	0,476	60	0,994
23	0,507	100	0,9999997

5. Dos problemes clàssics resolts en la correspondència entre Pascal i Fermat

Com altres exemples d'aplicació de la definició clàssica, presentarem dues de les qüestions resoltes en la correspondència entre Pascal i Fermat. Unes bones referències són el llibre sobre Fermat [6] ja citat, i el de Szekely [14], en el qual trobareu un bon recull de paradoxes de la teoria de la probabilitat.

- **La paradoxa de la divisió**

Aquest problema ja es descriu en un manuscrit del 1380. Luca Paccioli (1494) el tornà a plantejar en la seva obra *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proporcionalita*.

Pregunta: *Dos jugadors juguen a un joc en què tenen la mateixa probabilitat de guanyar o de perdre, per exemple a cara i creu amb una moneda justa. Posen sobre la taula la mateixa quantitat de diners* *i decideixen que s'ho emportarà tot qui arribi primer a sis victòries. El joc s'interromp quan van 5 a 3. Com s'han de dividir les apostes?*

Tartàglia proposà dividir-les en una proporció de 2 a 1, Paccioli de 5 a 3, i Peveroni de 6 a 1.

Pascal i Fermat, en canvi, proposaren 7 a 1, i el seu raonament era el següent:

En el moment en què els dos jugadors deixen de jugar amb una puntuació de 5 a 3, necessiten com a màxim tres partides més per estar segurs que algú arriba a sis victòries.

Aquests tres jocs addicionals poden anar de vuit maneres diferents. Les descrivim dient qui guanya cadascuna de les tres partides, utilitzant la lletra *A* o *B* segons si és el primer o el segon jugador el que guanya el joc.

Per tant, els casos favorables al primer jugador, en el sentit que arriba a sis jocs guanyats abans que l'altre, són:

AAA, AAB, ABB, ABA, BAB, BAA, BBA,

i només n'hi ha un de favorable al segon jugador, el *BBB*.

Això implica que la proporció en la qual s'han de repartir les apostes ha de ser 7 a 1.

- **La paradoxa de la proporció**

El Chevalier de la Méré ja sabia que la probabilitat de treure un 6 en tirar un dau era $\frac{1}{6}$, i la de tenir un doble 6 en tirar dos daus $\frac{1}{36}$. Nosaltres ho podem deduir tan sols comptant, i utilitzant la definició clàssica.

Si tirem un dau quatre cops, la probabilitat de tenir almenys un 6 és

$$1 - P(\text{cap } 6) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$$

Per tant, és favorable apostar a aquest esdeveniment; en canvi, no ho és apostar a treure almenys un 6 si tirem el dau una, dues o tres vegades, ja que les seves probabilitats respectives són $1 - \frac{5}{6}$, $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$, $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$, totes inferiors a 0,5. A aquest valor 4, l'anomenem el valor crític, és a dir, el valor més petit de n per al qual $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ supera $\frac{1}{2}$.

Ara tirem al mateix temps dos daus i mirem el mínim número de tirades dels dos daus per al qual la probabilitat de treure almenys un doble 6 superi 0,5. En aquesta situació, la probabilitat de treure un doble 6 és $\frac{1}{36}$, és a dir, un sisè de la probabilitat de treure un 6 en llançar un dau.

Hi havia, entre els jugadors de l'època, una regla que deia que si la probabilitat del que busquem es divideix per k, el valor crític corresponent queda multiplicat per k. En el nostre cas, $k = 6$ i, per tant, esperaríem que el nou valor crític fos $6 \times 4 = 24$.

Però si calculem la probabilitat de treure almenys un doble 6 en 24 tirades de dos daus, obtenim

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}49140\ldots$$

inferior a 0,5, i això implica que 24 no és el valor crític d'aquest experiment.

Pregunta: *Per què no és vàlida la regla de la proporció dels valors crítics que afirmaria, en aquesta situació, que si la probabilitat baixa a la sisena part, el valor crític queda multiplicat per 6?*

Aquest problema ja l'havia estudiat Cardano abans que Pascal i Fermat.

Plantegem-lo en general. Considerem un joc on tenim una probabilitat p de guanyar. Definim l'esdeveniment A com que en k repeticions independents almenys guanyem una vegada (més endavant examinarem el concepte d'independència. Quedem-nos ara amb la idea que són esdeveniments que no s'influeixen entre ells i tals que la probabilitat que passin al mateix temps és el producte de les seves probabilitats). La probabilitat d'A, utilitzant el segon axioma, és

$$1-(1-p)^k$$

Aquesta expressió és creixent amb k, i volem trobar per a quina k supera o arriba a 0,5, és a dir, el valor crític. Per tant, hem de resoldre l'equació

$$(1-p)^x = \frac{1}{2},$$

i obtenim

$$x = -\frac{\ln 2}{\ln(1-p)}$$

Desenvolupant per Taylor tenim que $\ln(1-p) = -p - \frac{p^2}{2} - \cdots$, i posant-ho a l'expressió de x dóna

$$x = \frac{\ln 2}{p + \frac{p^2}{2} + \cdots}$$

de manera que, tan sols si p és molt petit, podem pensar $x \approx \frac{\ln 2}{p}$, és a dir, es pot parlar d'un comportament de proporcionalitat inversa, que és el que creien els jugadors que sempre havia de passar.

6. Interpretació freqüencial i subjectiva de la probabilitat

La definició de probabilitat que hem utilitzat té el problema que no prioritza cap possible resultat. Per exemple, no ens serviria en els següents casos:

- Una moneda carregada de manera que la cara sigui més probable que la creu.
- Per trobar la probabilitat que una embarassada tingui bessonada.

Per evitar aquest problema, s'utilitza la interpretació freqüencial de la probabilitat. Aquesta ens diu que si repetim l'experiment moltes vegades de manera *independent*, la quantitat

$$f_n(A) = \frac{\text{nombre de vegades que passa } A \text{ en } n \text{ experiments}}{n}$$

tendeix, quan n va a ∞, cap a un cert número que anomenarem la probabilitat de l'esdeveniment A. Això és una versió naïf de la llei dels grans nombres. Com a matemàtics hauríem de dir què entenem ara per convergència, però no entrarem en aquests moments en aquest tema.

A la figura 8, per exemple, veiem que la freqüència de les cares en tirar repetidament una moneda justa va cap a $\frac{1}{2}$.

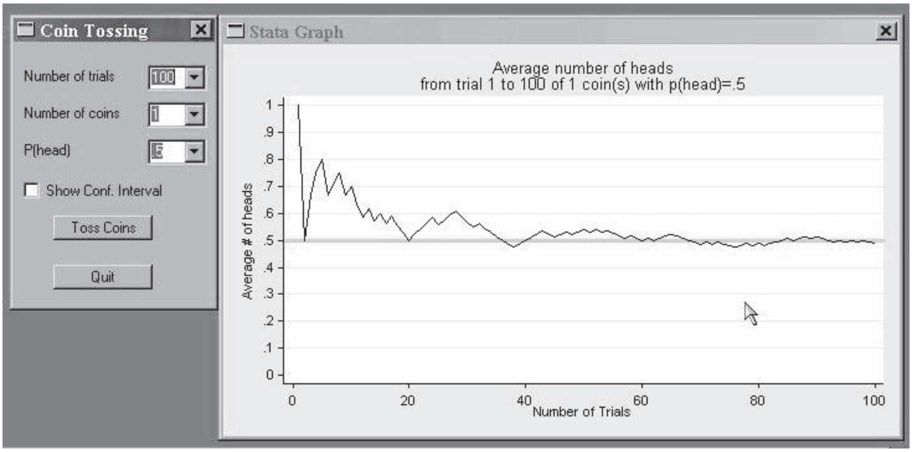
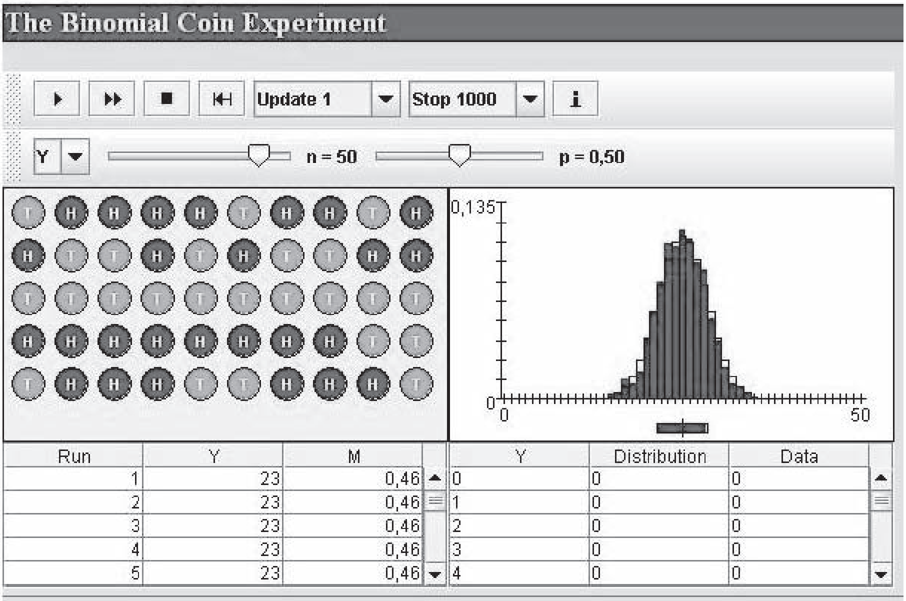


Figura 8

Si tirem simultàniament 50 monedes justes i mirem el número de cares, aquest pot ser qualsevol enter entre 0 i 50. Repetim el llançament de les 50 monedes 1.000 vegades, i fem la gràfica de les freqüències corresponents a cadascun dels valors possibles. Obtenim la campana de la figura 9, la qual s'apropa a la distribució de probabilitats teòrica dels 51 possibles valors de la nostra variable (del 0 al 50), que s'anomena una binomial $\left(50, \frac{1}{2}\right)$. El gràfic està fet amb els *applets* d'una pàgina web absolutament recomanable [16].



Run	Y	M
1	23	0,46
2	23	0,46
3	23	0,46
4	23	0,46
5	23	0,46

Y	Distribution	Data
0	0	0
1	0	0
2	0	0
3	0	0
4	0	0

Figura 9

A vegades no té sentit la repetició del mateix experiment i, per tant, no podem usar la interpretació freqüencial. En aquest cas una alternativa és la interpretació subjectiva, en què la probabilitat depèn de l'opinió que tenim de la facilitat que es produeixi l'esdeveniment considerat.

És important remarcar que, sigui quina sigui la interpretació que fem, el tractament matemàtic és el mateix.

7. Probabilitat condicionada

Si sabem que ha passat l'esdeveniment B, aleshores podem parlar de la probabilitat condicionada de l'esdeveniment A respecte de l'esdeveniment B, que anomenarem $P(A|B)$.

Intuïtivament correspon a reescriure l'espai mostral tenint en compte que B ha passat, i normalitzar les probabilitats dividint per la probabilitat de l'esdeveniment B respecte el qual condicionem perquè sumin 1. Per exemple, en el cas de tirar simultàniament dos daus, si sabem que la suma és 7, B és

$$\{(1,6),\ (2,5),\ (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1)\},$$

i aquest constitueix el nou espai Ω condicional.

Ara, la probabilitat de cada element serà la que tenia abans de condicionar, que recordem era $\frac{1}{36}$, dividida per la de l'esdeveniment B respecte al qual condicionem, que és $\frac{6}{36}$, per tant $\frac{1}{6}$. Com que en l'espai original la distribució de probabilitats era uniforme, també ho serà en el nou, que té 6 elements i, per tant, en aquest cas, hauríem pogut arribar al resultat tan sols comptant en l'espai condicional.

Això ens porta a la coneguda definició

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ \text{si } P(B) \neq 0$$

El concepte d'independència, que abans hem esmentat, és fonamental en la teoria de les probabilitats. Ens diu que si coneixem que B ha passat, això no ens modifica la probabilitat d'A, és a dir, si $P(B) > 0$, aleshores $P(A|B) = P(A)$. De la definició de probabilitat condicionada en deduïm que és equivalent a $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, és a dir, la probabilitat que passin alhora els esdeveniments A i B és igual al producte de les probabilitats respectives.

Vegem-ne dos exemples sorprenents, que motivaran el següent comentari del probabilista Hoffman-Jorguensen [7]:

> *De tot això, el que n'hem de treure com a conseqüència és que mai hem de basar-nos massa en la nostra intuïció quan calculem probabilitats condicionades, sinó en els nostres càlculs.*

- **El problema de la parella de fills**

Pregunta 1: *Si sabem que una parella té dos fills, i un d'ells és una nena, quina és la probabilitat que l'altre sigui també una nena?*

L'espai Ω original és, abans de condicionar,

$$\{(nen, nen),\ (nen, nena),\ (nena, nen),\ (nena, nena)\},$$

en què el primer element de cada parella correspon al fill gran. La probabilitat de cada element és $\frac{1}{4}$.

El conjunt B respecte al qual condicionem, i per tant el nou espai Ω condicional és

$$\{(nen, nena),\ (nena, nen),\ (nena, nena)\},$$

ja que en cada parella hi ha d'haver almenys una nena. La probabilitat de cada element és, en aquest escenari condicionat, la que tenia abans, $\frac{1}{4}$, dividida per la de l'esdeveniment respecte al qual condicionem P(hi ha almenys una nena) $=$ $P(B)$ $=$ $\frac{3}{4}$, per tant, $\frac{1}{3}$. Fixem-nos que hauríem pogut arribar a aquest mateix resultat observant directament l'espai Ω condicional.

Aleshores, en aquesta situació, la probabilitat que els dos fills siguin nenes és la probabilitat condicionada de (*nena, nena*), és a dir, $\frac{1}{3}$.

Pregunta 2: *Si sabem que una parella té dos fills, i el gran és una nena, quina serà la probabilitat que l'altre sigui també una nena?*

L'esdeveniment B respecte al qual ara condicionem és

$$\{(nena, nen), \ (nena, nena)\}$$

i, per tant, aquest és el nou espai condicional. La probabilitat de cada un dels dos elements és $\frac{1}{2}$, valor que obtenim també en dividir la probabilitat sense condicionar, $\frac{1}{4}$, per la de l'esdeveniment $B = \{$el més gran és una nena$\}$, que val $\frac{1}{2}$.

La resposta és ara la probabilitat de (*nena, nena*) en aquest nou escenari condicional, que és $\frac{1}{2}$. Observem que és distinta de l'obtinguda en la qüestió anterior.

Pregunta 3: *(Potser és la més sorprenent de les tres). Sabem que la parella té dos fills, i que un d'ells és una nena. Un dia trobem el pare passejant amb una nena. Quina serà la probabilitat que l'altre fill també sigui una nena?*

Encara que sembla que la situació és la mateixa que la de la primera qüestió, si suposem (que és molt suposar) que el fill que l'acompanya ha estat triat a l'atzar (és a dir, el gran i el petit tenen la mateixa probabilitat d'acompanyar el pare aquell dia), l'espai Ω original és ara

$$\left\{\begin{array}{l} (nenA, nen), \ (nen, nenA), \ (nenA, nena), \ (nen, nenaA), \\ (nenaA, nen), \ (nena, nenA), \ (nenaA, nena), \ (nena, nenaA), \end{array}\right\}$$

en què A majúscula ens indica quin dels dos fills acompanya el pare. Cada element té ara probabilitat $\frac{1}{8}$.

Per tant, el conjunt B respecte al qual condicionem, que com sabem serà el nou espai Ω és

$$(nen, nenaA), \ (nenaA, nen), \ (nenaA, nena), \ (nena, nenaA)\},$$

ja que és una nena la que acompanya el pare. Cada element té probabilitat $\frac{1}{4}$. En aquest escenari, l'esdeveniment que ens interessa, els dos fills són nenes, serà

$$\{(nenaA, nena), \ (nena, nenaA)\}$$

que té probabilitat $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, igual que en la qüestió segona.

Intuïtivament semblava que la informació de què disposem ara és la mateixa que en la primera qüestió, però acabem de veure que les probabilitats són diferents i, per tant, la nostra intuïció no era correcta en aquest cas.

- **El problema de von Savant**

Aquest és un problema que va provocar molta polèmica en el seu moment. Una excel·lent referència és l'article publicat a *The American Statistician* [10].

Pregunta: *En un concurs de televisió hem de triar entre tres portes tancades. Darrera d'una de les portes hi ha un auto i a les altres no hi ha cap premi.*

Triem la porta 1, i el presentador ens obre la 3, en què no hi ha el premi.

Ens pregunten si volem canviar la porta escollida, que és la 1, per la 2, que encara està tancada.

Ho faríeu?

L'espai Ω inicial sembla format pels elements (AGG), (GAG) i (GGA), en què cadascuna de les tres lletres correspon respectivament a la porta 1, 2 i 3. La G ens indica que no hi ha el premi darrera la porta, i la A que hi ha l'auto.

Quan el presentador ens ha obert la porta 3 i veiem que no hi ha premi, l'espai condicional es redueix als dos primers elements, cadascun amb una probabilitat $\frac{1}{2}$. Guanyar canviant vol dir deixar la porta 1 per la 2, i que en la 2 hi hagi l'auto. Això correspon a l'element (GAG), que té probabilitat $\frac{1}{2}$. Sembla, doncs, indiferent canviar.

En aquest raonament no tenim en compte quina estratègia segueix el presentador per obrir una de les portes. Suposem ara que aquest no obrirà mai la porta que té el premi, i en el cas que pugui triar entre dues portes per obrir, que vol dir que el cotxe està darrera la porta 1, que és la que tenim, escull la 2 o la 3 amb la mateixa probabilitat.

Com que hem triat la porta 1, l'espai Ω seria ara

$$\{(AGG2), (AGG3), (GAG3), (GGA2)\},$$

en el qual el número final ens indica la porta oberta pel presentador. Recordem que aquest no pot mai obrir la porta 1, ja que és la que nosaltres hem triat, ni una porta on hi hagi l'auto.

La distribució de probabilitats és la de la taula següent,

($AGG2$)	($AGG3$)	($GAG3$)	($GAG2$)
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Formulem altra vegada la pregunta: Quina seria la probabilitat de guanyar en canviar (esdeveniment que denotem per W_s), si el presentador ha obert la porta 3, en què no hi ha l'auto (esdeveniment $D3$)?

Aquesta probabilitat la calculem mitjançant l'expressió habitual,

$$P(W_s|D3) = \frac{P(W_s \cap D3)}{P(D3)} = \frac{P(GAG3)}{P\big((AGG3), (GAG3)\big)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

Per tant, ara canviar és aconsellable!!

Hem suposat, doncs, una estratègia del presentador. Però podríem pensar que en té una altra. Com a matemàtics, ens interessa generalitzar la situació.

Anomenem p_{ij} la probabilitat que el presentador obri la porta j, si l'auto es troba rere la porta i.

Evidentment, $p_{i2} + p_{i3} = 1$ ja que el presentador no pot obrir mai la porta 1, que és la que hem triat.

L'espai de probabilitat inicial estarà ara format pels elements

$$\{(AGG2), (AGG3), (GAG2), (GAG3), (GGA2), (GGA3)\}$$

amb la següent distribució de probabilitat, on hem dividit per 3 per normalitzar la mesura de manera que la suma sigui 1.

$(AGG2)$	$(AGG3)$	$(GAG2)$	$(GAG3)$	$(GGA2)$	$(GGA3)$
$\frac{p_{12}}{3}$	$\frac{p_{13}}{3}$	$\frac{p_{22}}{3}$	$\frac{p_{23}}{3}$	$\frac{p_{32}}{3}$	$\frac{p_{33}}{3}$

La probabilitat buscada la trobarem aplicant una altra vegada la fórmula de la probabilitat condicionada,

$$P(W_s|D3) = \frac{P(W_s \cap D3)}{P(D3)} = \frac{P(GAG3)}{P\big((AGG3), (GAG3)\big)} = \frac{p_{23}}{p_{13} + p_{23}}$$

Per exemple, considerem ara la següent estratègia del presentador,

$$p_{12} = p,\ p_{13} = 1 - p = q,\ p_{22} = p_{33} = 0,\ p_{23} = p_{32} = 1,$$

en la qual no obre mai una porta amb premi, i si pot triar entre obrir la porta 2 o la 3, perquè no hi ha l'auto en cap de les dues, ho fa amb probabilitats respectives p i $q = 1 - p$.

En aquest cas, $P(W_s|D3) = \dfrac{p_{23}}{p_{13} + p_{23}} = \dfrac{1}{1 + q}$, que sempre és superior o igual a $\frac{1}{2}$.

Si $q = 1$, que significa que el presentador obre la porta 3 sempre que el cotxe no hi sigui, la probabilitat condicionada serà $\frac{1}{2}$ i, per tant, serà indiferent canviar.

Si triem p_{23}, p_{13} i p_{23} de manera que es compleixi la condició

$$1 - \frac{p_{23}}{p_{13} + p_{23}} > \frac{1}{2},$$

que és equivalent a $p_{23} < p_{13}$, aleshores canviar serà desfavorable. Observem que la condició ens implica que p_{23} no pot ser 1, i com que $p_{22} + p_{23} = 1$, deduïm que $p_{22} > 0$, és a dir, el presentador té una estratègia en què podria haver obert la porta 2 encara que darrere hi hagués el cotxe i, per tant, el concurs podria haver acabat sense que el concursant, que ha triat la porta 1, tingués cap opció.

Conclusió: Per contestar la pregunta inicial hem de tenir en compte l'estratègia del presentador.

8. Esperança

Si l'experiment consisteix a mirar el valor d'una certa variable (per exemple, el resultat de tirar un dau), aleshores en repetir-lo de manera independent (recordem que la independència és equivalent a que la probabilitat que passin a la vegada qualsevol número finit d'esdeveniments independents és el producte de les probabilitats de cadascun d'ells), la mitjana dels resultats que anem obtenint s'acosta, quan el número d'experiments va a infinit, a un valor que anomenem *esperança*. Altre cop aquí, com abans, hauríem de precisar el sentit de la convergència, però tampoc hi entrem ara.

El que diem en el paràgraf anterior és una versió naïf de la llei dels grans nombres. En el cas d'un dau just, l'esperança serà 3,5. En la figura 10 s'il·lustra aquesta aproximació.

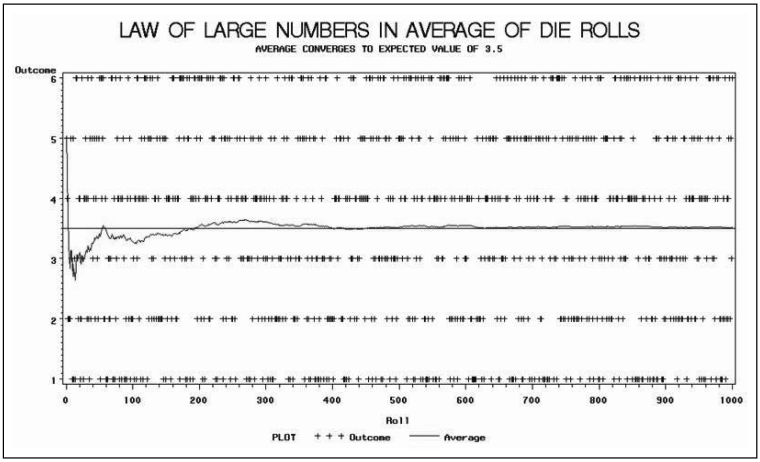


Figura 10

Si hi ha n possibles resultats del nostre experiment, els quals denotem per $x_1, \ldots, x_n$, i tenen probabilitats respectives $p_1, \ldots, p_n$, , l'esperança es calcula amb la següent expressió:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Noteu, per tant, que l'esperança és una mitjana ponderada i que físicament correspondria al centre de gravetat dels valors de la variable amb pesos donats per les probabilitats.

Per exemple, en el cas d'un dau,

$$E(X) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = 3{,}5$$

Imaginem que juguem a un joc en el qual tenim una probabilitat p de guanyar. Si guanyem ens donen una quantitat a, i si perdem hem de pagar-la. L'esperança dels guanys serà

$$E(guanys) = pa - (1 - p)a = a(2p - 1)$$

Podem classificar els jocs segons el signe de l'esperança anterior:

- Si $p = \frac{1}{2}$, aleshores E(guanys nets) = 0 i direm que el joc és just.
- Si $p < \frac{1}{2}$, aleshores E(guanys nets) < 0 i l'anomenarem joc desfavorable.
- Si $p > \frac{1}{2}$, aleshores E(guanys nets) > 0 i l'anomenarem joc favorable.

Un joc qualsevol (amb esperança finita) també el classificarem de la mateixa manera segons el signe de l'esperança dels guanys nets.

El nom està motivat per la llei dels grans nombres descrita abans. Si el joc és favorable, l'esperança de guanys és positiva i això implica que si juguem moltes vegades la mitjana dels guanys obtinguts s'acostarà a l'esperança, i per tant a un número positiu. Per això sembla que ens convé jugar-hi.

Com abans, hauríem d'explicar què vol dir en el nostre context "acostar-se", però tampoc no hi entrarem. Els lectors interessats poden consultar qualsevol text de probabilitats.

Ara ja podem respondre a la següent qüestió: Quant ens han de pagar si apostem perquè surti un tres en tirar un dau, si volem que el joc sigui JUST, i acceptem que perdem un euro si no guanyem?

Recordem que $P(3) = \frac{1}{6}$ i $P(\text{no surt } 3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Aleshores

$$E(\text{guanys}) = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}(-1) = 0,$$

per tant $x = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 5$ euros. És a dir, ens haurien de pagar 5 euros en el cas que surti un 3.

Fixeu-vos que la proporció entre el que guanyem i el que perdem en jugar a aquest joc, en el cas que sigui un joc just, és el quocient entre la probabilitat de perdre i la probabilitat de guanyar, i s'expressa en aquest cas com 5 a 1. Si la proporció entre el que guanyem i el que perdem fos més petita, per exemple 3 a 1, el joc seria desfavorable per a nosaltres. Les apostes vénen usualment descrites per aquest tipus de proporcions i evidentment sempre estan organitzades de manera que esdevinguin jocs desfavorables per al jugador i favorables a l'empresa.

Remarca: Jugar a un joc just no implica que els guanys nets es mantinguin prop del zero. Podem construir jocs amb esperança zero, que hem anomenat justos, tals que les nostres pèrdues acumulades superin amb probabilitat 1 qualsevol número triat prèviament quan $n \to \infty$. Evidentment, ningú no parlaria de justícia en aquest escenari. En el magnífic llibre de Feller [5], podreu trobar un exemple d'aquesta situació tan paradoxal.

9. Distribució geomètrica

Apostem 1 euro en un joc, de manera que si guanyem rebem 1 euro extra i ens tornen el que hem apostat, i en cas contrari el perdem. Si anem repetint la juguesca suposant independència, i fem el gràfic dels guanys acumulats (positius o negatius), tenim una trajectòria típica d'un *passeig aleatori*, com la mostrada en la figura 11, feta també amb els *applets* de [16]. El capítol III del llibre de Feller [5] és una magnífica referència sobre el paradoxal comportament de les marxes aleatòries.

Qüestió 1: *Suposem que juguem repetidament a un joc en el qual tenim una probabilitat* p *de guanyar. Quina serà la probabilitat de guanyar per primera vegada a la tirada* n*?*

Si suposem que les tirades no tenen res a veure (independència), la probabilitat de la seqüència de longitud n, que expressem per

$$\underbrace{P,P,\ldots,P,G}_{n}$$

on la P i la G signifiquen respectivament joc perdut i guanyat, i en la que guanyem per primera vegada en el joc n, serà el producte de les probabilitats respectives, és a dir,

$$(1-p)(1-p)\cdots(1-p)p = (1-p)^{n-1}p$$

D'altra banda, la probabilitat de no guanyar mai és 1 − *P*(guanyar alguna vegada), i aquesta darrera serà, si anomenem *X* la tirada en la qual guanyem per primer cop, la sèrie següent:

$$P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots + P(X = n) + \cdots$$

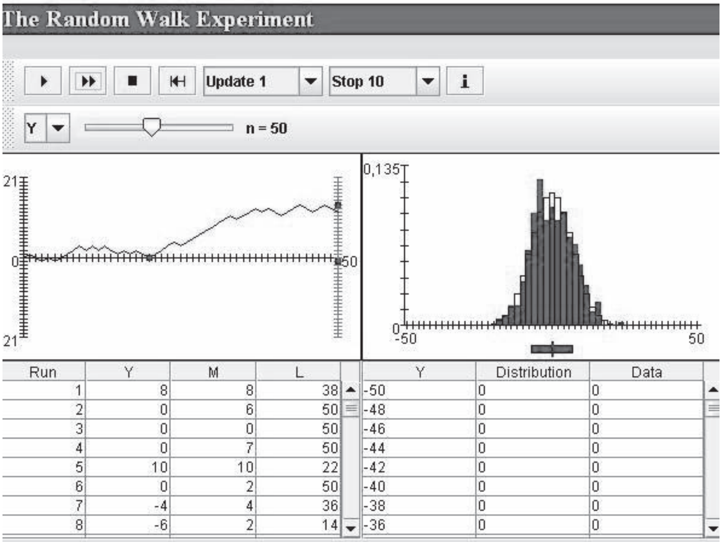


Figura 11

Com que $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$, això és, la suma d'una progressió geomètrica de primer terme *p* i de raó $r = 1 - p$. Per tant, tenim

$$p + p(1-p) + p(1-p)^2 + \cdots = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$$

Com a conseqüència, la probabilitat de guanyar en un moment o altre és 1.

Calculem ara l'esperança de la variable *X* (les partides que hem de jugar fins a guanyar), la qual és

$$E(X) = 1p + 2(1-p)p + \cdots + n(1-p)^{n-1}p + \cdots = p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}$$

Utilitzem altra vegada l'expressió de la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica per escriure $\sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^n = \dfrac{1-p}{1-(1-p)} = \dfrac{1-p}{p}$

En derivar els dos costats de la igualtat (en aquest context podem fer-ho), tenim $\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} = \dfrac{1}{p^2}$

i, per tant, multiplicant per *p* ens queda

$$E(X) = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

Això ens diu, per exemple, que si guanyar vol dir que en tirar 20 monedes justes al mateix temps surtin 20 cares, que és un esdeveniment que té una probabilitat $\frac{1}{2^{20}}$, el número mitjà de vegades que haurem de tirar les 20 monedes serà 2^{20}.

Aquest resultat ens suggereix que, si repetim suficients cops l'experiment, les coses amb probabilitat petita acaben passant, encara que potser haurem d'esperar molt.

10. Problema de la martingala

Suposem que juguem a un joc on guanyem amb probabilitat p. Apostem x euros i si guanyem ens en tornen $2x$, i en cas contrari perdem l'aposta x.

L'esperança dels guanys nets serà, doncs,

$$E(\text{guanys nets}) = (2x - x)p - x(1 - p) = -x + 2xp = x(2p - 1),$$

i aquesta quantitat és negativa si $p < \frac{1}{2}$.

Existeix una estratègia d'apostes anomenada *martingala* (el nom es pensa que ve de Martingues, una ciutat de la Provença), que sembla convertir aquest joc desfavorable en un de favorable. Jugar a la martingala vol dir doblar l'aposta quan perdem, i anar-ho fent fins que guanyem, moment en què deixem de jugar. Com hem vist que, amb probabilitat 1, en una tirada o altra guanyem, tenim la il·lusió que obtindrem un benefici assegurat.

Estudiem ara aquesta situació amb més detall.

Si apostem n vegades seguides, començant per 1 euro, aplicant l'estratègia de martingala, és a dir, doblant l'aposta quan perdem fins que guanyem per primer cop en la tirada enèsima, la quantitat total apostada serà

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = 2^n - 1$$

Com que en la jugada n hem apostat 2^{n-1}, si la sort ens és favorable, rebrem el doble, és a dir, 2^n euros. Els guanys nets seran doncs $2^n - (2^n - 1)$, és a dir, d'1 euro.

En la taula següent donem la probabilitat de guanyar per primera vegada en els jocs $1, 2\ldots$, tal com hem trobat en la secció dedicada a la distribució geomètrica, i hi recalquem que sempre el benefici net obtingut és 1.

jocs jugats	probabilitat	aposta acumulada	guany
1	p	1	$1 = 2 - 1$
2	$p(1 - p)$	$1 + 2$	$1 = 4 - 3$
3	$p(1 - p)^2$	$1 + 2 + 2^2$	$8 - (1 + 2 + 4) = 1$
	$\vdots$		
n	$p(1 - p)^{n-1}$	$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$	1

Els casinos, però, limiten l'aposta màxima i, d'altra banda, la nostra fortuna és limitada. Per tant, no podem doblar indefinidament.

Per estudiar aquesta situació real, suposem que disposem d'un capital $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1}$, que com sabem suma $2^n - 1$. Això implica per a nosaltres que podrem jugar, aplicant la tècnica de martingala, com a màxim n vegades abans de quedar-nos sense res. Aleshores, si calculem l'esperança dels guanys nets, tenim

$$E(\text{guanys nets}) = 1P(\text{guanyar en alguna de les } n \text{ possibles tirades}) - (2^n - 1)P(\text{perdre les } n \text{ tirades})$$

Substituint les probabilitats calculades abans, tenim que l'esperança és

$$\begin{aligned}&1(p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \ldots + p(1-p)^{n-1})\\ &-(2^n-1)(1-p(1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{n-1}))\end{aligned}$$

Observeu que la probabilitat de guanyar en alguna de les primeres n tirades és la suma de n termes d'una geomètrica,

$$\begin{aligned}&p + p(1-p) + p(1-p)^2 + p(1-p)^3 + \cdots + p(1-p)^{n-1}\\ &= p(1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\cdots+(1-p)^{n-1}) =\\ &= p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n\end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}E(\text{guanys nets}) &= 1(1-(1-p)^n) - (2^n-1)(1-(1-(1-p)^n)\\ &= 1-(2(1-p))^n\end{aligned}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, l'esperança és 0.

Si $p < \frac{1}{2}$, l'esperança serà negativa, i decreix cap a menys infinit quan $n \to \infty$.

Aquest resultat ens diu que l'estratègia de martingala no converteix el joc desfavorable en favorable. Per tant, podríem recordar la frase que hi ha escrita a l'entrada de l'infern en la *Divina Comèdia* de Dant,

ELS QUE ENTREU AQUÍ ABANDONEU QUALSEVOL ESPERANÇA.

La teoria de les martingales és un element molt important en l'estudi de l'evolució de la incertesa amb el temps. Concretament, les martingales són un tipus de processos estocàstics que modelen, curiosament (contra el que el nom d'entrada fa suposar), els jocs justos. Per conèixer més sobre martingales podeu consultar les referències [11] i [15].

11. Problema de la ruïna

Per acabar aquest passeig per la teoria de la probabilitat, tractarem el problema de la ruïna d'un jugador. Una referència excel·lent torna a ser el llibre de Feller [5].

Imagineu que juguem a un joc on la probabilitat de guanyar és p i, per tant, la de perdre és $q = 1 - p$. Si guanyem, incrementem la nostra fortuna en 1 euro, i si perdem, disminuïm el nostre capital en la mateixa quantitat.

Comencem a jugar amb i euros, $0 \le i \le a$, on i és un número natural i a és un número natural fixat.

Anem jugant fins que tenim una quantitat a d'euros o ens arruïnem. Arruïnar-se vol dir arribar a 0 abans que a la barrera de nivell a. Aquesta situació seria un nou exemple de passeig aleatori, el qual evoluciona entre dues barreres, una al nivell zero i l'altra al nivell a.

Denotem per q_i la probabilitat d'arruïnar-nos si comencem jugant amb i euros. Arruïnar-nos, com hem dit, significa arribar abans a la barrera inferior que a la superior. Si $0 < i < a$, després de la primera partida tindrem $i + 1$ euros, si guanyem, i $i - 1$, si perdem; per tant, pel teorema de les probabilitats totals

$$
\begin{aligned}
q_i &= P(\text{arruïnar-nos, sortint de } i) = P(\text{arruïnar-nos, sortint de } i\text{, guanyant en la primera tirada})+\\
&+ P(\text{arruïnar-nos, sortint de } i\text{, perdent en la primera tirada})\\
&= P(\text{arruïnar-nos, sortint de } i+1)P(\text{guanyar la primera tirada})+\\
&+ P(\text{arruïnar-nos, sortint de } i-1)P(\text{perdre la primera tirada}),
\end{aligned}
$$

és a dir, amb la notació introduïda,

$$q_i = pq_{i+1} + qq_{i-1}$$

Com que $p + q = 1$, tenint en compte la igualtat anterior podem escriure

$$q_i = (p+q)q_i = pq_i + qq_i = pq_{i+1} + qq_{i-1}$$

Arreglant-ho arribem a

$$p(q_{i+1} - q_i) = q(q_i - q_{i-1})$$

Dividint per p ens queda

$$q_{i+1} - q_i = \frac{q}{p}(q_i - q_{i-1}), \text{ si } 1 \leq i \leq a-1 \tag{2}$$

D'altra banda, $q_0 = 1$ ja que si sortim de 0 ja estem arruïnats, i $q_a = 0$ perquè si ja som al nostre objectiu no juguem i no ens podem arruïnar.

Aquestes seran les condicions de contorn del problema, i per tant

$$
\begin{aligned}
q_2 - q_1 &= \frac{q}{p}(q_1 - q_0) = \frac{q}{p}(q_1 - 1),\\
q_3 - q_2 &= \frac{q}{p}(q_2 - q_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 (q_1 - 1),\\
&\cdots\\
q_i - q_{i-1} &= \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} (q_1 - 1)
\end{aligned}
$$

Si p i q són diferents, sumem les equacions anteriors i fixant-nos en les cancel·lacions tenim

$$q_i - q_1 = \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right)(q_1 - 1) = \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \frac{q}{p}}(q_1 - 1) \tag{3}$$

Utilitzarem ara les condicions inicials. Si posem $i = a$, com que $q_a = 0$, ens queda,

$$q_a - q_1 = -q_1 = \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \frac{q}{p}}(q_1 - 1),$$

és a dir, una equació de la forma $-q_1 = K(q_1 - 1)$, en què $K = \dfrac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \frac{q}{p}}$

Resolent-la, tenim $q_1 = \dfrac{K}{K+1}$, i per tant

$$q_1 = \frac{\dfrac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \frac{q}{p}}}{1 + \dfrac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \frac{q}{p}}} = \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a} \tag{4}$$

Aïllant q_i a (3), tenim

$$q_i = q_1 + \frac{\frac{q}{p} - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \frac{q}{p}}(q_1 - 1)$$

Substituint en aquesta igualtat l'expressió (4) per a q_1 i amb una mica d'àlgebra obtenim

$$q_i = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a} \tag{5}$$

Per trobar la probabilitat d'arribar a la barrera superior abans d'arruïnar-nos, sortint d'una fortuna i, tan sols hem d'intercanviar el paper de q i p, i els de les dues barreres, per tant

$$p_i = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{a-i} - \left(\frac{p}{q}\right)^a}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^a}$$

Podem comprovar que $1 = p_i + q_i$. Això ens indica que sempre (un probabilista precís diria amb probabilitat 1) arribem a una barrera o altra, és a dir, el joc s'acabarà i no estarem per una eternitat vivint entre les dues barreres.

El raonament anterior no val per $p = q = \frac{1}{2}$. En aquest cas hem d'argumentar de manera diferent.

Recordem que

$$q_i - q_1 = \left(\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right)(q_1 - 1)$$

Com que $\frac{q}{p} = 1$, la suma que hi ha en el primer parèntesi del terme dret de la igualtat és $1 + \cdots + 1 = i - 1$.

Tenim, doncs,

$$q_i - q_1 = (i-1)(q_1 - 1) \tag{6}$$

Si $i = a$ la igualtat anterior s'escriu

$$q_a - q_1 = (a-1)(q_1 - 1)$$

Com que $q_a = 1$, veiem que $q_1 = \dfrac{a-1}{a}$.

Posem aquest valor de q_1 en (6), i obtenim $q_i = 1 - \frac{i}{a}$ quan $p = \frac{1}{2}$.

Per calcular en aquest escenari la probabilitat d'arribar primer a la barrera superior que a la inferior raonem com abans, intercanviant i per $a - i$, i per tant

$$p_i = 1 - \frac{a-i}{a}$$

Fixeu-vos que ara també la suma $p_i + q_i$ és 1. Això ens indica que en aquest cas, com abans, també sempre arribarem a alguna de les dues barreres amb probabilitat 1.

Mirem ara un exemple concret. Imaginem que comencem amb 100 euros i volem jugar fins que arribem a 110 euros o ens arruïnem, i que $q \neq p$.

La fórmula (5) per a $i = 100$ i $a = 110$ serà

$$q_{100} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{100} - \left(\frac{q}{p}\right)^{110}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{110}} \tag{7}$$

Si juguem a un joc amb $p = 0{,}493$ i $q = 1 - p = 0{,}507$, posant aquests valors a (7) obtenim $q_{100} = 0{,}253$.

En el cas que $p = q = \frac{1}{2}$, hem deduït que $q_i = 1 - \frac{i}{a}$. Amb els mateixos valors del darrer exemple ara $q_{100} = 0{,}091$, és a dir, les coses canvien molt si el joc és just ja que la probabilitat d'arruïnar-se baixa significativament!!

En la taula següent presentem els càlculs per a diferents valors de la fortuna inicial i, de la probabilitat de guanyar p, i de la quantitat objectiu a. En les dues darreres columnes hi ha les esperances dels guanys i del número de jocs necessaris per arribar a alguna de les dues barreres.

p	q	i	a	q_i	p_i	E(guany)	E(durada)
0,5	0,5	9	10	0,1	0,9	0	9
0,5	0,5	90	100	0,1	0,9	0	900
0,5	0,5	900	1000	0,1	0,9	0	90000
0,5	0,5	950	1000	0,05	0,95	0	47500
0,5	0,5	8000	10000	0,2	0,8	0	$1{,}6 \times 10^7$
0,45	0,55	9	10	0,210	0,790	−1,1	11
0,45	0,55	90	100	0,866	0,134	−76,6	765,6
0,45	0,55	99	100	0,182	0,818	−17,2	171,8
0,4	0,6	90	100	0,983	0,017	−88,3	441,3
0,4	0,6	99	100	0,333	0,667	−32,3	161,7

En l'última línia veiem per exemple que si el joc ens és desfavorable, encara que sortim a prop de la barrera superior (tan sols ens falta 1 euro per arribar-hi), la probabilitat d'arruïnar-nos és important, 0,333.

Qüestió: *Quina és la quantitat que seria convenient d'apostar cada vegada per millorar la probabilitat d'arribar a la barrera superior abans que al zero (ruïna)?*

Si en el primer cas estudiat apostem 2 euros en lloc d'1, podem adaptar les fórmules canviant 100 per 50 i 110 per 55. Aleshores

$$q_{50} = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{50} - \left(\frac{q}{p}\right)^{55}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{55}},$$

i substituint els valors $p = 0{,}493$ i $q = 1 - p = 0{,}507$, ens dóna una probabilitat d'arruïnar-nos de 0,165, quan abans era de 0,253.

Si apostem 5 euros cada cop, haurem de canviar el 100 i el 110 per 20 i 22, i ens quedarà una probabilitat de ruïna de 0,118. Per tant, millor encara.

De l'expressió per a la probabilitat de ruïna deduïm que la millor estratègia en un joc desfavorable és jugar sempre a l'aposta màxima, de manera que en una sola tirada puguem arribar a la barrera superior, i no deixar actuar la tendència a anar cap a la ruïna.

Bé. Hem arribat al final del nostre passeig. L'aplicabilitat de totes aquestes idees a la modelització de la incertesa és enorme. Les martingales, les marxes aleatòries... són molt presents en els estudis financers i en molts altres camps. Això, però, ens portaria a un altre article...

Als que vulgueu continuar aquest amable passeig us recomanaria l'article d'en Corberan i en Montes [3], així com els que trobareu a la pàgina web de la revista electrònica *Mat*^{2} [17], entre els quals assenyalem l'estudi de la sorprenent paradoxa dels dos sobres, escrit per la Mercè Farré [4], juntament amb els de Bardina sobre rècords i passejos aleatoris ([1] i [2]).

Referències

Bardina, X. (2007). Quants rècords veurem al llarg de la nostra vida? *Mat*^{2}. Departament de Matemàtiques de la UAB. (http://mat.uab.cat/ matmat/).

—(2008). Caminant a l'atzar tots els camins porten a Roma. *Mat*^{2}. Departament de Matemàtiques de la UAB. (http://mat.uab.cat/matmat/).

Corberan, A. i Montes, F. (2000). Perversiones y trampas. *La Gaceta*, vol. 3, 2 (RMSE).

Farré, M. (2008). La paradoxa dels dos sobres: models del joc i simulacions. *Mat*^{2}. Departament de Matemàtiques de la UAB. (http://mat.uab.cat/mat mat/).

Feller, W. (1988). *Introducción a la teoria de probabilidades y sus aplicaciones*. Limusa (vol. I).

Fermat, P. de (2008). *Obra matemàtica vària*. [Traducció comentada i anotada per J. Pla, P. Viader i J. Paradís. Publicacions de l'IEC].

Hoffman-Jorgensen, J. (1994). *Probability with a view toward Applications*, vol. I. Chapman & Hall (Probability Series).

Kolmogorov, A. N. (1933). Grunbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung. [Traducció anglesa: *Foundation of the Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company, 1950].

Laplace, P. S. de (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. El libro de bolsillo, 1147. Madrid: Alianza Editorial.

Morgan, J. P., Chaganty, N. R., Dahiya, R. C. i Doviak, M. J. (1991). Let's make a deal: The Player Dilemma. *The American Statistician*, vol. 45, 4, 284-289.

Nualart, D. (1989). Les martingales i les seves aplicacions des d'una perspectiva històrica. *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 4.

Poincaré, H. (1980). *Calcul des Probabilités. Les grandes classiques Gauthier-Villars*. (1912). Éditions Jacques Gabay.

—*Ciencia y Método*. Austral, 409. Espasa-Calpe.

Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*. Mathematics and its appication. Dordrecht Editors.

Williams, D. (1991). *Probability with Martingales*. Cambridge University Press.

University of Alabama in Huntsville. http://www.math.uah.edu/stat/applets/

Materials matemàtics. *Mat*^{2}. http://mat.uab.cat/matmat/