Estimacions i tractament de l'error en el càlcul de Pi

Introduint el GeoGebra al laboratori de matemàtiques

Guillem Bonet Carbó i Manel Martínez Pascual
Associació Catalana de Geogebra

Introducció

En articles anteriors d'aquesta mateixa secció, el nostre company Pep Bujosa ens ha anat comentant diferents funcionalitats del GeoGebra. Hi ha mostrat també diferents idees per introduir el programa a l'aula, com ara exemples de miniaplicacions (*miniaplicacions*) concretes en els quals s'aprofita la potencialitat de càlcul del programa per visualitzar i treballar amb els alumnes diferents propietats matemàtiques.

En aquest article pretenem donar diferents idees per usar el GeoGebra a l'aula o, més precisament, al laboratori de matemàtiques. Volem que el nostre alumnat descobreixi el potencial del GeoGebra i l'utilitzi en les seves activitats d'experimentació matemàtica. Donarem idees per convertir-lo en el nostre aliat.

Per fer-ho ens centrarem en l'estudi de l'error en diferents temptatives d'investigació al voltant del nombre Pi. Utilitzarem el GeoGebra per afinar els errors de mesura i de càlcul.

Aproximant el nombre Pi: diferents exemples

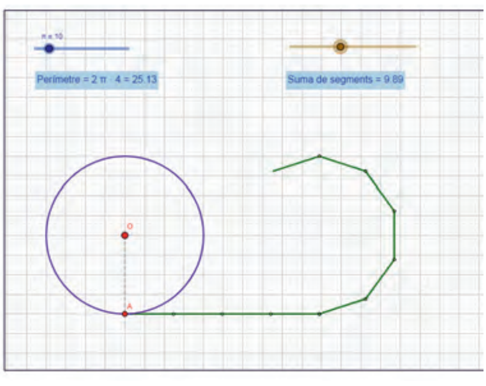
Referents històrics

Pi és un nombre que fascina i ha fascinat a la majoria dels matemàtics. Tant és així que, des dels inicis de la història de la matemàtica, els estudiosos més importants s'han dedicat a investigar sobre aquest nombre, que ja era descrit l'any 1600 aC al papir Rhind com a relació entre el perímetre i el diàmetre d'un cercle. Ràpidament es va iniciar una cursa entre tots els estudiosos per veure qui el podia definir amb més precisió. Al-Khwarizmi (s. IX dC) apuntava el següent sobre les aproximacions de Pi: «L'home pràctic usa 22/7 com a valor de Pi, el geòmetra usa el 3 i l'astrònom 3,1416».

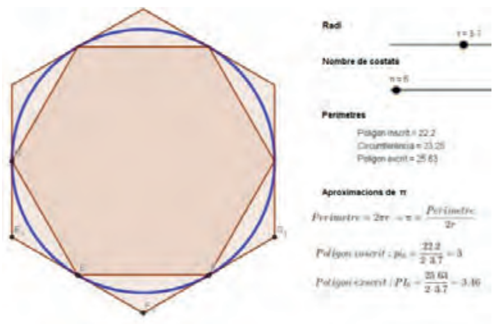
Molts anys abans que al-Khwarizmi fes aquesta categorització, Arquimedes (287-212 aC) va buscar un mètode recurrent per aproximar-se al nombre Pi a través de l'acotació de la circumferència per dos polígons, l'un inclòs i l'altre exclòs. Tant era el seu interès per trobar una bona aproximació a aquest nombre, que va arribar a fitar la longitud del cercle entre les longituds de dos polígons de 96 costats i, d'aquí, dividint pel diàmetre del cercle aconseguia dues bones fites del nombre Pi, l'una superior i l'altra inferior. Per tant, aconseguia afirmar que $223 / 71 < \pi < 22 / 7$ i podia prendre com a aproximació de Pi qualsevol d'aquestes dues fites o, encara millor, la mitjana entre les dues $\frac{3.123}{994} = 3{,}1418511\ldots$

Segles més tard, Ptolemeu (s. II dC) acaba aproximant Pi per $\frac{377}{120} = 3{,}14166$, usant la idea d'Arquimedes amb un polígon de 720 costats. Un segle més tard, Liu Hui (s. III dC) va usar polígons de fins a 3.072 costats per aconseguir una aproximació de 3,14159. Al cap d'uns segles, Viète va aproximar la circumferència amb un polígon de $3 \cdot 2^{17}$ i va aconseguir 9 xifres decimals de Pi. Alguns anys més tard, Ludolf van Ceulen (1540-1610) va aproximar Pi amb un polígon de 2^{62} costats i va aconseguir 35 xifres decimals exactes.

Aquesta idea que han usat tants matemàtics, la podem treballar a l'aula amb tot tipus d'alumnes, ja sigui trobant numèricament el perímetre d'un dels polígons, ja sigui aprofitant miniaplicacions del GeoGebra com les que us presentem:



«Donant voltes al número Pi»
www.geogebra.org/m/zRTKx9jA



«Aproximacions d'Arquimedes»
www.geogebra.org/m/vquebkm5

Imatge 1. Miniaplicacions de Bernat Ancochea i Guillem Bonet, respectivament, sobre aproximacions poligonals al cercle.

En aquestes dues miniaplicacions els alumnes poden visualitzar la idea llegada per Arquimedes. Amb un petit domini del programa, també poden crear ells mateixos l'aplicació que calculi no només el perímetre, sinó també l'error produït en cada aproximació.

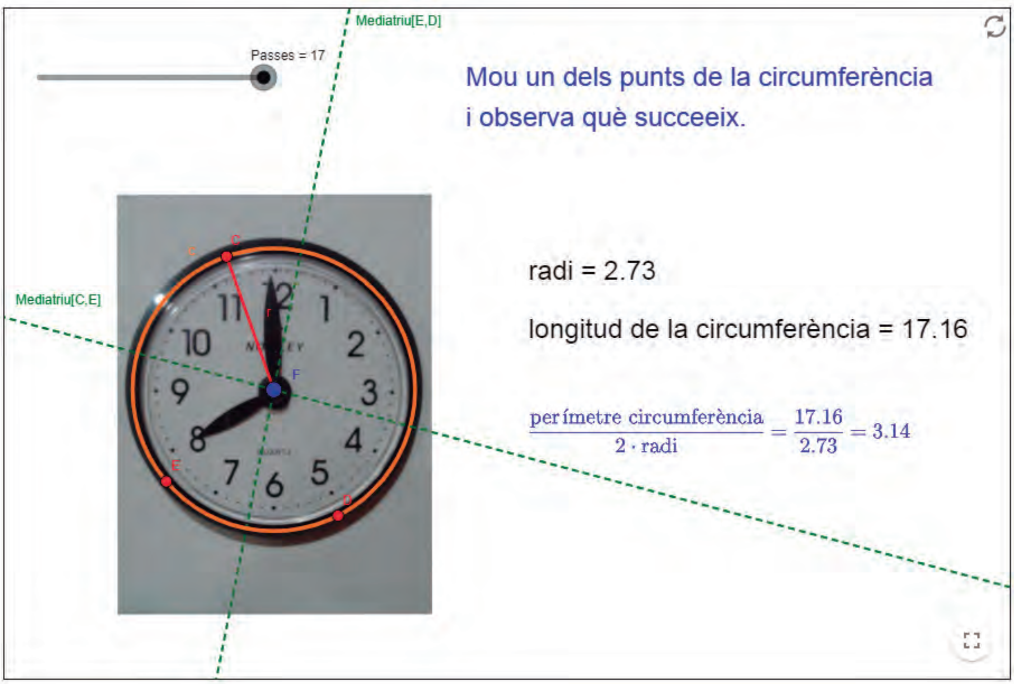
La investigació de Pi i la temptació de copsar, amb una bona demostració, la seva irracionalitat, o d'aconseguir la millor precisió en les seves xifres, també ha passat a èpoques més modernes, en què ha rebut l'atenció de grans matemàtics com Wallis, Leibnitz, Machin, Gauss o Euler.

Va ser precisament Euler qui va arribar a la relació $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, o a una altra fórmula encara més coneguda: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

La relació d'Euler es pot treballar a l'aula analíticament amb fulls de càlcul del GeoGebra, com a l'estudi de la convergència de les successions corresponents que surten d'aplicar la fórmula només a un nombre finit de termes. El mateix exercici es pot fer usant altres fórmules com la de Leibnitz o la de Viète. Una visualització de les tres convergències es pot veure a la miniaplicació de Bernat Ancochea www.geogebra.org/m/u2f9vvsp, que ha creat usant la funció seqüència del GeoGebra.

Més endavant i en l'època ja actual, s'han creat programes numèrics per aconseguir més decimals d'aquest nombre. Euler va ser el primer que va utilitzar el símbol π per expressar la raó de la proporció existent entre el perímetre i el diàmetre d'una circumferència.

El toc que aporta la història de l'evolució del pensament matemàtic a la nostra aula és i ha de ser un referent en la nostra programació. Malgrat això, no tots aprofitem els recursos històrics a l'hora de treballar el nombre Pi. Altres, amb recursos més manipulatius, ja des del cicle superior de primària es posen a investigar la relació de proporcionalitat evident entre el perímetre de la circumferència i el seu diàmetre.



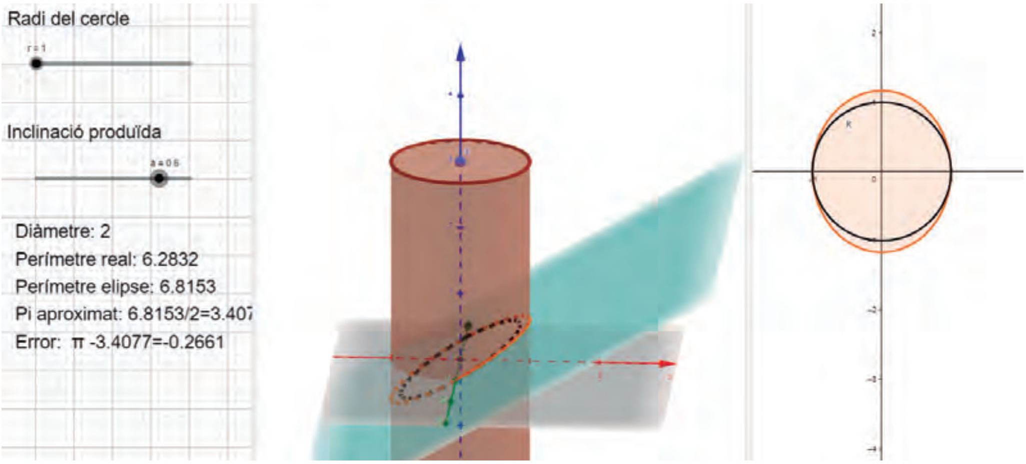
Imatge 2. Miniaplicació «Tot buscant Pi», de Manel Martínez, www.geogebra.org/m/HgTkq2FH.

Cada alumne/a fa una fotografia d'un objecte circular. La insereix al GeoGebra i aprèn a construir la circumferència, que passa per tres punts mitjançant les mediatrius. Posteriorment calcula el perímetre que envolta l'objecte escollit i l'acaba dividint pel seu diàmetre. Tot l'alumnat haurà aconseguit arribar aproximadament a Pi mitjançant objectes circulars diferents. Haurem passat per les fases d'experimentació i descoberta, i estarem en la situació idònia per arribar a la conceptualització.

La versió no digital d'aquesta activitat es du a terme mesurant el diàmetre i el perímetre de pots cilíndrics de diferents mides amb una corda. L'alumnat veu amb sorpresa que totes les seves proporcions ens porten aproximadament a un mateix nombre que té un valor un xic major que 3. Alguns docents aprofiten aquesta experiència, per cert molt potent a l'hora d'introduir Pi a primer d'ESO, per aconseguir consolidar la proporció perímetre-diàmetre com a representació del valor de Pi.

Tanmateix, a més de la conscienciació sobre el vertader significat de Pi, una de les utilitats que pot tenir aquesta investigació és el treball de l'error. Haurem experimentat amb diferents objectes circulars i per a tots ens haurà donat un petit error en el càlcul de Pi. Així, doncs, l'activitat ens pot portar a grans preguntes, com ara per què no ens ha donat exactament el nombre Pi, i d'aquí sortiran grans respostes dels alumnes. Finalment, ells mateixos descobreixen el problema de falta de precisió dels materials o dels mètodes usats.

Aprofundint sobre possibles errors produïts en relació amb com hem pres la mesura, ens podem plantejar quin seria l'error si el fil seguís una el·lipse en lloc d'una circumferència. La següent miniaplicació permet visualitzar aquesta aproximació:



Imatge 3. Miniaplicació «Perseguint l'error de Pi», de Guillem Bonet, www.geogebra.org/m/qnnmdts9.

Un cop aconseguides les respostes inicials al problema de la no exactitud dels resultats en les diferents aproximacions de π que han obtingut els alumnes, ens podem preguntar com es podria reduir l'error. Els alumnes trobaran algunes respostes a aquestes preguntes, com ara calcular una mitjana dels resultats trobats per al diàmetre i per al radi, o usar un regle amb una graduació més fina que ens permeti jugar amb un xic més de precisió en les dades inicials. En aquest cas, la miniaplicació www.geogebra.org/m/whwwbu2u pot servir per visualitzar com augmenta l'error segons l'aproximació obtinguda del perímetre o del diàmetre.

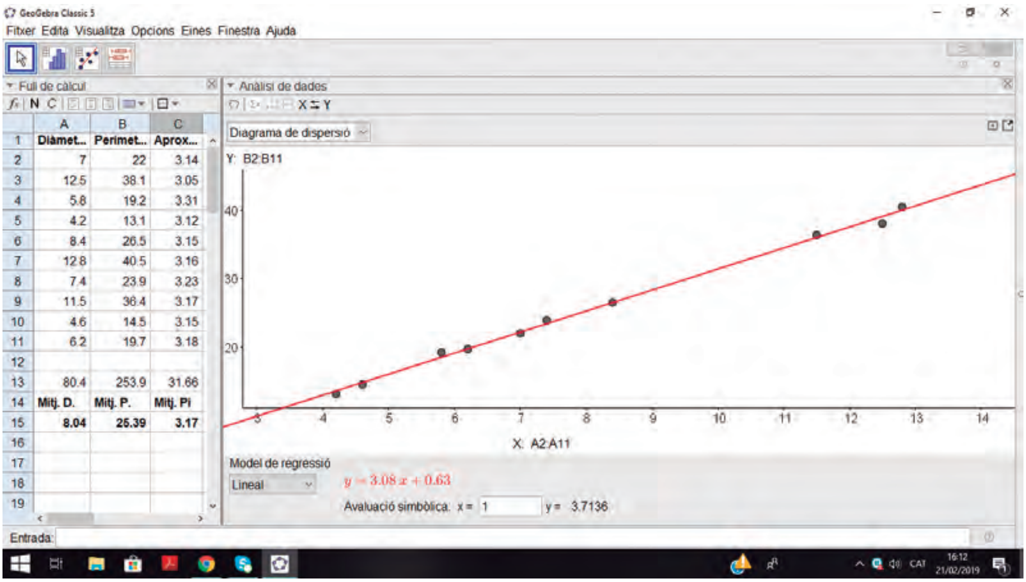
Efectivament, aquestes dues mesures redueixen l'error i és molt positiu que els alumnes les hagin trobat, però hi ha un experiment que ens pot donar no només una bona aproximació del perímetre, sinó també una idea brillant per reduir aquest error.

L'experiment en qüestió consisteix a mesurar el perímetre de la base tot fent unes quantes voltes al pot amb un fil ben prim. En el cas de fer-hi 10 voltes, el possible error comès en la mesura quedaria dividit per 10! Sorprenent, oi? Però què podem fer perquè els alumnes visualitzin aquesta reducció de l'error? Una bona idea seria introduir les diferents mesures obtingudes amb una volta, dues voltes, tres voltes..., i veure que els diferents punts es van apropant a la fita que representa el valor teòric del perímetre.

Aquest pot ser un bon exemple per parlar de límits de successions relacionant-ho amb el nombre π. Si volem, també es pot calcular la successió de les diferents aproximacions dividint pel diàmetre. Per cert, podem usar el mateix mètode per reduir l'error de mesura en el càlcul del diàmetre: clavant dues agulles al pot en extrems oposats i fent que el fil vagi repetidament de l'una a l'altra, unes quantes vegades.

Aproximació estadística de π

Usant la mateixa idea de càlcul de perímetres amb un fil i pots de diferents mides, podem aprofitar l'estudi de l'error en la recollida de les dades per fer un estudi bivariant. Demanem a tots els alumnes que individualment o per parelles mesurin el perímetre i el diàmetre de tots els pots. D'aquesta manera obtindrem n aproximacions de π si dividim aquestes quantitats, o n punts del pla si considerem les dues dades diàmetre-perímetre de cada una de les mesures realitzades. En tots dos casos podem fer un estudi estadístic de les nostres dades, o bé un estudi univariant si considerem només les aproximacions trobades, o bé un estudi bivariant si considerem els punts de coordenades diàmetre-perímetre.



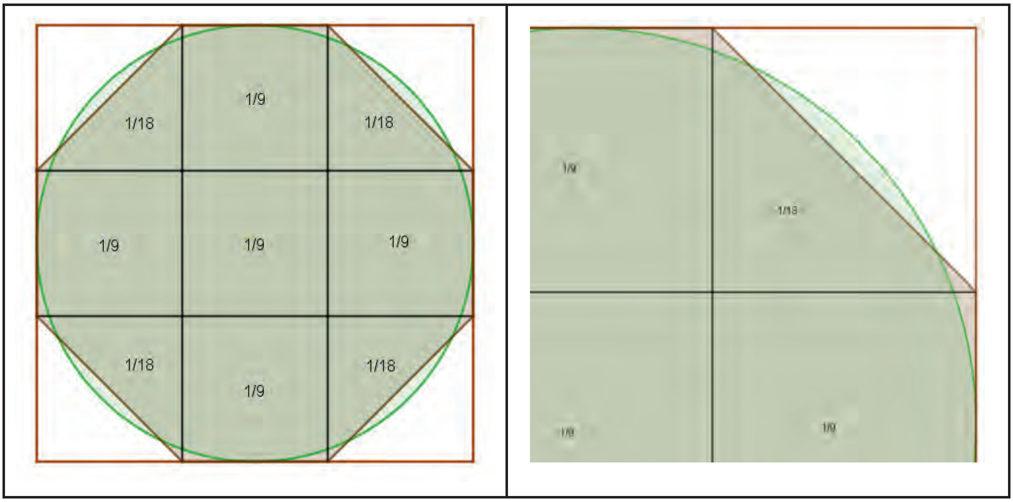
Imatge 4. Anàlisi bivariant de les dades recollides amb una regressió lineal. Creada amb GeoGebra.

En el primer cas, estudiarem paràmetres de centralització, com ara la mitjana o la mediana, i buscarem l'error que es comet en la seva aproximació de π. També estudiarem paràmetres de dispersió, com el rang i la variància, atenent els valors mínims i màxims i preguntant-nos què els ha diferenciat dels altres per allunyar-se més de la mitjana. Finalment, ens preguntarem quins valors ens han donat més error en π i el possible motiu d'aquest error.

En el segon cas, podem arribar a calcular fins al coeficient de correlació i la recta de regressió. Si els nostres alumnes tot just s'estan introduint en l'estudi estadístic, podem usar el full de càlcul del GeoGebra, que ens permetrà tota mena d'estudis estadístics.

Una altra aproximació geomètrica

Una altra idea geomètrica per calcular el nombre π ja la van trobar els antics egipcis. Apareix al papir Rhind, l'any 1600 aC. En aquest cas, l'escriba Ahmès aproximava l'àrea de la circumferència inscrita en un quadrat de costat 1, amb l'àrea de l'octògon que resulta de dividir el quadrat de costat 1 en 9 quadrats iguals i escapçar-ne per la diagonal els quatre quadrats que toquen el vèrtex.



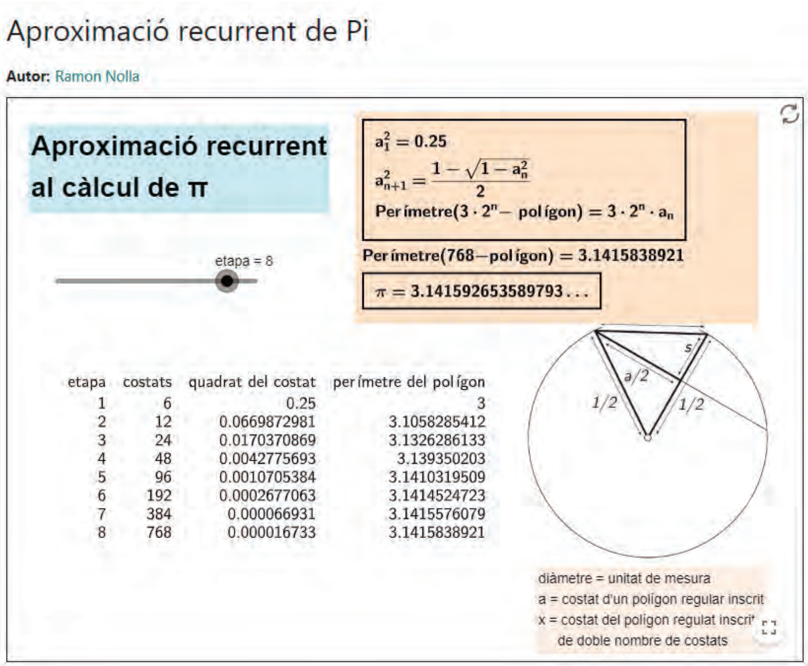
Imatge 5. Imatge de l'aproximació poligonal d'Ahmès i ampliació de la mateixa figura.

Com es pot veure, l'error produït per excés en la circumferència és compensat pel que es produeix per defecte en altres punts. En aquest cas, podem calcular les dues àrees i es troba fàcilment l'error produït en l'aproximació de π.

L'àrea de l'octògon creat és $7/9 = 0{,}77777\ldots$, mentre que la del cercle és $\frac{\pi}{4} = 0{,}78539\ldots$ Així, l'error produït en l'aproximació de l'àrea és $0{,}785398 - 0{,}777777 = 0{,}007620$, que no està malament. En el nostre cas, l'aproximació de π suggerida per Ahmès és $\pi \simeq 4 \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{9} = 3{,}1111\ldots$

Parlant del càlcul d'àrees per deduir π, podríem haver usat una estratègia semblant a la d'Aristòtil amb el matís de buscar ara les àrees en lloc dels perímetres. En aquest cas, han de ser els nostres alumnes els qui calculin algunes àrees que sí que poden trobar mitjançant alguns càlculs, com la del quadrat inscrit i circumscrit. Segurament els caldrà emprar el teorema de Pitàgores i si han sabut trobar les àrees dels quadrats, potser podran passar a l'octògon, i així anar doblant el nombre de costats. També es pot fer algun raonament interessant a partir del triangle equilàter i de l'hexàgon.

Precisament, Ramon Nolla ens proposa en la seva miniaplicació «Aproximació recurrent al càlcul de π», www.geogebra.org/m/r8f7y3Y7, una activitat semblant que podreu trobar enllaçada en el seu full de treball.



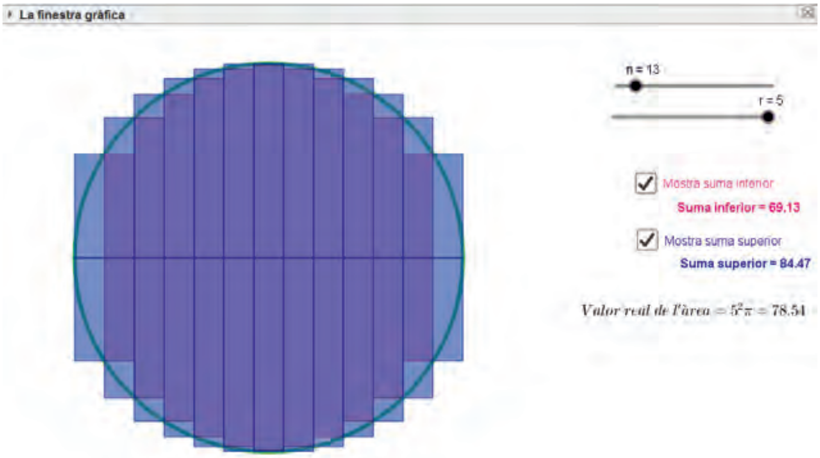
Imatge 6. Miniaplicació de Ramon Nolla per a l'aproximació recurrent de π.

Un cop entesa la idea, podem visualitzar com anem fitant l'error amb el mateix mètode usant el potencial de càlcul del programa: demanem al GeoGebra que calculi l'àrea de polígons inscrits i polígons circumscrits a la nostra circumferència de cada cop més costats. Una versió semblant a la de la segona miniaplicació que hem proposat, «Aproximacions d'Arquímedes», ens ofereix la possibilitat d'anar aproximant l'àrea de la circumferència entre la de polígons inscrits i polígons circumscrits. Aquesta fitació permet trobar una nova aproximació de π.

Càlcul de l'àrea d'un cercle

Una altra idea que podem considerar amb els nostres alumnes és la que habitualment s'utilitza per calcular l'àrea per sota d'una corba. La idea és molt intuïtiva i els nostres alumnes visualitzen la validesa de l'aproximació molt ràpidament. A més, si el nombre d'intervals és petit, els mateixos alumnes poden buscar l'alçada dels rectangles usant el teorema de Pitàgores, per exemple. La idea és tan simple que un alumne de tercer d'ESO ja podria aplicar aquest mètode en l'aproximació a l'àrea d'una circumferència.

Un cop fets els primers intents d'ajust a mà, és convenient anar un xic més enllà i veure que, a mesura que afinem l'interval, les sumes inferiors i superiors acoten de manera molt més precisa l'àrea de la circumferència.



Imatge 7. Miniaplicació «Aproximant l'àrea del cercle», de Guillem Bonet.

Observació: aquesta mateixa idea es pot fer usant trapezis, l'àrea de cadascun dels quals resulta la mitjana aritmètica dels rectangles superior i inferior que el defineixen. Aquesta feina ens servirà a batxillerat per introduir les integrals definides i, abans, a quart d'ESO, per treballar els límits de successions.

Sense estendre'ns en aquest punt, en cas de voler treballar les integrals definides, no podem deixar de mencionar la troballa de Gauss, que dona una bona equivalència de π amb integrals:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

En cas que ens interessi una visualització d'aquest resultat, si ampliem l'interval d'integració en la miniaplicació www.geogebra.org/m/sma5vhykpodem trobarem aproximacions de $\sqrt{\pi}$.

Cerca de π mitjançant mètodes probabilístics

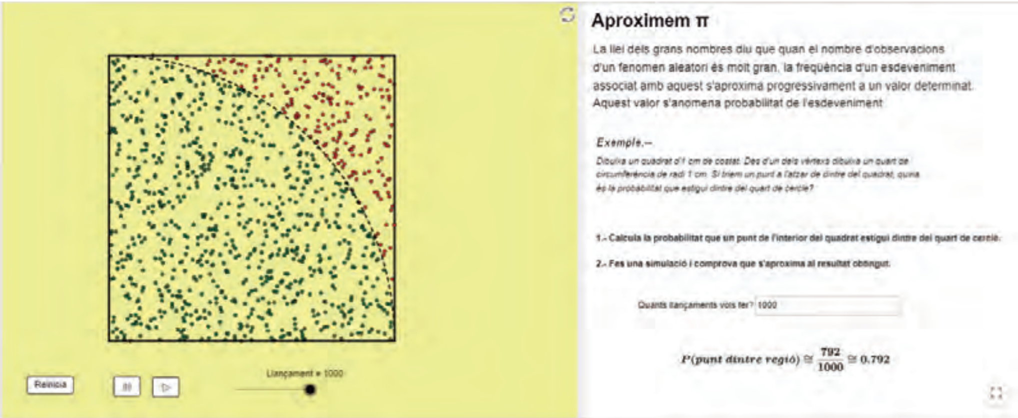
La llei dels grans nombres és un dels resultats més coneguts en probabilitat. Assegura que si un experiment és repetit un nombre gran de vegades, la mitjana dels resultats obtinguts tendirà a un valor expectat, i s'aproximarà més com més vegades intentem l'experiment.

El mètode de Montecarlo és un mètode no determinista que utilitza la llei dels grans nombres per aproximar àrees de figures a través de l'elecció aleatòria d'infinites mostres de punts. En concret, es poden portar a l'aula experiments que ens ajudin a mesurar l'àrea d'un cercle de radi 1 inscrit en un quadrat de costat 2. L'aproximació a l'àrea del cercle la farem escollint punts dins del quadrat de manera aleatòria. Alguns d'aquests punts cauen dins del cercle i altres, no.

Si hem escollit els punts dins del quadrat aleatòriament, tindrà sentit pensar que es conserven les proporcions:

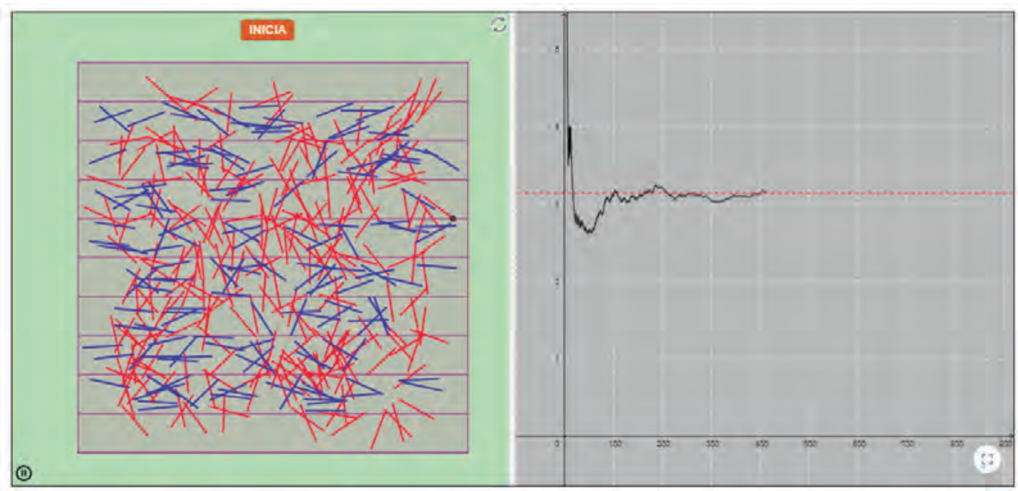
$$\frac{\text{punts dins del cercle}}{\text{punts dins del quadrat}} = \frac{\text{àrea del cercle}}{\text{àrea del quadrat}} = \frac{\pi \cdot r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

Per això podem aproximar l'àrea del cercle i, per tant, també π.



Imatge 8. Miniaplicació de Jordi Font sobre el mètode de Montecarlo, www.geogebra.org/m/bFVcagEF.

Aplicant el mètode unes quantes vegades, veiem que ens anem apropant a π. També es pot fer amb mostres petites, llançant una infinitat de dards a una diana de cartró quadrada, dibuixant *a posteriori* la circumferència inscrita i calculant la proporció ja explicada. Cal dir també que l'aproximació no és gaire ràpida, però dona una bona idea de com funciona el mètode Montecarlo.



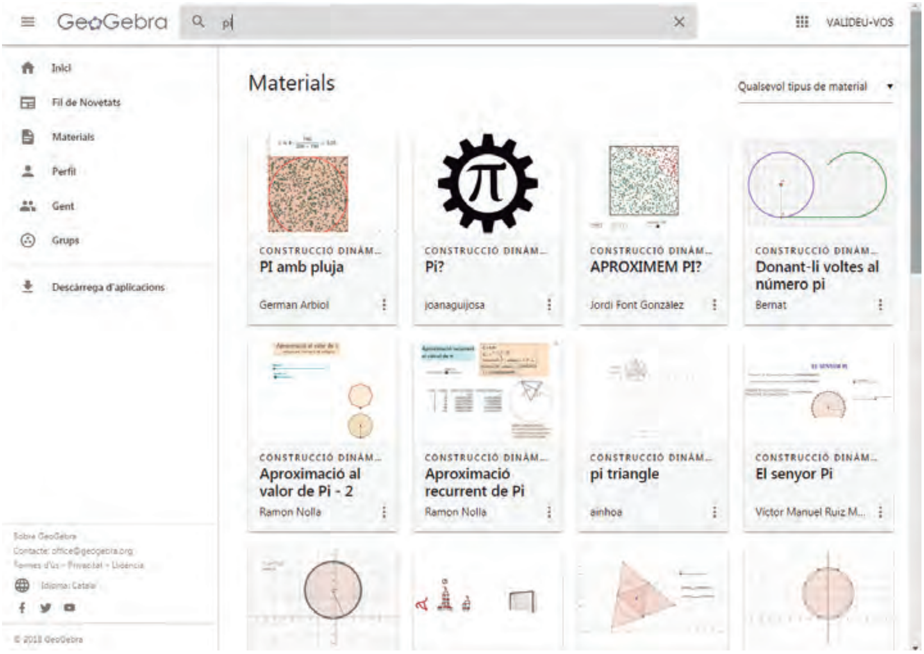
Imatge 9. Miniaplicació «Aproximem Pi?», de Josep Font, aplicant l'agulla de Buffon, www.geogebra.org/m/fXJjzkQF.

El mètode de l'agulla de Buffon treballa de manera similar i usant també la llei dels grans nombres. Llancem aleatòriament agulles sobre una superfície en la qual s'han traçat rectes paral·leles separades entre si de manera uniforme. Es pot veure que si la distància entre les rectes és igual a la longitud de l'agulla, la probabilitat que una sola agulla toqui una recta és $\frac{2}{\pi}$. Per tant, si ho fem amb moltes agulles, segons la llei dels grans nombres, la freqüència d'agulles que toquen i les totals s'acosta a aquesta quantitat. A partir d'aquí podem buscar aproximacions de Pi.

Aquesta pràctica també es pot treballar llançant agulles o escuradents i preguntant-nos com buscaríem la probabilitat que una toqui les rectes. Un cop fet, podem usar la miniaplicació proposada per multiplicar el nombre de llançaments.

Conclusions i tancament de l'article

Per acabar, volem comentar que tot aquest recull s'ha pogut fer gràcies a la feina desinteressada de tots els que comparteixen els materials d'aula. Totes i cadascuna de les miniaplicacions que hem recomanat en aquest article es poden trobar a la pàgina de materials del GeoGebra, en la qual, si busqueu bé, podeu trobar un munt de recursos per portar a la vostra aula.



Imatge 10. Captura de pantalla de la pàgina de materials entorn del nombre Pi.

Us recomanem, per tant, que visiteu amb regularitat la pàgina de materials del GeoGebra (www.geogebra.org/materials) a fi de conèixer de primera mà totes les novetats que van sortint. Us sorprendrà veure les aplicacions creades per altres docents amb inquietuds semblants a les vostres i que us poden oferir idees que de ben segur enriquiran la vostra pràctica a l'aula.