pensar

per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Recentment he tingut l'oportunitat de revisar el que fou el meu primer llibre de divulgació matemàtica, un llibre de recreacions matemàtiques, històries on les matemàtiques tenen una paper rellevant i reflexions sobre l'interès dels problemes per l'ensenyament de les matemàtiques. Feta la revisió i després d'actualitzar o canviar alguns problemes que havien quedat fora de context, he tingut l'avinentesa de publicar novament aquesta obra "primerenca", aquesta vegada en dos volums: el primer amb el títol *La magia de los números* i el segon titulat *Relojes, medidas y calendarios*. Tots dos formen part de la col·lecció Retos Matemáticos, publicada conjuntament per les editorials Salvat i Gedisa, a qui agraeixo la possibilitat de recuperar uns materials que ja eren molt difícils de trobar. En aquesta col·lecció han reaparegut, entre d'altres, diversos llibres del gran Martin Gardner, que sempre val la pena rellegir.

Així doncs, aprofitant l'efemèride esmentada, en l'article d'avui us proposo alguns dels problemes que apareixen en el primer dels volums, juntament amb algun altre que tenia entre mans per substituir els que havia eliminat, però que al final no hi ha cabut. Desitjo que gaudiu dels problemes i, si en voleu més, aquesta vegada ja sabeu on trobar-los.

‣ **Problema 1.** Una curiositat numèrica: $1/27 = 0{,}037037037\ldots$, mentre que $1/37 = 0{,}027027027\ldots$ És bonic, oi? Esbrineu què tenen d'especial el 27 i el 37, i trobeu altres parelles que tinguin relacions similars. Aquesta curiositat, podríem explicar-la, de manera general, dient que a un nombre li fem *alguna cosa* (en aquest cas, considerar l'invers i expressar-lo en forma decimal) i el resultat obtingut correspon a un altre nombre que, si li fem la *mateixa cosa*, ens donarà el primer.

La relació anterior em recorda els nombres amics, que són aquells la suma dels divisors propis d'un dels quals ens dona l'altre. El primer parell de nombres amics és el format per 220 i 284 i ja era conegut pels antics pitagòrics, que associaven a aquest parell de nombres propietats màgiques. En efecte, són dos nombres amics perquè, d'una banda, la suma dels divisors propis de 220 és: $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$; de l'altra, la suma dels divisors propis de 284 és: $1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$. Altres parells de nombres amics són: 1.184, 1.210; 2.620, 2.924; 5.020, 5.564, i 6.232, 6.368.

Diversos matemàtics àrabs van fer descobriments rellevants en relació amb aquests nombres. En concret, l'iraquià ?ābit ibn Qurra, al segle IX, va proposar i demostrar la conjectura següent, que proporcionava un mètode per trobar nombres amics: si $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$, són tres nombres primers ($n > 1$), llavors resulta que: $2^n \cdot p \cdot q$ i $2^n \cdot r$ formen un parell de nombres amics. Aquesta expressió dona, per a $n = 2$, el parell (220, 284); per a $n = 4$, el parell (17.296, 18.416), i per a $n = 7$, el parell (9.363.584, 9.437.056), però no s'han trobat altres parells amb aquesta configuració. Els nombres de la forma $3 \cdot 2^n - 1$ reben el nom de nombres de Ṯābit.

A partir dels nombres amics es pot establir la idea dels anomenats nombres sociables. Un conjunt de tres o més enters tals que el segon sigui igual a la suma dels divisors propis del primer, el tercer sigui igual a la suma dels divisors propis del segon i així successivament fins a tancar el cicle de manera que el primer sigui igual a la suma dels divisors de l'últim, formen el que s'anomena un conjunt o un cicle de nombres sociables. La quantitat de nombres és l'ordre del cicle. Així, tot cicle d'ordre 1 correspon a un nombre perfecte i tot cicle d'ordre 2 correspon a un parell de nombres amics. No es coneixen cicles d'ordre 3, però sí que se'n coneixen d'ordres més grans. Per exemple: 1.264.460, 1.547.860, 1.727.636, 1.305.184, formen un cicle d'ordre 4; mentre que 12.496, 14.288,15.472, 14.536, 14.264, és el cicle d'ordre 5 format pels menors enters positius que es coneix.

Seguint amb la mateixa idea, si triem un nombre compost qualsevol, podem definir la successió de manera que cada terme és la suma dels divisors propis del terme anterior. Pot passar que la successió acabi en 1 (cosa que succeeix sempre que s'arribi a un nombre primer), formi un cicle (sempre que es repeteixi un dels números) o no acabi mai (sempre que tots els números de la successió siguin diferents). Es desconeix si la successió sempre acaba (en 1 o en un cicle) o bé hi ha casos en què no acaba.

▸ **Problema 2.** Els nombres feliços. Preneu un nombre, per exemple, de dues xifres, eleveu cada xifra al quadrat i sumeu els resultats; torneu a elevar cada xifra i sumeu els resultats novament. Repetiu el mateix procés fins que passi alguna cosa interessant. Feu algunes proves i tracteu de descobrir què és el que passa. Aquesta és una mostra, si escollim el nombre 44:

$$4^2 + 4^2 = 32; \quad 3^2 + 2^2 = 13; \quad 1^2 + 3^2 = 10; \quad 1^2 + 0^2 = 1.$$

Els nombres com el 44, que acaben el seu recorregut a l'1, es diuen nombres feliços. Malauradament, com ja deveu haver comprovat, només alguns nombres tenen el privilegi de ser feliços. Investigueu sobre aquests nombres: quants n'hi ha de dues xifres, com pot generar-se'n una infinitat, etc. Si no en teniu prou, proveu què passa quan, en lloc d'elevar les xifres al quadrat, les eleveu al cub. Per cert, l'any 2019 és un nombre feliç!

Seguim parlant de nombres, però ara introduïm qüestions relacionades amb les operacions.

▸ **Problema 3.** Els criptogrames, i en general les operacions en què cal substituir lletres per xifres de manera que es verifiquin les igualtats proposades, sempre m'han agradat. Els dos que us proposo són especialment bonics, però aquí les lletres no ens ajuden, perquè tan sols hi ha símbols i són iguals. El primer va ser ideat pel gran autor de recreacions H. E. Dudeney, té solució única i cal substituir-hi cada signe & per una xifra diferent, de l'1 al 9:

$$
\begin{array}{rrr}
 & \& & \& \\
\times & & \& \\
\hline
 & \& & \& \\
+ & & \& \\
\hline
 & \& & \&
\end{array}
$$

El segon consisteix en una divisió de la qual coneixem només la xifra central del quocient i que el residu és 0. Com abans, només té una solució, però ara no sabem res de les xifres; tanmateix, us ajudaré dient-vos que ara sí que apareix el 0 i ho fa diverses vegades, el 4 només surt al divisor i no apareixen ni el 5 ni el 7:

$$
\begin{array}{cccccccc|l}
\text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x x x} \\
\cline{9-9}
- & \text{x} & \text{x} & \text{x} & & & & & \text{x x 8 x x} \\
\cline{1-6}
 & & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & & & \\
 & & - & \text{x} & \text{x} & \text{x} & & & \\
\cline{3-8}
 & & & & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \\
 & & & & - & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \\
\cline{3-8}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

▸ **Problema 4.** El sistema de numeració posicional decimal és un dels conceptes fonamentals de les matemàtiques i a l'escola cal treballar-lo sempre i en tots els cursos, tant a partir de materials a l'inici, com a partir de problemes més endavant. Una activitat que em sembla interessant i m'agrada proposar és la d'ordenar nombres formats de diferents maneres i sense necessitat de computar-los. Per exemple, formar diversos nombres amb els mil primers nombres naturals: sumant-los tots, sumant les xifres, multiplicant-los tots, multiplicant les xifres, posant-los l'un a continuació de l'altre —123456789101112...—, elevant cadascun al següent, etc. Quin serà l'ordre, de gran a petit, d'aquests sis nombres?

Tanmateix, a vegades por ser interessant computar alguns d'aquests nombres. Per exemple, sabríeu trobar quantes xifres calen per escriure els nombres naturals d'1 a 1.000.000? Si per fer aquest càlcul heu emprat un mètode organitzat i estructurat, no us serà difícil trobar quina és la suma de totes aquestes xifres.

Acabarem l'article d'avui amb un problema on apareixen relacions entre longituds i volums i, una vegada més, quan trobem la solució sembla que la intuïció ens diu una altra cosa. Sempre recordo un titular d'un conegut diari que deia: «amb el diari d'avui es podria fer una tira de paper que anés de la Terra a la Lluna». Una manera enginyosa de dir que el diari tenia moltes pàgines. Amb el paper d'aquest petit article també podríem emprar el mateix titular: n'hi ha prou que la tira de paper sigui més estreta!

Reconduir aquestes falses intuïcions en el cas del problema següent és senzill, però donar una prova general de la validesa de la solució a partir del que succeeix és una mica més delicat.

▸ **Problema 5.** Tenim una certa quantitat de plastilina, que té un volum d'1 dm^3 i amb tota la qual formem esferes que apilem l'una sobre l'altra. *a*) L'alçada de la pila serà igual o diferent, segons el nombre i la grandària de les esferes construïdes? *b*) Quantes esferes i de quins radis hem de fer per tal que la pila tingui una alçada igual o superior a 1 m? *c*) Amb un cert nombre d'esferes, quina és l'alçada màxima que aconseguiríem? *d*) És possible que l'alçada sigui tan gran com es vulgui (prescindint de limitacions físiques)? *e*) Què passaria si en lloc d'una esfera empréssim un políedre regular qualsevol?

Es poden fer aquestes i encara altres preguntes sobre aquesta interessant situació. Tanmateix, en les dues darreres qüestions, donar respostes generals que siguin demostracions del que s'afirma no és tan senzill com pot semblar quan ja intuïm què és el que succeeix.

Bibliografia

Deulofeu, J. (2018). *La magia de los números: 136 recreaciones aritméticas y geométricas*. Col·lecció Retos Matemáticos. Barcelona: Salvat/Gedisa.

Deulofeu, J. (2018). *Relojes, medidas y calendarios. Un sinfín de historias matemáticas*. Col·lecció Retos Matemáticos. Barcelona: Salvat/Gedisa.

Gardner, M. (2018). *Los enigmas del robot Farfel. Acertijos de ciencia ficción.* Col·lecció Retos matemáticos. Barcelona: Salvat/Gedisa.

Gardner, M. (2018). *Secretos matemáticos de altos vuelos. Los extraños encuentros del Doctor Matrix*. Col·lecció Retos matemáticos. Barcelona: Salvat/Gedisa.