

# Idees per ensenyar i aprendre matemàtiques

**Lluís Mora Cañellas**

Professor de matemàtiques i formador de docents  
lluismora.walipi@gmail.com

## Resum

En aquest article parlarem de la importància de l'aprenentatge de les matemàtiques i presentarem una proposta de quines matemàtiques s'han d'aprendre i com podríem treballar-les. I mostrarem algunes idees, vuit, que ens poden ajudar en el procés d'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a l'aula. Començarem situant els motius pels quals cal ensenyar matemàtiques, continuarem amb les matemàtiques que caldria ensenyar i finalitzarem amb les vuit idees que ens ajudaran a construir un bon ensenyament de les matemàtiques.

## Abstract

*In this article we discuss the importance of learning mathematics, and present a proposal of what mathematics should be learned and how this can best be achieved, as well as several ideas – eight in total – that can be helpful in the process of teaching/learning mathematics in the classroom. We begin by setting out the reasons why mathematics should be taught, continue with a summary of the mathematics that should be taught, and conclude with the eight ideas that can help in constructing an effective mathematics teaching plan.*

En aquest article parlarem de la importància de l'aprenentatge de les matemàtiques, per quin motiu és important ensenyar-les i aprendre-les, i presentarem una proposta de quines són les que podrien vehicular aquest ensenyament i com podríem treballar-les. I mostrarem algunes idees, vuit, que ens poden ajudar en el procés d'aprenentatge de les matemàtiques a l'aula.

En tots els casos donarem exemples de les propostes que mostrem que es poden aplicar en diferents nivells educatius.

Començarem situant els motius pels quals cal ensenyar matemàtiques, continuarem després amb les matemàtiques que caldria ensenyar i finalitzarem amb les vuit idees que ens ajudaran a construir un bon ensenyament de les matemàtiques. I, com no podia ser d'altra manera, finalitzarem amb les conclusions, on s'insisteix que tots hem de ser conscients de la importància de l'aprenentatge d'aquesta ciència.

## 1. Per quin motiu cal ensenyar matemàtiques?

Podem trobar molts motius per ensenyar matemàtiques, però ens centrarem en els cinc següents.

### a) El món ha evolucionat d'analògic a digital

En una entrevista, Josep Baselga, quan era director científic de l'Sloan Kettering Center, va explicar que en la recerca sobre el càncer cada vegada tenen més importància els coneixements de computació per tractar la gran quantitat de dades que s'obtenen i, d'aquestes, seleccionar les que són importants. Separar les dades bones de les dolentes. Va explicar que el tractament de les dades permet saber quin és el millor tractament que es pot oferir en cadascun dels casos amb l'objectiu de prendre les millors decisions. I va especificar que en cap cas es pot oblidar el factor humà i un dels aspectes que té més relació amb ell: la comunicació.

### b) Els treballs que demana la societat són cada vegada més tècnics

El món laboral també està canviant: totes les persones han de mostrar habilitat per aprendre coses i resoldre problemes, així com tenir un pensament lògic i estructurat, aspectes en els quals l'aprenentatge de les matemàtiques és fonamental i crea una base aplicable a qualsevol camp de treball.

### c) Importància de les matemàtiques en la nostra vida quotidiana

Un dels aspectes que ha fet palès l'informe del Programa internacional per a l'avaluació d'estudiants (PISA), que elabora l'Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic (OCDE), és la importància de l'alfabetització matemàtica de les persones, la capacitat que tots hem de tenir per utilitzar les matemàtiques per a la vida diària i per resoldre problemes. Les persones han de ser capaces d'entendre informacions diverses i d'analitzar-les críticament. Podem veure'n un exemple en els dos gràfics següents:

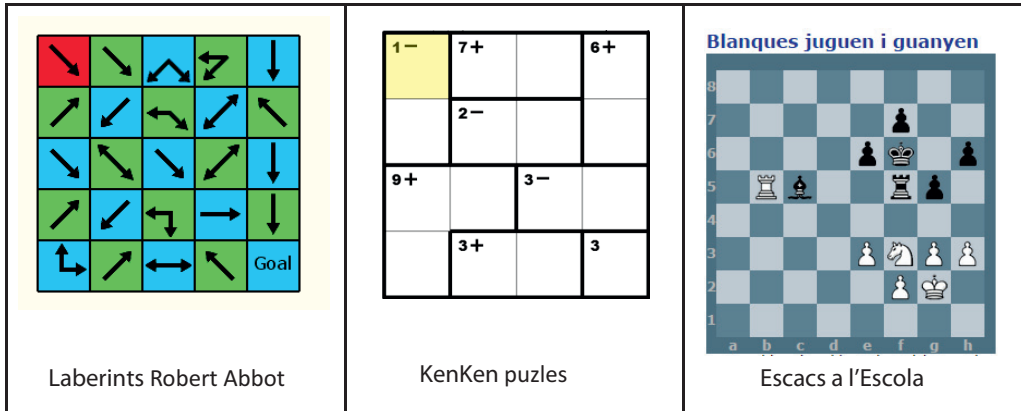


Els dos gràfics mostren la mateixa informació, el descens de l'atur, però la manera de mostrar-ho és absolutament diferent. Què mostra cadascun d'ells? Quin missatge és el que volen

transmetre? Quin és correcte i quin no? L'ensenyament de les matemàtiques ha de permetre respondre a les preguntes anteriors i prendre bones decisions a partir d'elles.

*d) El raonament lògic i, també, l'entreteniment*

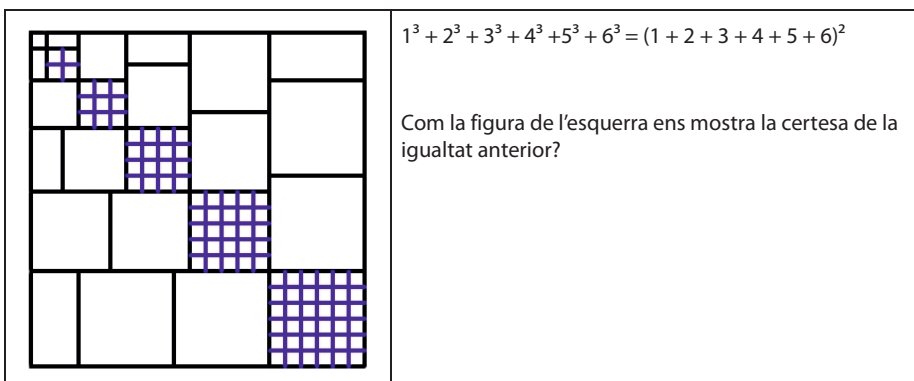
Una part important del temps la passem jugant, i en aquests jocs utilitzem el raonament lògic. Tant és així que en el seu disseny i la seva creació s'utilitzen molts recursos matemàtics. I no només hem de pensar en els jocs d'ordinador, sinó també en els jocs més clàssics: laberints, puzles diversos, etc. Vegeu-ne uns exemples:



Hi trobem els laberints dissenyats pel creador de jocs Robert Abbot, els puzles KenKen, variant dels sudokus composta per quadrats màgics amb operacions aritmètiques, i un dels jocs més antics, els escacs.

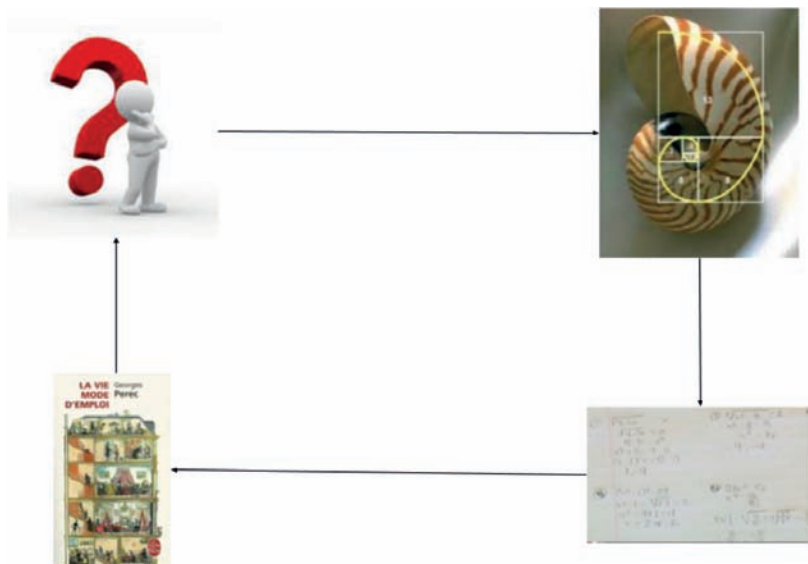
*e) Estètica que ens mostren*

Les matemàtiques ens mostren una estètica que moltes vegades connecta amb altres camps. Podem parlar de la seva relació amb l'art: pensem en Mondrian i els seus quadres, o en els vídeos de Cristóbal Vila que relacionen les matemàtiques amb la natura; o en les demostracions visuals, com la següent:



## 2. Quines matemàtiques cal ensenyar?

Les matemàtiques que cal que els nostres estudiants aprenguin han d'estar fonamentades en el procés de matematització, molt relacionat amb la resolució de problemes. Aquest procés consta de quatre fases:



Les quatre fases són: fer-nos preguntes i plantejar-nos problemes, transformar la situació en una situació matemàtica, realitzar la tasca matemàtica que calgui per resoldre la situació matemàtica, fer la traducció a la situació real i comprovar si la solució matemàtica s'adapta a la situació real. En cas contrari, cal revisar el procés i tornar a començar.

Aprofundim una mica en aquests aspectes:

### a) Formular preguntes i plantejar problemes

Les matemàtiques, i, en general, la ciència, comencen a partir de la idea de fer-se bones preguntes, preguntes que ens facin pensar sobre situacions diverses. Quines poden ser les bones preguntes? En una entrada del bloc Marro de Nou es proposen algunes idees que ens poden ajudar a formular-les: <https://lluismora.blogspot.com/2019/05/formular-preguntes.html>. Han de ser preguntes obertes i curtes, en funció del tipus de resposta tenen una estructura determinada, cal evitar el perquè i les preguntes no han de jutjar. En podem trobar exemples molt interessants en el blog del VídeoMat: quin és el nom més habitual a la meua escola?, com es compra la compra? o quants grans de sorra hi ha en una platja mitjana?

A partir de les preguntes podem plantejar-nos problemes. Cal entendre que no totes les preguntes es poden respondre matemàticament: caldrà seleccionar aquelles en què les matemàtiques ens seran d'ajuda.

### b) *Traslladar la situació al món matemàtic*

Un cop feta la pregunta i plantejat el problema, caldrà traslladar la situació real al món matemàtic. Buscar la millor representació per ajudar-nos a treballar. Aquí ens cal tenir molt clar quins són els models matemàtics i com els podem utilitzar per representar situacions diverses. Pensem, per exemple, en els problemes de recorreguts i en com es poden representar matemàticament amb els camins hamiltonians de la teoria de grafs.

### c) *Treballar la situació matemàtica fent els càlculs que calguin o utilitzant les estratègies que considerem convenients*

Haurem de tenir les eines necessàries per fer els càlculs mentalment o utilitzant la tecnologia que escaigui. En aquest apartat caldrà entendre molt bé i dominar els algorismes de càlcul. En el blog del Calaix + ie es fa una descripció i una explicació molt interessant i necessària de molts dels algorismes que utilitzem habitualment en els nostres càlculs. <https://calaix2.blogspot.com/search?q=algorismes>

### d) *Fer la translació a la situació inicial. Haurem contestat a la pregunta o resolt el problema en el món matemàtic*

Un exemple d'activitats que permeten desenvolupar aquesta estructura de treball seria el següent problema, proposat en el quadern de competències bàsiques de l'àmbit de matemàtiques del Departament d'Ensenyament:

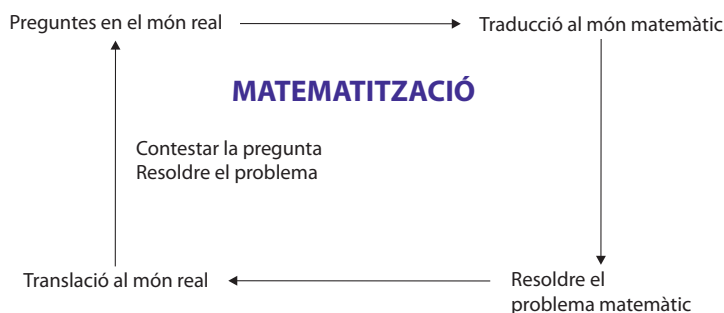
Aquest estiu volem anar a casa de l'àvia, que viu a 1.450 km de casa nostra. La mare diu que podem fer uns 250 km cada dia, màxim 300. M'ha preguntat quin dia arribarem si sortim dilluns al matí a primera hora.

He demanat ajuda als meus amics i han fet això:

- Emma  $1.450 : 250 = 5,8$
- Joan  $1.450 : 300 = 4,833$
- Rita  $1.450 : 290 = 5$
- L'Òscar m'ha dit que tardarem tres dies.

Quina resposta li puc donar a la meva mare i com l'hi explico?

Finalitzem aquest apartat amb un gràfic més informatiu del procés de matematització:



### 3. Idees per construir un procés d'ensenyament-aprenentatge

En aquesta secció mostrarem amb exemples vuit aspectes que hem de tenir en compte a l'hora de dissenyar el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques.

#### 1. *Ambient de resolució de problemes*

Per tal de crear aquest ambient cal conèixer els recursos dels quals disposen els estudiants, recursos que poden ser certs o erronis. L'ús de preguntes ens ajudarà a adquirir aquest coneixement, i també la informació que rebem de cursos anteriors. Aquest darrer aspecte no l'hem d'oblidar ni de menystenir. Caldrà facilitar les intervencions dels estudiants, de tots, per tal de conèixer els errors que cometem, les seves opinions i, així, poder establir mecanismes de correcció.

Les idees preconcebudes que acostumen a portar en la seva motxilla i que caldrà reconduir acostumen a ser:

- a) Els problemes matemàtics tenen una única resposta.
- b) Només hi ha una manera correcta de resoldre els problemes, i és la que es va explicar a classe.
- c) L'activitat matemàtica es fa en solitari i en silenci, sense comunicar-se amb els companys.
- d) Els estudiants normals no poden entendre les matemàtiques, només han de memoritzar-les i aplicar les normes.

Per tal de crear l'ambient, haurem d'afavorir el treball en grup, així podran aprendre amb altres i dels altres; donar temps suficient a tots els estudiants per realitzar les tasques; utilitzar diversos recursos, materials i tecnologia; ajudar els estudiants a construir els seus problemes i, per acabar, no ajudar gaire, és a dir, evitar la tendència que podem tenir de voler avançar etapes donant massa pistes als estudiants.

#### 2. *Experimentar i preguntar*

Per experimentar cal ajudar els estudiants a formular-se preguntes. Aquest és un aspecte que no s'ha treballat gaire. Els llibres de text estan farcits de preguntes que els estudiants han de respondre, però és molt més ric un ensenyament que parteix de preguntes que s'hagin formulat els estudiants. I, per tal que puguin fer-ho, cal introduir la creació de preguntes en les nostres classes, amb molt suport. És un coneixement fonamental. Després caldrà experimentar per tal de poder donar resposta a les preguntes que s'hagin formulat; preguntes que, òbviament, ens interessa que es puguin respondre matemàticament.

Podem trobar molts recursos que ens ajudin en aquesta tasca, però n'esmentarem només tres:

- a) Problemes en tres actes, de Dan Meyer.
- b) El web PuntMat, de David Barba, Cecilia Calvo i Ana Cerezo.
- c) El concurs VídeoMat.

### 3. Contextos

Les classes de matemàtiques han de mostrar-les interactuant en diferents àmbits. Aquests entorns haurien d'incloure situacions:

- de l'entorn més immediat a l'estudiant, el més proper,
- de rellevància social i/o que tinguin relació amb altres àmbits de coneixement,
- lúdiques, relacionades amb jocs i entreteniments,
- històriques, on es mostrin les matemàtiques d'ahir i la seva evolució en relació amb un context social,
- científiques, on les matemàtiques apareguin com a àmbit propi de coneixement.

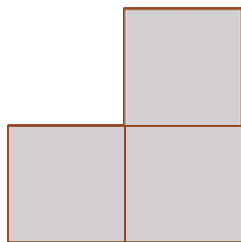
### 4. Raonar, argumentar i contrastar

Com hem comentat anteriorment, el procés de matematització comença quan ens fem preguntes sobre situacions. Per poder construir les preguntes i després poder-les respondre, ens cal entendre les situacions adequadament per, primer, trobar la idea fonamental que porten associades. Un cop l'haguem trobat, ens caldrà determinar o identificar la seva millor representació matemàtica, que haurem d'explicar i justificar. El mateix passarà en el tram final del procés, quan s'hagi de fer la traducció de la solució del model matemàtic a la situació real. Podem ressaltar la importància de la creativitat en tot aquest procés.

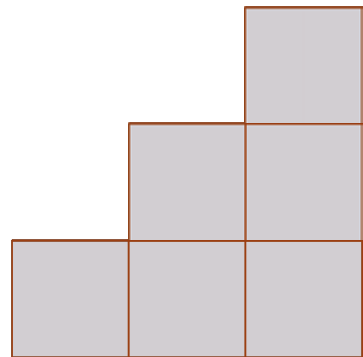
Troblem un exemple d'això que hem dit en l'activitat següent:



**Figura 1**



**Figura 2**



**Figura 3**

Les figures anteriors estan construïdes amb escuradents.

- Quants quadrats hi ha en la figura 4?
- Quants escuradents necessitarem per construir-la?
- Quin és el seu perímetre?
- I en la figura 10?

Les tres primeres preguntes ens ajuden a trobar la idea fonamental en la construcció de les tres figures: veure quin és el patró per tal de poder construir la figura següent. A partir d'aquest coneixement podem argumentar i contrastar la resposta per a l'activitat *d*.

En aquest procés ens ajudaran molt les eines matemàtiques; en aquest cas, les taules. Si anotem els resultats del que observem en una taula com la següent, els tindrem ordenats i ens serà molt més fàcil poder determinar aquest patró fonamental de la situació. Aquesta tasca, determinar patrons, segons Marcus Du Sautoy, és la tasca fonamental dels matemàtics i –m’atreviria a afegir– dels científics en general.

Figura	Nre. de quadrats	Nre. d'escuradents	Perímetre
1	1	4	4
2	3	10	
3	6		
4			
5			

### 5. Blocs de contingut

Cal procurar que els cinc blocs de contingut presents en el currículum: numeració i càlcul, relació i canvi, espai i forma, mesura, i dades i atzar, tinguin un pes equilibrat, tant pel que fa a la seva presència a les aules com pel que fa a la manera de treballar-los. Sense oblidar les importants connexions que s'estableixen entre ells: no s'haurien de mostrar com blocs de contingut deslligats, sinó que se n'hauria de donar una visió interconnectada. L'activitat de l'apartat anterior en podria ser un exemple, atès que treballa diversos blocs de contingut al mateix temps: relació i canvi, espai i forma i mesura serien els més evidents, però l'ús que es fa de les taules ens permet introduir situacions del bloc de dades i atzar.

### 6. Diversitat de recursos

Sovint davant d'una dificultat es proposa la repetició, com si repetint s'aprengués. Repetir pot ajudar a automatitzar i això pot ser bo si hi ha una bona comprensió. Si no es comprèn, en canvi, repetir no serveix per a res: cal buscar altres camins, esbrinar a què es deu la dificultat i mirar d'oferir recursos per superar-la.

Cal defensar l'ús de material de manipulació en tots els nivells educatius. Aquest material ajuda a formar els models, tan importants en la resolució de problemes. El seu ús és fonamental per al viatge que fan els nostres estudiants cap a l'abstracció, sense oblidar la mirada matemàtica que tot professor ha d'incorporar a les tasques i els materials amb què treballa.

Cal aportar combinacions d'activitats que integrin recursos diversos: TIC, materials de manipulació, contes i relats, jocs, treballs de camp...



Poden ser exemples d'aquests materials els diversos tipus de tangrams, els policubs, les fotografies i els vídeos, el web del concurs VídeoMat o els geoplans, per exemple.

### 7. Comunicar i compartir el treball matemàtic

Molts docents, de tots els nivells educatius, elaboren molt material perquè els estudiants treballin a les seves classes, i és un material excel·lent. L'ARC, que n'és plena, n'és un exemple, però, a banda, cal tenir en compte dos aspectes que són molt importants:

- a) Cal donar a conèixer a la resta de la comunitat educativa el que fem com a docents: presencialment en congressos, en les jornades de les associacions de docents de matemàtiques o bé en les eines de comunicació de la comunitat, les revistes *SUMA* i *NouBiaix*.
- b) Cal donar a conèixer la feina que fan els nostres estudiants: a les famílies, a la resta d'estudiants.

### 8. Avaluar coherentment

Finalitzarem aquest recull d'idees al voltant de l'ensenyament de les matemàtiques amb el tema de l'avaluació, la qual ha de ser coherent amb el procés d'ensenyament-aprenentatge que portem a la pràctica a l'aula. Aquesta avaluació ens ha de ser útil per millorar l'aprenentatge que realitzen els nostres estudiants, però també ens ha de servir per millorar el nostre procés d'ensenyament. En aquest sentit, és interessant assenyalar que els mètodes d'avaluació haurien de:

- a) Permetre als estudiants revelar el que saben, i no el que no saben.
- b) Utilitzar múltiples formats, d'acord amb els processos — dimensions en el currículum— que ens porten a fer matemàtiques, la resolució de problemes, el raonament i la prova, les connexions i la comunicació i representació. Cal elaborar, doncs, activitats que ens permetin detectar el grau de destresa dels nostres estudiants en cadascun d'aquests processos. I això implica utilitzar formats d'activitats diversos.
- c) Posar en pràctica els objectius dels plans d'estudi. En el nostre cas, estaríem parlant de les competències associades a cada dimensió d'acord amb els continguts conceptuals que treballem en cada curs. Els estudiants han de ser conscients d'aquests objectius; en un llenguatge proper a ells, han de conèixer el que s'espera d'ells i el que no.
- d) Incorporar activitats. Les activitats de recollida d'informació, d'avaluació haurien d'incorporar activitats d'identificació i de reproducció de coneixements en diferents nivells de dificultat, activitats que permetin als estudiants comparar-los i connectar-los i, finalment i en menor mesura, activitats que permetin transformar i reflexionar sobre els coneixements adquirits i la manera d'adquirir-los.
- e) El procés d'avaluació ha d'estar obert als estudiants i és molt important que vagin rebent una realimentació freqüent de l'estat del seu aprenentatge.

I un bon punt de partida és disposar altes expectatives en les possibilitats dels estudiants.

## 4. Síntesi

Els estudiants han de ser conscients de la importància de l'aprenentatge de les matemàtiques en la societat actual, i no només des del punt de vista laboral, sinó també des d'altres punts de vista que les enriqueixen com a ciència i permeten el seu ús en múltiples disciplines. I que l'objectiu fonamental de les matemàtiques demana tenir la capacitat de resoldre problemes o, si més no, conèixer les seves estratègies de resolució.

Ensenyar i aprendre matemàtiques implica conèixer i desenvolupar unes dinàmiques de treball que conduïxin estudiants i professors a poder desenvolupar la seva tasca en un ambient de treball adequat on predominin les preguntes, diverses, sobre situacions i contextos. És important que tinguin temps de raonar, argumentar i contrastar a classe, que s'agafin el temps necessari per fer les coses. Les connexions ens permeten poder gestionar bé el temps. I atès que la diversitat d'estudiants i docents és gran, cal utilitzar una diversitat d'estratègies, eines i idees en la nostra metodologia d'ensenyament-aprenentatge. Sense una avaluació coherent amb la manera de treballar, no aconseguirem millorar els resultats dels estudiants i la nostra pràctica docent. El que hem dit referent al procés d'ensenyament-aprenentatge també és vàlid per a l'avaluació i per a la recollida d'informació que ens serà útil en la millora dels processos i dels resultats dels estudiants.

I, finalment, però cosa no menys important, cal donar a conèixer la bona tasca que s'està fent als nostres centres. Cal donar a conèixer i compartir les tasques i les bones activitats que desenvolupem com a docents i també els bons treballs que fan els nostres estudiants.

## 5. Referències

[www.xlsemanal.com/conocer/salud/20170409/josep-baselga-las-cifras-del-cancer-bestiales-no-van-bajar-superpreocupante.html](http://www.xlsemanal.com/conocer/salud/20170409/josep-baselga-las-cifras-del-cancer-bestiales-no-van-bajar-superpreocupante.html)

Laberints Robert Abbot: [www.logicmazes.com/alice.html](http://www.logicmazes.com/alice.html)

KenKen puzzles: [www.kenken.com/](http://www.kenken.com/)

Escacs a l'Escola: [www.escaquejant.com/](http://www.escaquejant.com/)

Cristóbal Vila: ETÉREA FILMS: <https://etereaestudios.com/>

Marro de Nou. Bones preguntes: <https://lluismora.blogspot.com/2019/05/formular-preguntes.html>

VídeoMat: [www.videomat.cat/](http://www.videomat.cat/)

Algorismes: <https://calaix2.blogspot.com/search?q=algorismes>

Competències bàsiques de l'àmbit de les matemàtiques: <http://apliense.xtec.cat/arc/competencies-basiques>

Problemes en tres actes: <https://blog.mrmeyer.com/2011/the-three-acts-of-a-mathematical-story/>

Blog PuntMat: <http://puntmat.blogspot.com.es/2014/07/activitats-en-3-actes.html>