

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu

Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

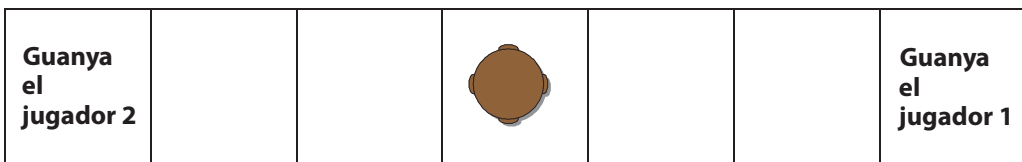


Els que em seguiu coneixeu la meva afició als jocs i la seva relació amb les matemàtiques. L'anàlisi d'un joc és sovint un bon problema de matemàtiques i algunes vegades, com veurem avui, de força dificultat. Aquest anar i venir, dels jocs a les matemàtiques i de les matemàtiques als jocs, és un bon exercici que pot ser moltes vegades matemàticament productiu i, en general, altament satisfactori. Per totes aquestes raons, dedicaré la secció d'avui a plantejar els quatre darrers petits jocs d'estratègia que he conegut, procedents de fonts diferents.

► **Problema 1. Footsetps, o qui estira millora la corda**

Brain Games és el títol del llibre de David Pritchard que em va donar a conèixer fa poc temps l'amic Oriol Comas, que l'acabava de descobrir. Una vegada llegit, a tots dos ens va venir al cap la mateixa pregunta: com pot ser que se'ns hagués escapat aquesta petita joia, que ja té trenta-set anys? Començarem amb un exemple d'un joc per a dos jugadors proposat en aquest llibre.

En un tauler de set caselles posem una única fitxa al centre. Un jugador, quan guanyi el seu torn, mourà la fitxa cap a la dreta, i l'altre mourà la mateixa fitxa cap a l'esquerra. El jugador que aconsegueixi portar la fitxa a l'extrem del seu costat, és a dir, a una distància 3 del centre, serà el guanyador de la partida. Dit d'una altra manera, per guanyar una partida cal guanyar tres torns més que l'altre jugador.



Quan comença el joc, cada jugador té trenta punts. Les jugades són simultànies, és a dir, els dos jugadors diuen, al mateix moment, els punts que inverteix cadascun d'ells en aquell torn (mínim un punt i màxim tots els punts que tingui en aquell moment). El jugador que ha

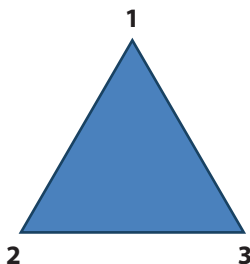
invertit més punts en el torn guanya la jugada i avança la fitxa una casella cap al seu costat. La partida continua amb els punts que li queden a cada jugador, una vegada restats els punts invertits en la jugada anterior. En cas d'empat, la fitxa no es mou. Si un jugador esgota els punts, l'altre pot continuar jugant (ara amb un sol punt ja guanya el torn). Si els dos acaben els punts sense guanyar la partida, es pot decidir que qui té la fitxa més a prop de l'objectiu guanya mig punt, i s'entén que guanyar una partida val un punt. Qui arribi a cinc punts guanya la ronda.

Quan hagueu practicat una mica el joc, ben segur que us fareu la pregunta: com s'ha de jugar per guanyar? Aquí no és pertinent preguntar-se quin dels dos jugadors té avantatge, ja que juguen simultàniament. Aquest és el punt clau: no es pot aplicar el conegut teorema de la teoria de jocs segons el qual, en un joc finit per a dos jugadors, sense intervenció de l'atzar i en el qual no es pot fer taules, hi ha una estratègia guanyadora per a un dels dos jugadors. Aquí més aviat sembla el contrari: si apliquem una estratègia fàcil d'identificar per l'altre jugador, aquest no trigarà a guanyar-nos... Sembla, doncs, que el que cal és no aplicar cap estratègia (jugar a l'atzar?), però aviat veureu que tampoc no és així.

Aquest és el tipus de joc que interessa a la teoria de jocs, perquè esdevé una bona situació per aprendre a *prendre decisions* sense conèixer el comportament immediat de l'altra part. Si hi penseu una estona, probablement trobareu idees interessants, no per guanyar sempre, però sí per millorar les vostres jugades i potser per guanyar més de la meitat de les vegades, que és una manera de guanyar.

► Problema/joc 2. Movent-se per un polígon per arribar a 23

Es tracta d'un joc d'estratègia per a dos jugadors que anomeno, a falta d'un nom més original, arribar a 23, i que em va fer conèixer, fa poc temps, l'amic Xavier Valls. Partim d'un triangle amb els vèrtexs numerats amb els nombres 1, 2 i 3. El primer jugador posa una fitxa en un vèrtex del triangle (el que vulgui) i suma els punts indicats en el vèrtex. El segon jugador mou la fitxa a un altre vèrtex i suma els punts indicats. Així, van jugant alternativament (sempre és obligat moure la fitxa a un altre vèrtex). El primer jugador que arribi a quinze, guanya la partida. Si un jugador no pot jugar perquè es veu obligat a superar el nombre de punts als quals cal arribar, perd la partida. El joc és molt semblant a tenir una pila de fitxes i retirar-ne alternativament d'una a tres, però amb la diferència que si un jugador n'ha retirat una certa quantitat, l'altre en la següent jugada no pot retirar aquesta mateixa quantitat.



Una vegada haureu resolt el joc (aquest cas no presenta gaire dificultat i serveix per preparar el següent), canvieu el tauler i dibuixeu un pentàgon (amb els vèrtexs numerats de l'1 a 5). Es juga de la mateixa manera i guanya el jugador que arriba a vint-i-tres punts. Trobar

l'estratègia guanyadora en aquest cas és força més entretingut que abans, com podreu comprovar. Penseu per què no us proposo jugar amb un tauler en forma de quadrat, o de qualsevol polígon amb un nombre parell de vèrtexs. I si voleu dedicar-hi estona, ara la generalització no és gens senzilla, penseu què passaria amb altres taulers amb un nombre major, però sempre senar, de vèrtexs.

Encara un altre joc similar consisteix a jugar amb un dau. El primer jugador indica els punts de la seva jugada i deixa el dau sobre la taula de manera que el nombre de la cara superior indica els punts. L'altre jugador mou el dau 90° i el nombre de punts de la seva jugada queda indicat per la cara superior. I així successivament, fins a arribar a la quantitat establerta.

Observeu que, en el cas del dau, un jugador no pot jugar el mateix nombre de punts que l'anterior, ni tampoc el complementari fins a set (ja que en el dau les cares oposades sumen set), la qual cosa complica considerablement la recerca de l'estratègia guanyadora. Tanmateix, aquesta hi és i ben segur que la sabreu trobar.

► Problema/joc 3. *Traffic light* o el joc dels semàfors

Aquest és un interessant joc d'estratègia per a dos jugadors, com els anteriors, que em va ensenyar Sergi Belmonte fa poc temps i que pertany a aquesta gran col·lecció de jocs que anomenem d'alineació. Tots aquests jocs tenen per objectiu alinear, és a dir, disposar seguides sobre una recta, tres, quatre, cinc o, fins i tot, sis fitxes d'un mateix color. El tic-tac-toe, el tres en ratlla, el connecta 4, el go bang, el pente, el marro (de sis, de nou o de dotze), el six o el quarto, són alguns dels jocs d'aquesta tipologia.

El nom del joc és el semàfor, pel fet que combina fitxes verdes, grogues i vermelles i que les primeres es canvien per les segones i aquestes per les terceres. En un tauler de nou caselles quadrades, formant un quadrat de 3×3 , dos jugadors poden realitzar en el seu torn una de les tres accions següents:

- Col·locar una fitxa verda en una casella buida qualsevol.
- Canviar una fitxa verda ja col·locada per una de groga.
- Canviar una fitxa groga ja col·locada per una de vermella.

Quan un jugador, en fer la seva jugada, aconsegueix que tres fitxes d'un mateix color estiguin alineades, guanya la partida. Sabríeu trobar una estratègia que permeti guanyar a un dels dos (el primer o el segon) jugadors?

Per a un tauler de 3×3 , trobar l'estratègia no és gaire difícil. Ara bé, si canviem el tauler i el fem una mica més gran, per exemple un rectangle de 3×4 , la cosa es complica molt. Quan el tauler es fa gran, cal recordar que l'objectiu és alinear tres fitxes seguides, és a dir, sense deixar cap espai entre elles.

► Problema/joc 4. Un reparteix i l'altre tria

El darrer joc d'avui torna a ser un joc d'estratègia per a dos jugadors i el va proposar el divulgador de les matemàtiques Eduardo Sáenz de Cabezón en l'excel·lent conferència que va impartir al CosmoCaixa el passat mes de juny amb motiu de la clausura del curs d'Estalmat, en

la qual vam celebrar els quinze anys d'existència d'aquest curs per a joves talents matemàtics a Catalunya.

El joc és una possible simulació del conegut problema sobre com s'ha de repartir una certa quantitat, dividida en parts diferents, entre dues persones, de manera que totes dues intenten aconseguir la part més gran. Es tracta d'un joc d'estratègia per a dos jugadors que es pot enunciar de la manera següent: fixem una quantitat de fitxes senar més gran que sis, per exemple vint-i-nou. Un dels jugadors distribueix com vol aquesta quantitat en un tauler de sis caselles, de manera que en totes hi hagi almenys una fitxa. Per exemple:

4	5	4	3	7	6
---	---	---	---	---	---

L'altre jugador comença a treure fitxes: tria una de les dues caselles dels extrems i agafa totes les fitxes de la casella (és a dir, pot agafar 4 fitxes –casella de l'esquerra– o 6 fitxes –casella de la dreta–). Ara juga l'altre jugador, que agafa totes les fitxes d'una de les dues caselles dels extrems (tria entre 5 o 6 fitxes, si el primer n'ha agafat 4, o bé 4 o 7, si el primer n'ha agafat 6). El joc continua fins que s'acaben les fitxes i el jugador que obté més fitxes és el guanyador del joc.

Sabríeu trobar una estratègia guanyadora per al jugador que comença a agafar fitxes, sigui quina sigui la distribució de les fitxes feta per l'altre jugador? D'entrada sorprèn una mica que hi hagi una estratègia que no depengui de la distribució, és a dir, que valgui per a qualsevol cas, però aviat veureu que és així. Quan la trobeu, entendreu per què a l'inici hem dit que el nombre total de fitxes havia de ser senar i també per què el nombre de caselles del tauler ha de ser parell.

Acabaré l'article d'avui animant-vos a consultar un web en el qual he estat participant, <http://juegosydesafiosmaticos.com>, de l'editorial Gedisa, on, a més de presentar una col·lecció de llibres de recreacions matemàtiques amb alguns dels autors més grans del segle XX, com Gardner, Smullyan o Kordemsky, i en la qual he publicat un dels meus llibres d'aquesta temàtica, *La magia de los números*, s'ofereixen continguts lliures sobre jocs, problemes, històries i aplicacions de les matemàtiques, i en la qual participen, entre d'altres, Joan Miralles, que s'ocupa de presentar la vida i l'obra d'alguns grans matemàtics, el grup SET, grup de jocs de l'Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques (ABEAM), que presenta fitxes de jocs i orientacions per portar-los a l'aula, i jo mateix, que redacto les altres dues seccions.

Bibliografia

Deulofeu, J. (2019). *La magia de los números*. Barcelona: Gedisa.

Kordemsky, B. (2019). *Los enigmas de Moscú*. Barcelona: Gedisa.

Pritchard, D. (1982). *Brain Games*. UK, Penguin.

