

## Papiroflèxia d'alguns mosaics de l'Alhambra de Granada

**Jaume Coll Guerrero**

CFA Rafael Farré (Molins de Rei)

Professor associat al Departament de Matemàtiques (UAB)

### 1. Mosaics i tessel·les

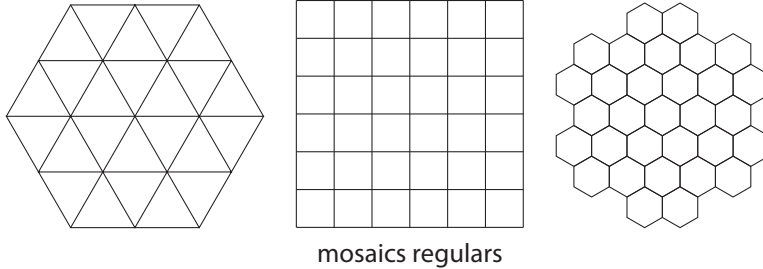
Els diferents motius dels mosaics de l'Alhambra de Granada són des de fa temps una font d'inspiració per a la creació artística i matemàtica. En aquest palau de la dinastia nassarita, construït entre els segles XIII i XV, es poden contemplar diferents motius geomètrics. Alguns d'aquests motius es coneixen amb un nom propi: ocellet nassarita, os nassarita, avió nassarita i ratpenat nassarita.

Però què és un mosaic? La seva etimologia ens diu que aquesta paraula prové del llatí *mosaicum opus*, és a dir, és una obra de les muses. Antigues civilitzacions, com la grega o romana, ja utilitzaven aquesta tècnica pictòrica per fer composicions decoratives amb petites peces de diferents colors i materials anomenades tessel·les. Molts d'aquests antics mosaics i altres de més moderns, com els que es poden veure en les obres modernistes d'Antoni Gaudí, tot i la seva bellesa, no tenen cap tipus de simetria. També existeixen mosaics que mostren simetries, com els de les voreres del passeig de Gràcia de Barcelona, fets amb rajoles hexagonals, o els del pati d'entrada de l'Institut d'Estudis Catalans, elaborats amb rajoles catalanes. Des d'un punt de vista matemàtic, definirem un *mosaic* o *tessel·lació* com una divisió del pla sense solapaments ni buits mitjançant una forma geomètrica anomenada tessel·la ( $T \subset \mathbb{R}^2$ ).

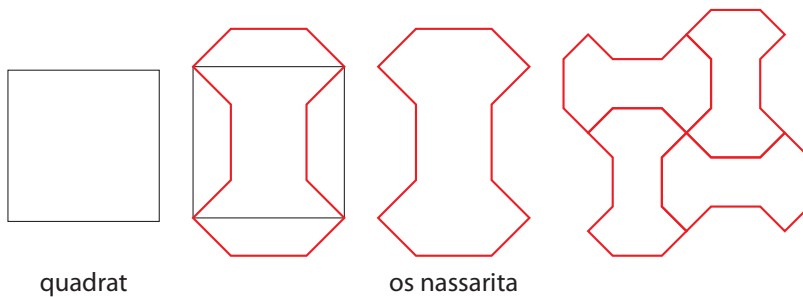
Per estudiar els mosaics respondrem a les preguntes següents: quins són els mosaics més simples?, com podem crear nous mosaics?, quants mosaics essencialment diferents existeixen?, com podem classificar els mosaics?

Els mosaics més simples, que anomenarem regulars, s'aconsegueixen prenent com a tessel·la bàsica tres tipus de polígons regulars: el triangle equilàter, el quadrat i l'hexàgon regular. Els mosaics regulars tenen simetries centrals o rotacionals de 60, 90 i 120 graus, respectivament,

així com diferents tipus de simetries axials en què els eixos de simetria formen entre si angles de 30, 45 i 60, graus respectivament.



Es poden aconseguir nous mosaics fent modificacions en els mosaics regulars. Aquesta observació va ser desenvolupada en les obres de l'artista neerlandès Maurits Cornelius Escher, que va quedar impressionat pels motius decoratius dels mosaics nassarites en la seva visita a l'Alhambra l'any 1936.



La tessella os nassarita es pot aconseguir a partir d'un quadrat. En dos costats oposats d'un quadrat seccionem un trapezi que tingui per base major el costat del quadrat, per alçada la quarta part de la longitud del costat del quadrat i angles interns de 45, 135, 135 i 45 graus, i unim per la part exterior del quadrat la base major d'aquests trapezis als altres dos costats del quadrat, com es mostra en la figura superior.

El teorema de Fedorov (1891) ens diu que tan sols existeixen disset tipus de mosaics essencialment diferents [6]. Els diferents tipus de mosaic venen descrits per disset grups de simetries. Aquests grups també es coneixen amb el nom de grups cristal·logràfics plans, perquè Fedorov els va trobar estudiant la manera en què cristal·litzen en la natura els minerals.

Els diferents grups cristal·logràfics  $G$  són certs subgrups del grup d'isometries del pla real, és a dir, del grup generat per totes les translacions, rotacions i reflexions.

$$G \subset Iso(\mathbb{R}^2)$$

El grup cristal·logràfic associat a una tessellació actua sobre el pla real  $\mathbb{R}^2$  i deixa invariant la tessellació. Per a qualsevol tessella  $T$  de la tessellació, existeix un subconjunt  $C$  del grup  $G$  que compleix:

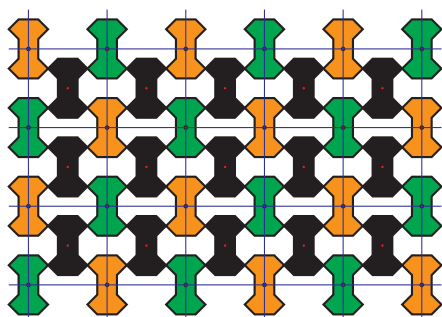
$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in C} g \cdot T$$

$$g \cdot \dot{T} \cap h \cdot \dot{T} = \emptyset, \quad \forall g, h \in C \subset G \subset Iso(\mathbb{R}^2)$$

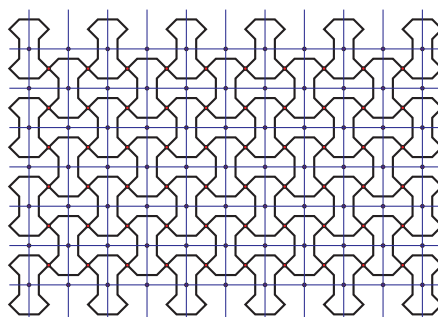
Existeixen diferents notacions equivalents per classificar els grups cristal·logràfics plans: Pólya, Conway, Fejes Thót-Cadwell, Niggli, Speiser, Shubinov-Koptsik, Wells-Bell, internacional llarga, etc. En la taula següent s'utilitza la notació internacional curta.

Angle mínim de rotació	Existeix alguna reflexió?			
	Sí		No	
$360^\circ/6 = 60^\circ$	p6m		p6	
$360^\circ/4 = 90^\circ$	Tots els centres de rotació estan sobre els eixos de reflexió?			
	Sí: p4m	No: p4g		
$360^\circ/3 = 120^\circ$	Tots els centres de rotació estan sobre els eixos de reflexió?			
	Sí: p31m	No: p3m1		
$360^\circ/2 = 180^\circ$	Existeixen reflexions amb eixos perpendiculars?			Existeix alguna reflexió amb lliscament?
	Sí		No	
	Tots els centres de rotació estan sobre els eixos de reflexió?			Sí: pgg
Sí: cmm	No: pmm			
$360^\circ/1 = 0^\circ$	Existeix alguna reflexió amb lliscament amb eix diferent d'un eix de reflexió?			Existeix alguna reflexió amb lliscament?
	Sí: cm	No: pm		Sí: pg

A l'Alhambra de Granada hi ha catorze dels disset tipus de mosaics, si es tenen en compte els colors [9], i els disset si no es tenen en compte els colors [8].



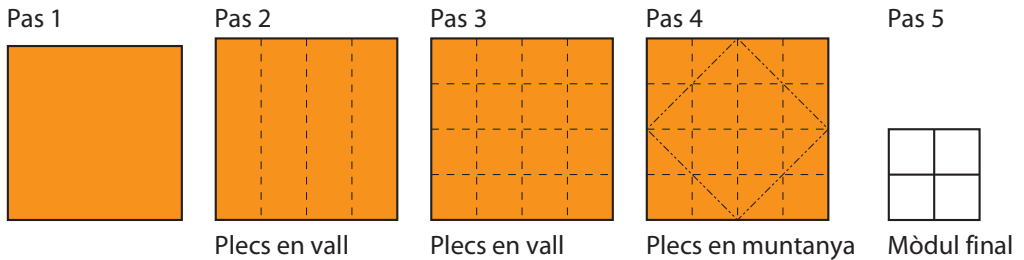
Grup cristal·logràfic cmm



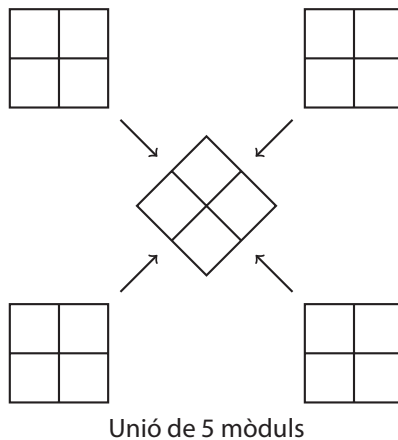
Grup cristal·logràfic p4g

## 2. Mosaics de paper

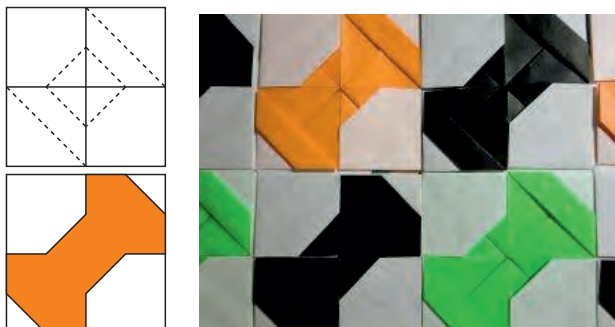
A continuació es descriu un mòdul de paper que permet fer mosaics. Aquest mòdul i les seves variants es coneixen amb el nom de variacions Froebel, perquè van ser utilitzades en el segle XIX pel pedagog alemany Frederic Fröbel en els *Kindergarten* (jardins d'infància).

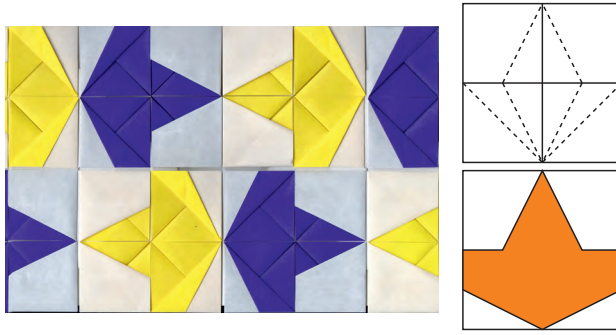


Per aconseguir diferents tipus de motius és necessari utilitzar un paper bicolor, com ara el paper de tipus kami (blanc - color). En el pas 1 comencem amb la cara de color al davant i la de color blanc al darrere; en el pas 2 pleguem verticalment en vall el paper per la meitat i per la quarta part; en el pas 3 fem el mateix que en el pas 2, però horitzontalment; en el pas 4 pleguem en muntanya els quatre vèrtexs del quadrat cap al centre, i en el pas 5 obtenim el mòdul final col·lapsant els quatre costats del quadrat cap a l'interior.

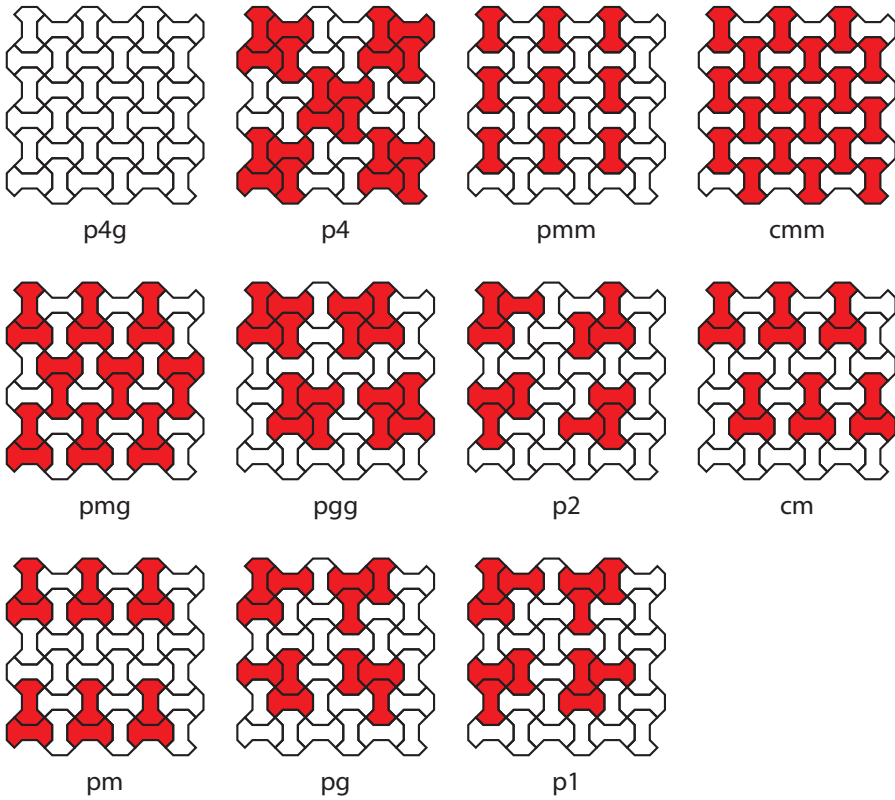


Per aconseguir els motius os nassarita i avió nassarita cal fer els plecs següents en el mòdul final:



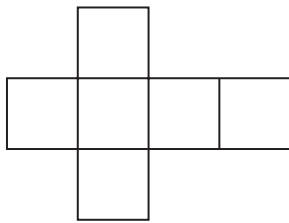


Combinant els colors en els mosaics fets amb la tessella de l'os nassarita es poden aconseguir onze de les disset configuracions dels grups cristal·logràfics.

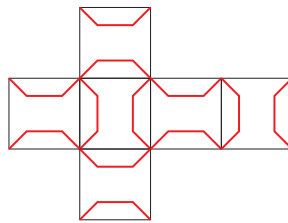


### 3. Tessel·lacions del cub

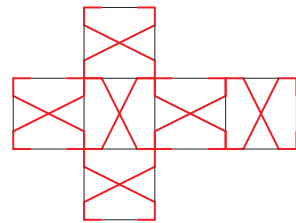
És clar que el desenvolupament pla del cub té sis quadrats; vist a l'inrevés, es pot pensar que el cub és un mosaic tridimensional format per sis tesselles quadrades. D'aquesta manera podem construir diferents tipus de mosaics cúbics fent modificacions en el quadrat llis inicial; per exemple, si considerem sis tesselles de l'os nassarita o de l'avió nassarita, es pot fer un mosaic cúbic tridimensional amb cadascun d'aquests motius.



Desenvolupament del cub

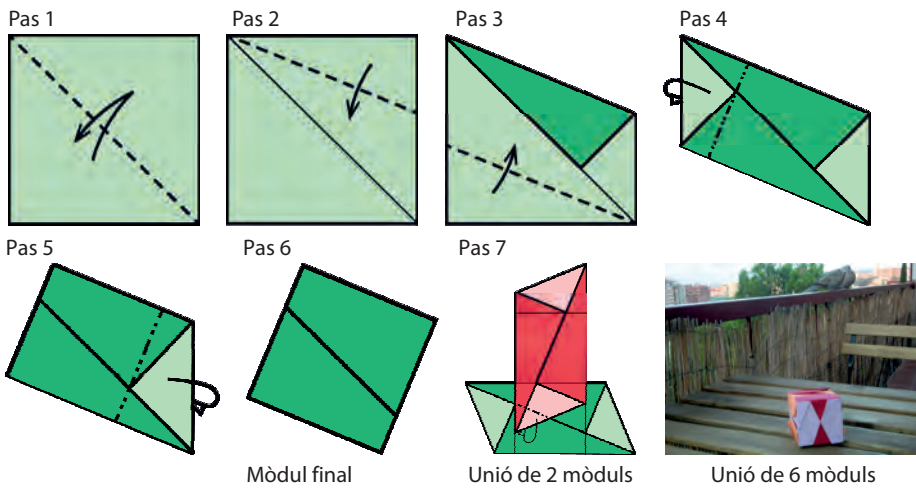


Desenvolupament del cub os nassarita

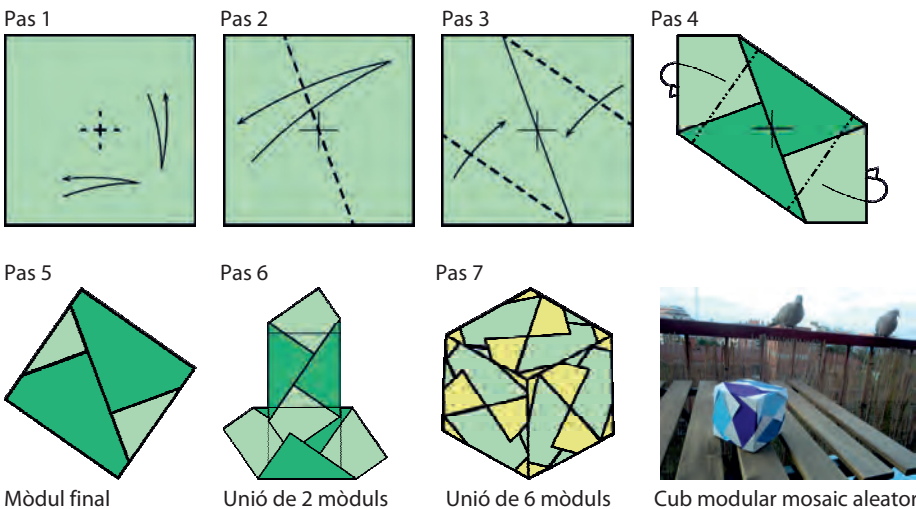


Desenvolupament del cub avió nassarita

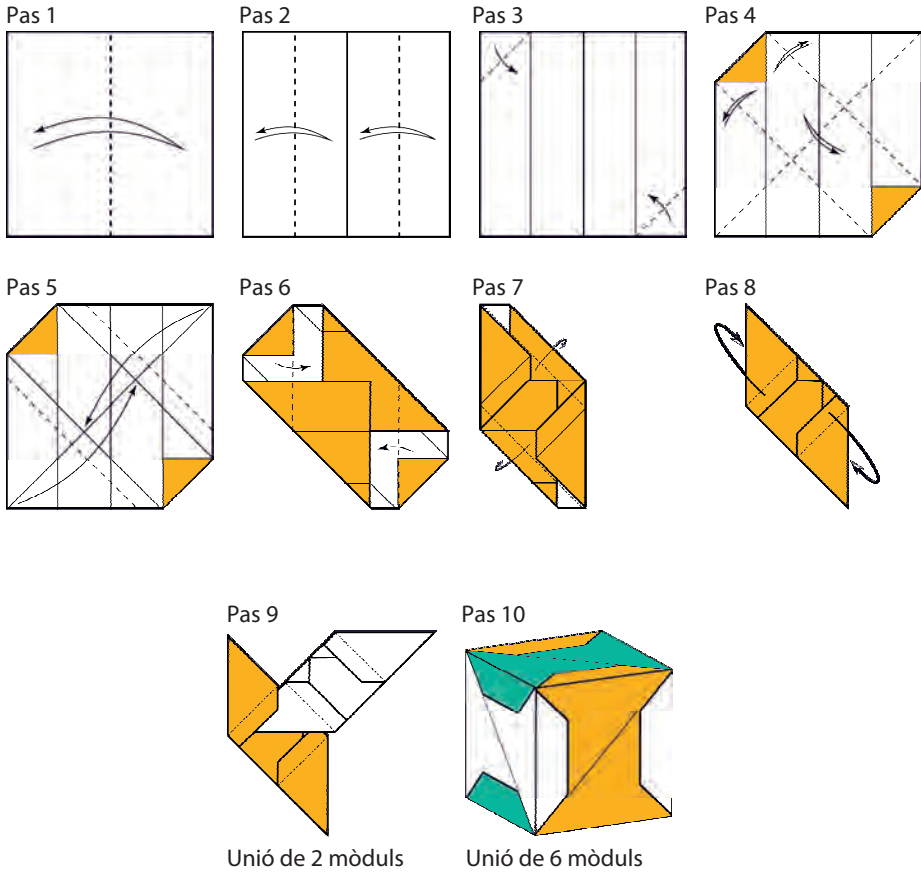
Es poden construir cubs amb els tres motius anteriors amb sis mòduls idèntics fent determinats plecs. El primer motiu, un quadrat lliure, correspon al cub de Mitsunobu Sonobe. El cub avió nassarita es pot fer amb els plecs següents:



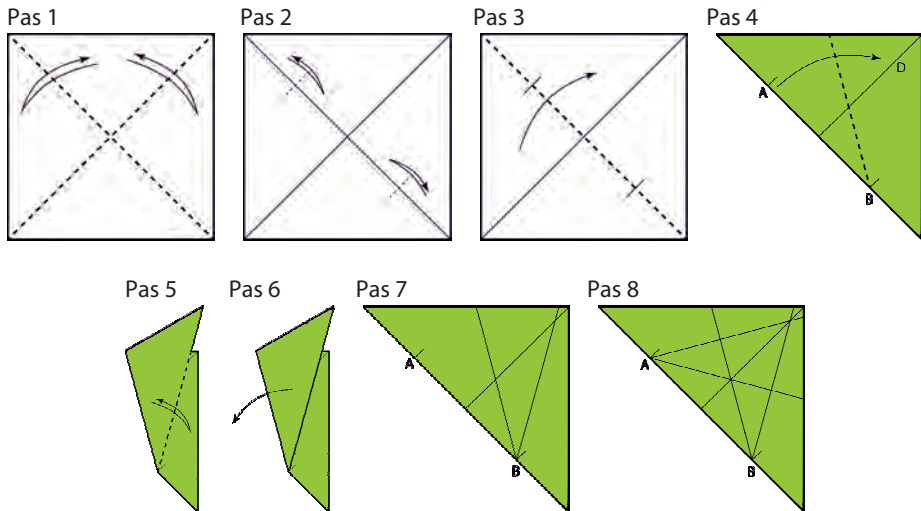
Si en la construcció anterior, en lloc de la diagonal, prenem un segment que passi pel centre del quadrat amb pendent aleatori  $m \in \mathbb{R}$ , aleshores obtenim una infinitud no numerable de motius.

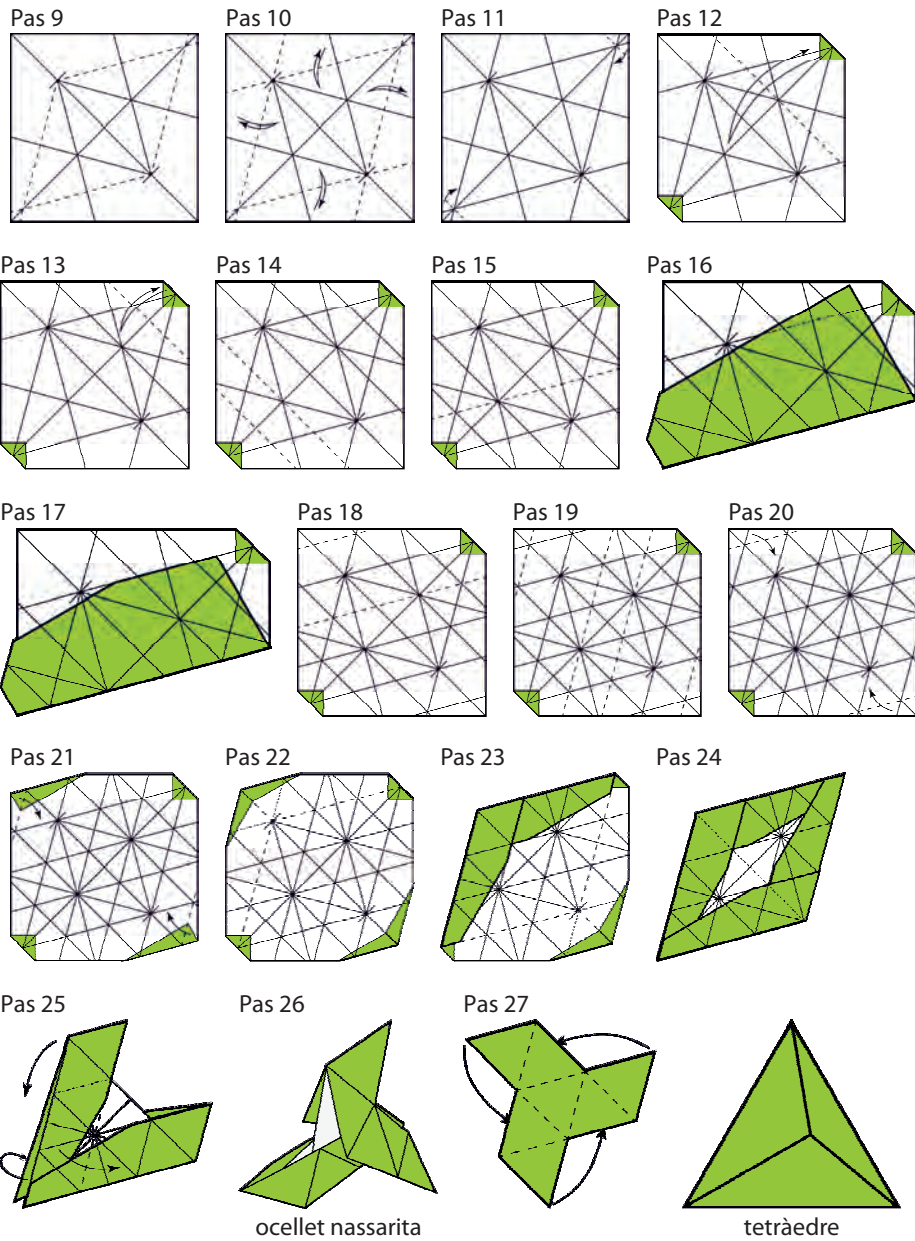


La tessell·lació del cub amb el motiu os nassarita es pot fer amb els plecs següents:



Finalitzem aquesta dissertació amb una figura no modular multiforme: la construcció d'un tetràedre obtingut mitjançant el col·lapse d'un ocellat nassarita tridimensional.





## Agraïments

A Minerva Ciruela per introduir-me en el món de l'origami, a en Josep Ramis per la seva correcció de català i a en Joan Sallas per convidar-me a exposar aquest article en els tallers de papiroflèxia del 4t-APLEC de Badalona.



## Bibliografia

- [1] Àlvarez, R. i Pujol, R. (1999). *L'altra geometria*, Casals.
- [2] Caboblanco, F.J. (1995). «Alhambra Star 2», *Das Diagramm*, 25, pàg. 46.
- [3] Coll, J. (2017). «Cubo mosaico avión nazarí. Cubo mosaico aleatorio», *Libro de la XX Convención Internacional de la AEP*. Santiago de Compostela, vol. 11.
- [4] Coll, J. (2018). «Pajarita nazarí y tetraedro». *Libro del encuentro de origami de Bogotá*.
- [5] Fernández, I.; Reyes, M.E. (2008). *Geometría con el hexágono y el octógono*, Granada: Proyecto Sur de Ediciones.
- [6] Fyodorov, Y. (1891). «Simmetrija na ploskosti». *Zapiski Imperatorskogo Sant-Petersburgskogo Mineralogicheskogo Obshchestva*, s. 2, 28, 245-291.
- [7] Gimeno, J. (2003). «Homenaje a la Alhambra (Estudio n° 2)». *Pajarita*, 84, pàg. 28.
- [8] Montesinos, J.M. (1987). *Classical Tessellations and Three-Manifolds*, Nova York: Springer.
- [9] Müller, E. (1946). «El estudio de ornamentos como aplicación de la teoría de grupos de orden finito», *Euclides* (Madrid), 6, pàg. 42-52.
- [10] Prüfer, J. (1930). *Federico Froebel*, Barcelona: Labor.

