# Targetes negabinàries

**Sergio Belmonte**
Professor de matemàtiques
Vicepresident del Museu de Matemàtiques de Catalunya
sbelmon4@xtec.cat

## Resum

Molts de nosaltres coneixem les targetes numèriques endevinatòries, que utilitzen les potències de dos o el sistema binari, si voleu, per tal d'endevinar un nombre entre dos valors determinats. Però això no acaba aquí: una de les virtuts de les matemàtiques és que sempre podem anar més enllà. I això és el que farem en aquesta proposta: ampliar aquestes targetes amb nombres negatius. Si bé els mags no expliquen els seus trucs, en matemàtiques esbrinar i explicar el motiu de les coses és un dels seus motors, així com trobar els models que els expliquen —podríem dir-ne sistemes de numeració, en aquest cas—. Això també ho veurem en aquest article.

## Abstract

*Many of us are familiar with the number cards which use powers of two — or the binary system, if you wish — to determine a number between two given values. But it doesn't end there: one of the virtues of mathematics is that we can always take things further. And that is what we do in this paper, by expanding these cards with negative numbers. While magicians never reveal their tricks, finding out and explaining the reasons for things is one of the key motivations in mathematics, as is discovering models that can explain them. In this case these models are called numeral systems, which we also discuss here.*

Mireu aquestes targetes:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 |
| 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 |
| 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 | 47 |
| 49 | 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 | 63 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 6 | 7 | 10 | 11 | 14 | 15 |
| 18 | 19 | 22 | 23 | 26 | 27 | 30 | 31 |
| 34 | 35 | 38 | 39 | 42 | 43 | 46 | 47 |
| 50 | 51 | 54 | 55 | 58 | 59 | 62 | 63 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 6 | 7 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 36 | 37 | 38 | 39 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 52 | 53 | 54 | 55 | 60 | 61 | 62 | 63 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 | 25 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
| 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 |
| 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |
| 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 |
| 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |
| 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 |

**Il·lustració 1. Targetes binàries.**

Si us dic que penseu en qualsevol nombre de l'1 al 63 (els que apareixen a les targetes), que em digueu només en quines targetes apareix el nombre que heu pensat i que seré capaç d'endevinar-lo tan sols amb aquesta informació, segurament em direu: — «Ei, Sergio, jo també ho sé fer!».

Estic segur que la immensa majoria de vosaltres ja coneixeu aquest petit efecte mate-màgic i sabeu perfectament com funciona: es basa en la representació en un sistema binari (base 2) dels nombres en base decimal (els que fem servir normalment) i funciona fonamentalment perquè aquesta representació és única. Això permet saber inequívocament el nombre en el qual una persona està pensant només dient en quines targetes apareix. Aquestes targetes es coneixen com a targetes binàries i cada targeta s'associa a una potència de 2. D'aquesta manera (d'esquerra a dreta i de dalt a baix), la targeta 1 és l'1, la targeta 2 és el 2, la targeta 3 és el 4, la targeta 4 és el 8, la targeta 5 és el 16 i la targeta 6 és el 32.

Vegem-ne un exemple.

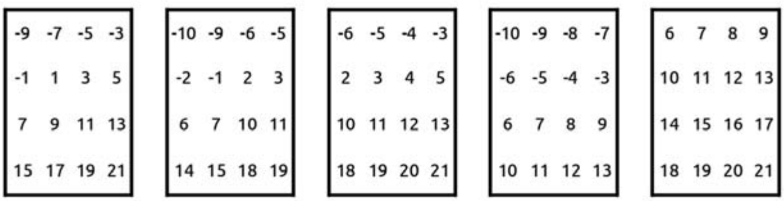
*Imaginem que una persona pensa el nombre 42. Així, ens dirà que apareix a les targetes 2, 4 i 6, que corresponen a les potències* $2^1$, $2^3$ *i* $2^5$. *Per calcular el nombre pensat, doncs, només hauríem de sumar aquestes potències:* $2 + 8 + 32 = 42$.

Per si de cas encara hi ha alguna persona per a la qual això és nou, els amics de *Divermates* van fer un article amb l'explicació i van posar a disposició del públic uns arxius amb les targetes per imprimir i portar-les com a activitat a l'aula. És molt recomanable: http://divermates.es/blog/tarjetas-magicas/.

A més, si voleu practicar, també n'hi ha versions en línia, on *màgicament* l'ordinador ens esbrina el nombre pensat: http://matemagia.educacia.com/html/tarjetero.html.

## Unes noves targetes

Però ara vull que mireu aquestes targetes:




**Il·lustració 2. Targetes negabinàries.**

Penseu un nombre entre el (−10) i el 21 (ambdós inclosos). Només dient-me en quines targetes és, podré endevinar de quin nombre es tracta.

Bé, sembla que sigui el mateix que les targetes binàries, però si ho mireu bé i ho intenteu fer, no surt. Llavors, com ho faré per endevinar el vostre pensament? Com s'han fet aquestes targetes? Per què funcionen?

Ara és un bon moment per deixar de llegir, fer un cafè o un suc i pensar una mica en les respostes de les preguntes anteriors abans de seguir llegint...

És clar que si no podeu esperar més, a continuació us dono les respostes.

## Explicació i matemàtica

L'explicació és que ara no he fet servir la base 2 (com en les clàssiques targetes binàries), sinó la base $(-2)$; és a dir, ara he fet servir les potències de $(-2)$ per fer la descomposició dels nombres. Aquesta base s'anomena base negabinària:[1]

$$\begin{aligned}(-2)^0 &= 1\\ (-2)^1 &= -2\\ (-2)^2 &= 4\\ (-2)^3 &= -8\\ (-2)^4 &= 16\\ &\vdots\end{aligned}$$

I, en conseqüència, les targetes anteriors s'anomenen targetes negabinàries.[2]

D'aquesta manera, a la primera targeta li correspon el nombre 1; a la segona, el $(-2)$; a la tercera, el 4, a la quarta, el $(-8)$, i a la quinta, el 16. La mecànica per esbrinar el nombre pensat és exactament igual que en les famoses targetes binàries.

Amb un parell d'exemples, entendreu com funcionen aquestes targetes:

1. *Nombre pensat:* $-10$

   *Apareix a les targetes* 2 *i* 4. *Així, el que fem és:* $-2-8=-10$

2. *Nombre pensat: 13*

   *Apareix a les targetes 1, 3, 4 i 5. Així, el que fem és:* $1+4-8+16=13$.

Per a la construcció de les targetes, el que he fet és escriure a la primera targeta tots el nombres que tenen l'1 en la seva representació negabinària; a la segona, els que tenen el $(-2)$; a la tercera, els que tenen el 4, i així successivament.

Aquí teniu la taula amb els nombres del $(-10)$ fins al 21 amb la seva descomposició negabinària. Les *X* indiquen quines potències de $(-2)$ componen cada nombre enter:

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_base.
2. Exploding Dots, James Tanton and Kiran.

| | | -10 | -9 | -8 | -7 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Targ 1: | 1 | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X | | X |
| Targ 2: | -2 | X | X | | | X | X | | | X | X | | | X | X | | | X | X | | | X | X | | | X | X | | | X | X | | |
| Targ 3: | 4 | | | | | X | X | X | X | | | | | X | X | X | X | | | | | X | X | X | X | | | | | X | X | X | X |
| Targ 4: | -8 | X | X | X | X | X | X | X | X | | | | | | | | | X | X | X | X | X | X | X | X | | | | | | | | |
| Targ 5: | 16 | | | | | | | | | | | | | | | | | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X | X |

| | Targ 1<br>1 | Targ 2<br>-2 | Targ 3<br>4 | Targ 4<br>-8 | Targ 5<br>16 |
|---|---|---|---|---|---|
| -10 | | X | | X | |
| -9 | X | X | | X | |
| -8 | | | | X | |
| -7 | X | | | X | |
| -6 | | X | X | X | |
| -5 | X | X | X | X | |
| -4 | | | X | X | |
| -3 | X | | X | X | |
| -2 | | X | | | |
| -1 | X | X | | | |
| 0 | | | | | |
| 1 | X | | | | |
| 2 | | X | X | | |
| 3 | X | X | X | | |
| 4 | | | X | | |
| 5 | X | | X | | |
| 6 | | X | | X | X |
| 7 | X | X | | X | X |
| 8 | | | | X | X |
| 9 | X | | | X | X |
| 10 | | X | X | X | X |
| 11 | X | X | X | X | X |
| 12 | | | X | X | X |
| 13 | X | | X | X | X |
| 14 | | X | | | X |
| 15 | X | X | | | X |
| 16 | | | | | X |
| 17 | X | | | | X |
| 18 | | X | X | | X |
| 19 | X | X | X | | X |
| 20 | | | X | | X |
| 21 | X | | X | | X |

**Il·lustració 3. Descomposició en base ($-2$).**

Llavors, per exemple, la representació negabinària del nombre 6 seria:

$$6 = -2 - 8 + 16 = 0 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^1 + 0 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^4,$$

amb la qual cosa apareixerà en les targetes 2, 4 i 5 (ho podeu comprovar).

Crec que és un molt bon exercici per fer a classe amb l'alumnat, calcular el desenvolupament en base ($-2$) de cada nombre i després aprofitar l'ocasió per fer-se algunes preguntes riques, com ara:

- Per què he fet servir del $-10$ al 21? Es pot fer servir una altra franja de nombres?
- Quants nombres posem a cada targeta?
- Es poden fer més targetes? I menys? Quants nombres posem a cadascuna?

I, a més, si mireu les descomposicions dels nombres, us vull fer notar que:

- Tots el nombres positius necessiten un nombre senar de dígits.
- Tots els nombres negatius necessiten un nombre parell de dígits.

Podríeu explicar per què? Podeu trobar-ne més patrons?

Pel que fa a la presentació de l'efecte màgic i la seva execució, us vull comentar que quan ho presenteu, crec que és millor ensenyar les targetes en ordre invers; és a dir, primer la que correspon al 16, després la que correspon al $(-8)$, després la que correspon al 4, després la del $(-2)$ i, per acabar, la de l'1, ja que això facilita molt els càlculs mentals que s'han de fer.

Per exemple, si haig d'esbrinar el nombre 18, a mi em resulta molt més fàcil calcular mentalment $16 + 4 - 2$ que no pas $-2 + 4 + 16$. Però, òbviament, és una qüestió de gustos i els càlculs són suficientment fàcils perquè no hi hagi cap problema a fer-los d'una manera o de l'altra.

## Més enllà de l'efecte màgic...

En tot cas, si volem analitzar fil per randa tota la matemàtica d'aquest efecte màgic, la primera pregunta que s'haurà de respondre és si en aquesta base la representació d'un nombre és única. I la sorprenent resposta és que sí i que no. M'explico:

En general, representem un nombre enter en la base negabinària; així,

$$r = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (-2)^i,$$

on els nombres $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ es diuen coeficients i han de complir que $|a_i| \leqslant 1$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$.

En el sistema binari, on la base és 2, tots els coeficients són no negatius; és a dir, 0 o 1. Però si la base és negativa, podem obrir la possibilitat que els coeficients siguin també negatius.

Així doncs, si obrim aquesta possibilitat per a la base negabinària, tenim que:

- Si els coeficients són tots 0 o 1, llavors la descomposició de cada nombre és única.
- Si els coeficients són tots 0 o $(-1)$, llavors la descomposició de cada nombre és única.
- Si els coeficients són 0, 1 o $(-1)$, llavors la descomposició no és única; més encara: d'un nombre qualsevol, hi ha infinites descomposicions diferents! (excepte per al zero).

Les dues primeres afirmacions són certes gràcies a la unicitat en la descomposició d'un nombre en qualsevol base (teorema fonamental de la numeració), i per a l'última afirmació només cal notar que qualsevol potència de $(-2)$ es pot expressar d'infinites maneres fent servir els coeficients 0, 1 o $(-1)$. Podríeu esbrinar per què?

És per això que abans us comentava que la descomposició pot ser única o no, depenent dels coeficients que considerem.

Per exemplificar les afirmacions anteriors, vegeu:

- $-10 = -2 - 8 = 1 \cdot (-2)^0 + 1 \cdot (-2)^3$,

  la descomposició (única) de la qual és $(1, 0, 0, 1)$.
- $-10 = 2 - 4 + 8 - 16 = (-1) \cdot (-2)^1 + (-1) \cdot (-2)^2 + (-1) \cdot (-2)^3 + (-1) \cdot (-2)^4$,

  la descomposició (única) de la qual és $(-1, -1, -1, -1, 0)$.

- $-10 = -2 + 8 - 16 = -2 + 8 + 16 - 32 = -2 + 8 + 16 + 32 - 64 = \cdots$,

  les descomposicions de les quals són, respectivament, $(-1, -1, 0, 1, 0) = (1, 1, -1, 0, 1, 0) = (-1, -1, 1, -1, 0, 1, 0) = \cdots$

En les targetes negabinàries que us he presentat, l'efecte de màgia funciona perquè els coeficients que es fan servir són 0 (no) i 1 (sí), és a dir, són no negatius, i la descomposició de cada nombre és única.

Ara bé, a partir del que he comentat anteriorment, les targetes també es podrien preparar amb els coeficients 0 i $(-1)$, i com que la representació és única, també funcionaria. Això sí, per poder fer els càlculs i aconseguir l'efecte màgic, el valor associat a cada targeta hauria de canviar de signe: a la primera li correspondria el $(-1)$; a la segona, el 2; a la tercera, el $(-4)$, etc.

A tall d'exemple, vegeu:

$$6 = 2 - 4 + 8 = 0 \cdot (-2)^0 + (-1) \cdot (-2)^1 + (-1) \cdot (-2)^2 + (-1) \cdot (-2)^3 + 0 \cdot (-2)^4$$

i hauria d'aparèixer ara a les targetes 2, 3 i 4.

Us deixo com a exercici, si voleu, fer la descomposició de cada nombre i fer les targetes corresponents, que crec que també és una activitat molt interessant per portar-la a l'aula.

### Comentaris finals

Aquest sistema negabinari que us he presentat té l'avantatge que es pot escriure amb tots els nombres enters, positius i negatius, sense haver de fer servir un *dígit* (coeficient) extra per al signe, com sí que es necessitaria en el sistema binari, però, en canvi, les operacions aritmètiques bàsiques resulten bastant complexes de fer.

També us vull obrir la porta a explorar, jugar i experimentar amb altres bases negatives amb altres nombres per descobrir propietats interessants, fer-vos més preguntes *riques* i, qui sap, inventar nous efectes màgics.

Per acabar, vull afegir que segurament aquests sistemes no són uns *bons sistemes* de numeració per utilitzar quan es necessita fer operacions, però resulten bastant enginyosos per presentar un efecte de màgia matemàtica com aquest, no creieu?

## Enllaços d'interès sobre les bases negabinàries

https://math.stackexchange.com/questions/3251605/how-to-add-negabinary-numbers

http://mathworld.wolfram.com/Negabinary.html

http://oeis.org/wiki/Negabinary