

## El cub de Sonobe, la joia de Takahama i els deltaedres estelats

**Jaume Coll Guerrero**

Centre de Formació d'Adults Rafael Farré

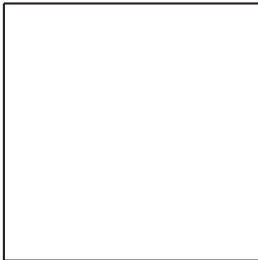
Professor associat del Departament de Matemàtiques (UAB)

.....

### 1. El cub de Sonobe

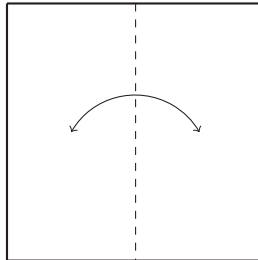
El cub de Sonobe és el cub de paper més popular. És modular i està format per sis mòduls iguals, un per a cada cara del cub. El mòdul de Sonobe es construeix fent uns determinats plegs en un full quadrat de paper.

Pas 1



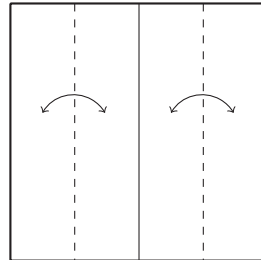
Comenceu amb un full quadrat.

Pas 2

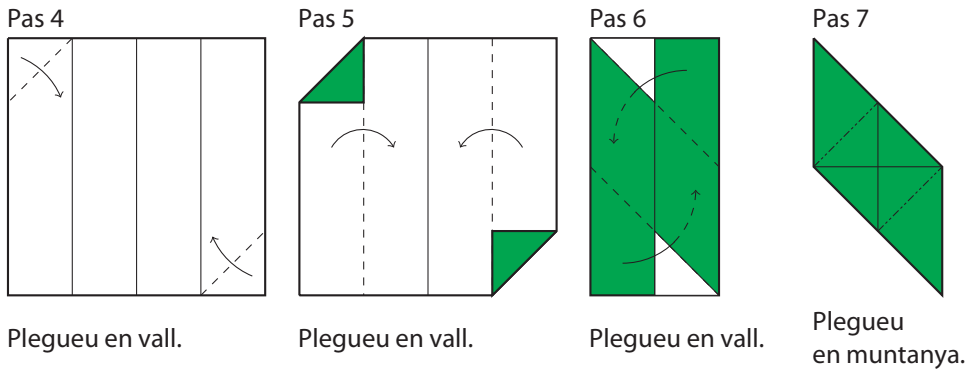


Plegueu i desplegueu en vall per la meitat.

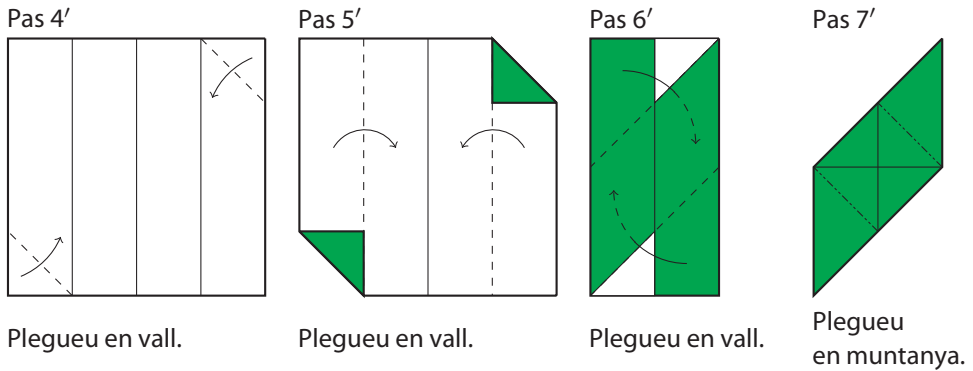
Pas 3



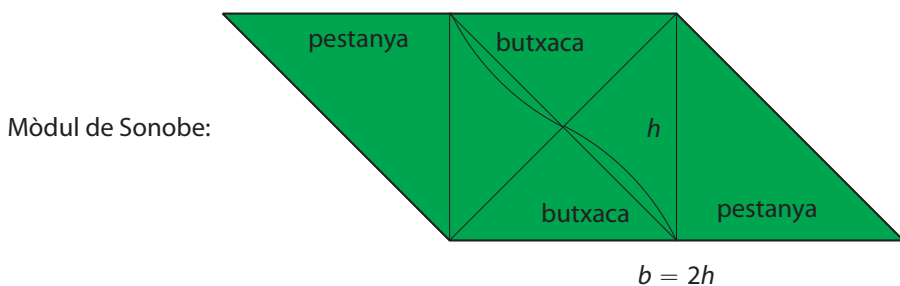
Plegueu i desplegueu en vall per la quarta part.



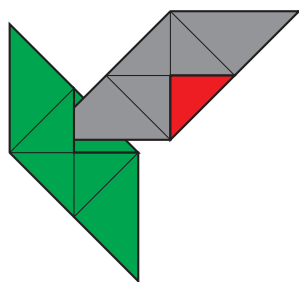
Observeu que la construcció del mòdul de Sonobe és asimètrica; en efecte, en el pas 4 hem fet els plecs en dos vèrtexs oposats del quadrat. També es poden fer els plecs triant els altres dos vèrtexs oposats del quadrat i repetint els passos del 4 al 7, d'aquesta manera obtenim un mòdul simètric.



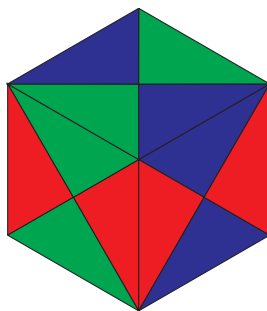
El mòdul de Sonobe té forma de romboide amb angles de 45 i 135 graus i la seva base és el doble de la seva alçada. Podeu comprovar que cada punt del romboide té quatre capes de paper i, per tant, la seva superfície és la quarta part del quadrat inicial. Per unir els sis mòduls romboidals i formar el cub no cal utilitzar cola; s'uneixen perquè cada mòdul té dues butxaques i dues pestanyes. Les dues butxaques estan situades a la diagonal menor del romboide, que també és una diagonal del quadrat central, i les pestanyes són els dos triangles rectangles isòscels laterals.



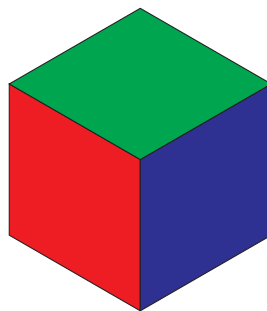
Per unir dos mòduls, en girem un 90 graus i introduïm una pestanya del primer mòdul en una butxaca del segon. La resta dels mòduls s'uneixen de la mateixa manera. El mòdul obtingut en el pas 7 no es pot encaixar de manera natural amb el mòdul del pas 7'. Per construir un cub cal fer sis mòduls idèntics com el del pas 7 o sis mòduls idèntics com en el pas 7', en els dos casos l'efecte visual és el mateix. Si en el pas 7 o 7' fem un plec en vall en lloc de muntanya, aleshores quan unim sis mòduls obtindrem un cub amb les cares llises, no dividides en triangles.



Unió de 2 mòduls.



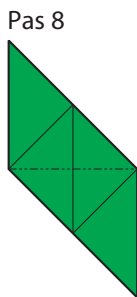
Unió de 6 mòduls del pas 7 o 7' en muntanya.



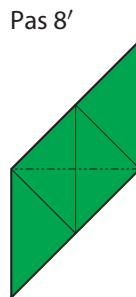
Unió de 6 mòduls del pas 7 o 7' en vall.

## La joia de Takahama

Fent un nou plec en el mòdul de Sonobe s'obté una variant que en aquesta secció anomenaré mòdul de Takahama.



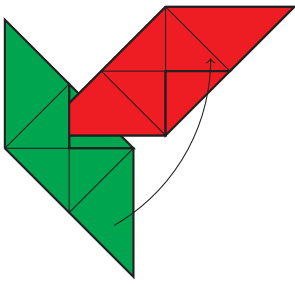
Pas 8



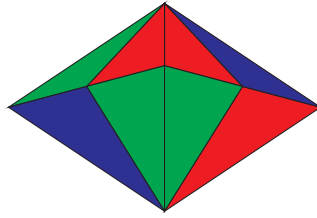
Pas 8'

Plegueu en muntanya

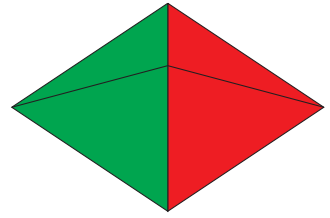
Unint tres mòduls de Takahama obtenim un altre hexaedre: la bipiràmide triangular. La unió de dos mòduls de Takahama es fa com en el cas del mòdul de Sonobe. Les altres propietats del mòdul de Takahama són semblants a les del mòdul de Sonobe. El mòdul obtingut en el pas 8 no es pot encaixar de manera natural amb el mòdul del pas 8'. Per construir una bipiràmide triangular cal fer tres mòduls idèntics com el del pas 8, o tres mòduls idèntics com el del pas 8'; en els dos casos l'efecte visual és el mateix. Si en els passos 7-8 o 7'-8' fem plecs en vall en lloc de muntanya, aleshores quan unim tres mòduls obtenim una bipiràmide triangular amb les cares llises, no dividides en triangles.



Unió de 2 mòduls  
de Takahama



Unió de 3 mòduls dels  
passos 7-8 o 7'-8' en muntanya

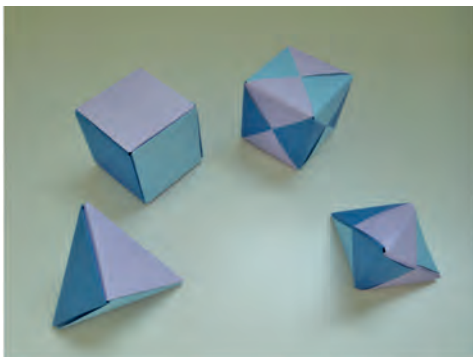


Unió de 3 mòduls dels  
passos 7-8 o 7'-8' en vall

Segons l'historiador de l'origami David Lister (Grimsby, 1930-2013), la joia de Takahama fou publicada per primer cop l'any 1974 en el llibre *Vida creativa amb origami creatiu* [2], escrit en japonès per l'origamista nipona Toshie Takahama (Tòquio 1910-1999). El nom de joia és degut al fet que Toshie Takahama feia collarets unint uns quants d'aquests hexaedres amb una corda. A finals de la dècada dels anys seixanta Toshie Takahama va fundar el Sosaku Origami Group 67 (grup de creació i estudi de l'origami), del qual formaven part, entre d'altres, Mitsunobu Sonobe i Kunihiko Kasahara. Aquest petit grup de plegadors es reunia periòdicament a l'escola Tamagawa Gakuen, a l'oest de Tòquio.

David Lister també afirma que el cub de Sonobe fou publicat per primer cop l'any 1968 a les pàgines 10 i 11 de la segona de les set revistes editades pel Sosaku Origami Group 67.

Amb les publicacions de Toshie Takahama es va donar a conèixer el mòdul de Sonobe. Així, el cub de Sonobe i la joia de Takahama van ser les figures modulars que van donar lloc a l'especialitat actual de l'origami modular. El cub de Sonobe es va publicar posteriorment en diverses revistes i llibres de papiroflèxia amb el nom de caixa de colors, com ara en la pàgina 19 del número 0, volum 3, del butlletí de la NOA (Nippon Origami Association) de l'any 1974, del qual era directora Toshie Takahama.



**Cubs de Sonobe i joies de Takahama.**



**Toshie Takahama i Mitsunobu Sonobe.**

Mitsunobu Sonobe va néixer l'any 1937 al districte de Toshima-ku de la ciutat de Tòquio. En el llibre *Atarashii Origami Nyumon* [1], editat pel Sosaku Origami Group 67 l'any 1973 i on apareix publicada la caixa de colors, podem llegir que tenia sis anys d'experiència en el plegatge de paper i que vivia al barri d'Ikebukuro. Treballava en un grup de teatre i el que

més li agradava era la creació de tot tipus de flors de paper. En el mateix llibre es fan petits apunts biogràfics dels altres membres del Sosaku Origami Group 67.

Als anys setanta Toshie Takahama era més coneguda que Mitsunobu Sonobe i durant algunes dècades el mòdul de Sonobe va ser conegut a Occident com a mòdul de Takahama, però és clar que l'autor d'aquest mòdul és Mitsunobu Sonobe, com apareix en el llibre *Papiroflexia para expertos* [5], dels mestres d'origami Kunihiro Kasahara i Toshie Takahama, contemporanis de Mitsunobu Sonobe.

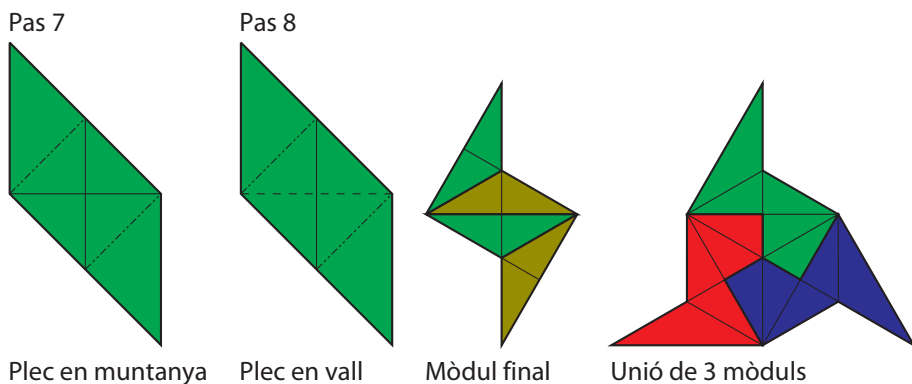
Cal destacar la semblança entre el cub de Sonobe i el cub de paper anomenat *tamatebako* o cofre del tresor, que apareix en el llibre de fusta *Ranma Zushiki*, publicat l'any 1734 per Hayato Ohoka.

Podeu trobar un altre cub de paper força diferent del de Sonobe en el llibre *Guía práctica del arte manual* [3], publicat l'any 1977, tot i que les instruccions de la seva construcció no són gaire clares.

## Deltaedres estelats

Els deltaedres són poliedres en què totes les cares són triangles equilàters. Existeixen infinits deltaedres còncaus i tan sols vuit deltaedres convexos, de 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 i 20 cares, com van demostrar l'any 1947 Freudenthal i Van der Waerden («Over een bewering van Euclides», *Simon Stevin* 25: 115-128). Els valors mínim i màxim del nombre de cares d'un deltaedre convex és 4 i 20, respectivament, que es corresponen als sòlids platònics o regulars amb els valors mínim i màxim de cares: el tetraedre i l'icosaedre. Existeix un tercer poliedre, l'octaedre, que és deltaedre i sòlid platònic alhora. L'octaedre també es pot interpretar com una bipiràmide quadrangular. Els altres cinc deltaedres (les bipiràmides triangular i pentagonal, el dodecadeltaedre, el tetracaidecadeltaedre i l'hexacaidecadeltaedre) no són regulars en els seus vèrtexs. Cal destacar que no existeixen deltaedres convexos de 18 cares o d'un nombre de cares superior a 20.

El mòdul de Sonobe té moltes més possibilitats. Si en el pas 7 fem el plec en muntanya i en el pas 8 fem el plec en vall, aleshores obtenim una nou mòdul amb què es poden construir deltaedres estelats.

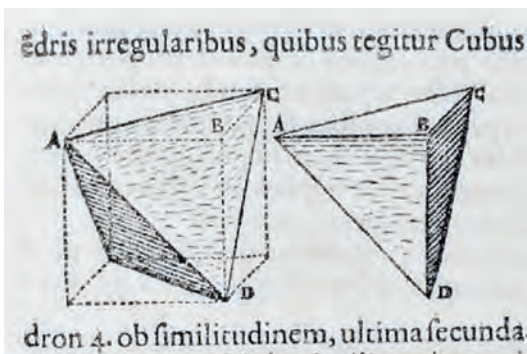


Unint tres d'aquests mòduls obtenim una piràmide triangular oberta en què la base és un triangle equilàter i els tres costats laterals són triangles rectangles isòsceles. Amb aquestes noves configuracions de segon nivell podem fer estelacions de deltaedres. Amb vuit piràmides obtenim un octaedre estelat i amb vint, un icosaedre estelat. Com que cada mòdul forma part de dues piràmides adjuntes, observem que es necessiten 12 mòduls per fer l'octaedre estelat i 30 mòduls per fer l'icosaedre estelat. En general, si tenim un deltaedre de  $C$  cares i volem fer un deltaedre estelat, ens calen

$$\frac{3C}{2}$$

mòduls. D'aquest raonament origàmic deduïm que qualsevol deltaedre té sempre un nombre parell de cares.

Observem que si fem l'estel·lació del tetraedre amb aquest tipus de configuració de segon nivell, obtenim el cub de Sonobe. Això és així perquè es pot inscriure un tetraedre dins d'un cub, les 6 arestes del tetraedre coincideixen amb 6 de les 12 diagonals del cub. Aquest fet ja fou observat per Kepler en l'*Harmonices Mundi* (1619).



Kepler. *Harmonices Mundi*, Llibre v.



Segell amb un octaedre estelat.

De la il·lustració del llibre de Kepler deduïm que la longitud de l'aresta del cub  $l$  coincideix amb la distància entre dues arestes oposades del tetraedre, i la longitud de l'aresta del tetraedre regular inscrit val  $\sqrt{2}l$ . A més, la descomposició del cub en cinc tetraedres ens permet calcular el volum del tetraedre regular.

$$l^3 = V_{\text{cub}} = V_{\text{tetraedre regular}} + 4 \cdot V_{\text{tetraedres no regulars}}$$

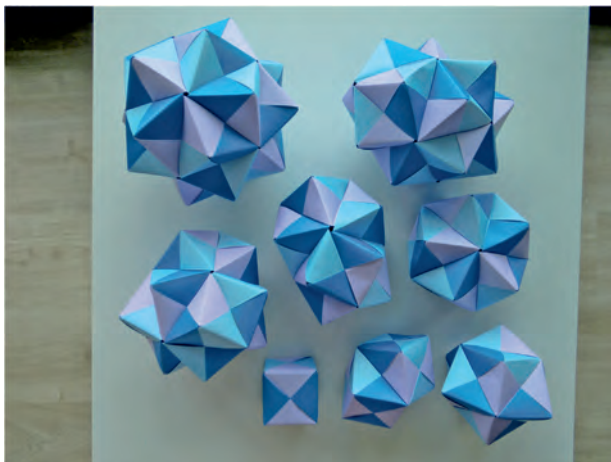
$$l^3 = V_{\text{tetraedre regular}} + 4 \cdot \frac{1}{6}l^3$$

$$V_{\text{tetraedre regular}} = \frac{l^3}{3}$$

L'estel·lació de l'octaedre apareix en un segell que es va emetre al Japó per commemorar la celebració a Kyoto l'any 1990 del XXI Congrés Internacional de Matemàtiques.

Els deltaedres estelats construïts amb aquest mòdul tenen les cares triangulades. Si invertim el tipus de plecs en el pas 7 (vall en lloc de muntanya) i el pas 8 (muntanya en lloc de vall), aleshores obtindrem els deltaedres estelats amb les cares llises.

Pas 7	Pas 8	Poliedre
Plec en muntanya	—	Cub de Sonobe amb cares triangulades
Plec en vall	—	Cub de Sonobe amb cares llises
Plec en muntanya	Plec en muntanya	Joia de Takahama amb cares triangulades
Plec en vall	Plec en vall	Joia de Takahama amb cares llises
Plec en muntanya	Plec en vall	Deltaedres estelats amb cares triangulades
Plec en vall	Plec en muntanya	Deltaedres estelats amb cares llises



Els 8 deltaedres estelats (mòdul de Sonobe).

## Referències

- [1] Nyumon (1973). *Atarashii Origami Nyumon*, Sosaku Origami Group 67'.
- [2] Toshie Takahama (1974). *Creative Life with Creative Origami 1*. (En japonès). Macau.
- [3] *Guía práctica del arte manual* (1977). 1a edició. Barcelona: Kairós.
- [4] Vicente Palacios (2011). *Papiroflexia básica*. Barcelona: Salvatella.
- [5] Kunihiro Kasahara i Toshie Takahama (2011). *Papiroflexia para expertos*. 9a edició. Madrid: EDAF.
- [6] Mitsunobu Sonobe (2001). *Okuru, kazaru, tanoshimu jitsuyoi origami: shiki o kazaru sutekina komono 110*. Seibido Shuppan.

**Agraïments:** a Minerva Ciruela per introduir-me en el món de l'origami, a en Josep Ramis per la seva correcció de català, a en Joan Sallas per convidar-me a exposar aquest article en els tallers de papiroflexia del 4t Aplec de Badalona i a en David Brill per facilitar-me la imatge d'una sessió del Sosaku Origami Group 67 en què apareixen Toshie Takahama i Mitsunobu Sonobe.