La història com a context per a l'enriquiment competencial de l'activitat matemàtica

Xavier Vilella Miró
xvilella@xtec.cat
Grup Vilatzara, ICE-UAB

Resum

Els contextos ens ajuden a desenvolupar competència matemàtica d'alt nivell, prioritzant els significats i les relacions. Presentem alguns exemples per a l'ESO que reforcen la idea que les matemàtiques són interessants, útils i sorprenents, i també assequibles en diferents nivells. Partim de dades d'un poblat ibèric o d'una resta de ceràmica per realitzar reconstruccions usant eines matemàtiques.

Abstract

Contexts help us develop high-level mathematical skills, prioritizing meanings and relationships. We present some secondary-school level examples that reinforce the idea that mathematics are interesting, useful and surprising, and also accessible at different levels. These take data from an Iberian settlement, or a piece of ceramics, for example, to perform reconstructions using mathematical tools.

Introducció

La proposta que presentem és l'aportació del Grup Vilatzara a la IX Jornada «Les matemàtiques entre la secundària i la universitat», celebrada a la UAB l'any 2018. Està emmarcada en una línia de treball complexa basada en tres tipus de tasques —activitats riques, petites investigacions i projectes— que desenvolupen competència matemàtica (Bishop, 1999), i també en l'educació matemàtica realista (EMR) de l'Institut Freudenthal (Sol, Giménez i Rosich, 2007).

L'enfocament reflexiu (Brockbank i McGill, 2002; Perrenoud, 2004; Korthagen, 2001; Schön, 1983), que busca el nivell màxim de competència matemàtica —seguint les recomanacions dels informes PISA—, és eficient perquè amb menys temps aconsegueixes millors resultats en termes de competència matemàtica, i permet:

- Establir els significats per damunt de la simple mecanització.
- Prioritzar l'estudi de les relacions per damunt de la simple simbolització.
- Facilitar la transferència de coneixement d'un context a un altre.
- Desenvolupar processos matemàtics d'alt nivell.
- Desenvolupar competències matemàtiques en un context inicial atractiu i facilitador de la construcció de significats (pizzes i amanides, ofertes de telefonia mòbil, reconstrucció virtual d'edificis ibèrics, o de peces de ceràmica, etc.) per passar a un context totalment matemàtic, segons que el currículum ens ho demani.
- Aconseguir comprensió i fluïdesa en les dimensions de la competència matemàtica, és a dir, en els *processos* (resolució de problemes, raonament i prova, connexions, representació i comunicació), i alhora facilitar que cada alumne pugui assolir el nivell al qual pugui accedir.

En aquesta proposta:

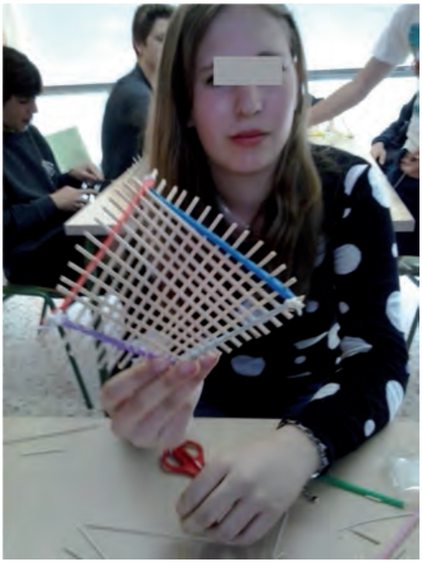
- Mirant objectes del nostre entorn amb mirada matemàtica, reconeixem la idea de **variable** i donem sentit a **fórmules lineals.**
- Constatem que la idea de **proporció** és molt útil per modelar fenòmens de l'entorn històric i que apareix quan relacionem mesures.
- Obtenim regularitats a partir de mesures conegudes i descobrim coses desconegudes mitjançant càlculs senzills: **reconstruïm el passat amb l'ajuda de l'àlgebra.**
- Les matemàtiques es mostren com unes eines magnífiques col·laborant amb l'arqueologia.

Contextualitzar l'activitat matemàtica a l'aula

El fet que ningú discuteixi la importància de l'aprenentatge de les matemàtiques no vol dir que el nostre alumnat comparteixi aquesta opinió quan es veu obligat a dedicar a l'estudi de les matemàtiques moltes hores tant a classe com a casa. Convindria justificar d'alguna manera l'esforç que el professorat demana a l'alumne. Així tindria l'oportunitat de comprendre, amb la informació subministrada, per què ha de dedicar el temps i l'esforç que l'aprenentatge de les matemàtiques requereix.

Hi ha diverses maneres de fer realitat aquest propòsit. Una d'elles és contextualitzar les propostes que portem a l'aula. És clar que el context fa molt més que això, però no hauríem de menysprear el fet que pot donar sentit als continguts matemàtics que ensenyem. Bishop afirma que l'alumnat podrà transferir les matemàtiques que aprèn si desenvolupa un significat matemàtic que sigui dependent del seu entorn, és a dir, quan sigui capaç de connectar el seu coneixement amb el que reconeix en el món real (Bishop, 1985).

El context motiva i porta al descobriment, pot canviar actituds davant les matemàtiques (Boaler, 1993). El context facilita el plantejament de fer matemàtiques resolent problemes, promou la racionalitat, la construcció de conjectures que poden convertir-se en hipòtesis que faciliten el redescobriment matemàtic (Gravejmeier, 2007). També connecta sabers i entorns, facilita representacions, insinua models i ajuda a una bona comunicació de les idees matemàtiques. És a dir, desenvolupa les cinc dimensions de la competència matemàtica.



El Grup Vilatzara ha desenvolupat propostes contextualitzades, durant els últims vint anys, de diferents blocs de continguts, especialment de relacions i canvi —concretament sobre àlgebra i dependència funcional—, estadística i geometria (Vilatzara, 2005, 2017). El format de les propostes és molt variat, des de tallers a la Sagrada Família de Barcelona (Vilatzara, 2015, 2017) fins a seqüències didàctiques per a l'ESO, passant pels Projectes Matemàtics (Sol, 1998, 2007) i Vilatzara (2001). Part d'aquestes produccions es poden trobar a la web del Grup Vilatzara en el portal de l'ICE de la UAB i a diferents publicacions com *Matemàtiques i història al Maresme* (Vilatzara, 2000, 2001, 2002) i *¿Es posible viajar con las matemáticas?* (Vilatzara, 2006), llibre que recull sis propostes en les quals treballem la introducció a la trigonometria, les transformacions geomètriques, les coordenades cartesianes, les relacions quantitatives, les relacions numèriques, les fórmules i les equacions equivalents. També es poden trobar aportacions a congressos, com ara «Álgebra en contexto» (Vilatzara, 2009).

En aquest article presentaré, en nom del Grup Vilatzara, la proposta «Dels ibers a l'àlgebra», que forma part d'una seqüència didàctica d'iniciació a l'àlgebra i a la dependència funcional als primers cursos de l'ESO.

Reconstruir el passat perdut, usant eines matemàtiques: la proposta contextualitzada

L'arqueologia utilitza freqüentment recursos matemàtics en el seu treball de recerca. La població que vivia en un poblat ibèric pot estimar-se a partir del nombre i la mida dels habitatges excavats, del nombre i el volum de les sitges per al gra, o dels recipients per al vi o l'oli, i/o pel fet que es disposi d'un edifici públic amb dues plantes, com és el cas del poblat d'Ilduro, a Cabrera de Mar. Es poden fer altres estimacions: l'alçària dels habitants es pot deduir de la que calculem per a les seves cases, o la composició de les unitats familiars es pot saber a partir de les superfícies dels habitatges.

Però del poblat només queden restes cobertes de vegetació, pedres alineades que marquen les parets d'algunes cases, restes de muralla i de torres de defensa, alguna base de columna per a l'edifici gran... Aquí és on entren en acció les eines matemàtiques a fi de facilitar la reconstrucció virtual del poblat.

A prop del poble de Cabrera de Mar, sota el castell de Burriac, hi ha un poblat ibèric que té més de dos mil anys: Ilduro. Fem una sortida de matemàtiques per visitar les restes que en queden i fer algunes activitats matemàtiques com ara mesurar, dibuixar croquis a escala, fer localitzacions en plànols, etc. Amb aquestes dades recollides pels diferents equips, treballem a l'aula i tractem d'estimar la població que hi vivia i de fer la reconstrucció virtual dels edificis del poblat. Usem el programa SketchUp, un programa per fer models en 3D, per a la reconstrucció virtual. Posteriorment, fem un taller de reconstrucció de peces de ceràmica a partir d'un fragment.

Mirant al nord des d'Ilduro veiem el castell de Burriac al cim del turó.

Utilitzem eines matemàtiques com l'escala, l'orientació, la funció lineal, l'estimació, algunes propietats de la circumferència, el pendent...

Disposem de plànols: de la zona geogràfica on es troba l'institut i de la zona arqueològica que hem d'estudiar; de la ruta per carretera i camins fins al poblat, i també del poblat ibèric excavat. Aquests plànols es treballen en aspectes de localització, orientació i escala. També cada equip disposa d'una cinta mètrica de 30 m i d'una de 2 m.

Pedres grans, alineacions, disposicions perpendiculars.

Preparació de la sortida

A l'aula comencem per discutir el punt clau de la sortida: recollir les dades que necessitarem per fer la reconstrucció virtual de diferents edificis del poblat ibèric. Després debatem sobre l'ús dels plànols de diferents escales, el recorregut que farem amb autobús i el que farem a peu, i la informació que buscarem una vegada dins del poblat (direccions, punts de referència, distàncies, localitzacions de les muralles, l'edifici públic, les cases amb habitacions, les cases unifamiliars, l'entrada amb dues torres...).

L' entrada del poblat, amb la base de dues torres, una a cada costat.

Prenent mides per al croquis.

Un punt molt important és el reconeixement de restes ibèriques, diferenciant-les de parets i murs posteriors, que han fet servir durant segles tant pagesos com ramaders per preparar

Convé portar guants a causa de l'estat actual del poblat.

A l'edifici públic, l'alumne assegut usa la base d'una columna per seure...

terrasses en terrenys inclinats, per cerclar els ramats o bé construir cabanes per als estris o com a refugi en cas de tempesta.

Per poder fer aquesta identificació es mostren dues característiques que poden indicar l'antiguitat: en primer lloc, la mida de les pedres que formen la base observada (les restes ibèriques es componen sovint amb pedres de mides considerables que un pagès no usaria mai perquè no li sortiria a compte l'esforç de tallar-les i traslladar-les per fer un mur de contenció d'una terrassa per plantar-hi olivera o vinya); en segon lloc, els angles de 90° (en els murs de contenció no servirien de res, però es poden confondre amb cabanes més recents). El fet de situar-nos dins d'un poblat ja excavat ajuda molt a evitar confusions, però l'estat de deixadesa del poblat fa d'aquesta primera part un descobriment que no entusiasma l'alumnat.

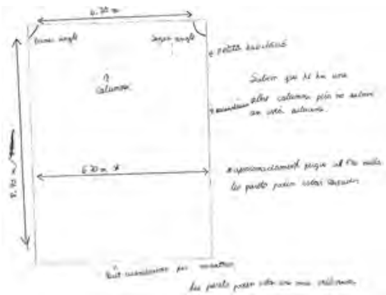
El descobriment, un repte per a tothom

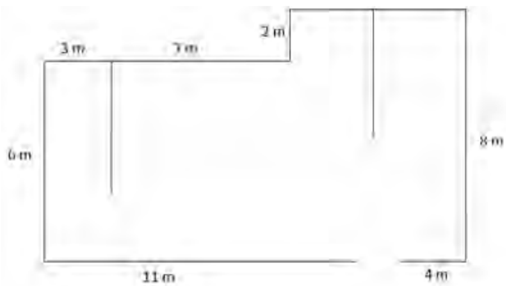
Una de les preguntes clau que posa en marxa l'activitat és: com pot ser que els arqueòlegs puguin saber com era una casa o un edifici a partir de les restes de pedres que queden en una excavació? Les pedres marquen, insinuen la direcció de les parets que tenia l'edifici, però... i l'alçària? Buscant com s'ho feien els arqueòlegs, el Grup Vilatzara va conèixer el mètode usat i l'eina matemàtica indispensable per aplicar-lo.

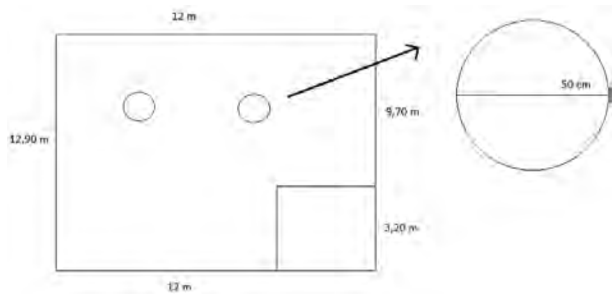
Es basa en dos fets, un d'ells ben conegut i l'altre potser no tant.

- És ben sabut que un mur amb una base més ampla permet aconseguir més alçària. Una filera de maons, posat l'un damunt de l'altre, permet aixecar la paret 1 m aproximadament, i menys en un terreny que no sigui del tot pla; però si usem maons que tinguin una base amb el doble d'àrea, més quadrats, arribarem ben bé a 2 m sense que ens caiguin els de dalt.
- Els arqueòlegs coneixen des de fa molts anys aquest fet físic, que van aprendre dels arquitectes. En arquitectura, des de fa segles es calcula quina amplària ha de tenir el

mur per arribar a certa alçària. Aquesta relació alçària del mur / gruix (*H*/*E*) —que permet aconseguir amb seguretat que no caurà— depèn, evidentment, dels materials usats, de les tècniques disponibles, etc. Això fa que al llarg de la història cada cultura hagi aconseguit edificis d'una certa alçària. El tipus d'edifici també determina la relació, ja que per a un edifici públic, amb més d'una planta (o per a una catedral o un palau en cultures posteriors), els arquitectes s'hi esforçaran molt més que per a una simple casa d'un poblat. Així doncs, arribem a la conclusió que cada civilització té una raó *n* entre alçària/gruix pròpia, entre dos marges que poden ser amplis però determinats a partir de les restes trobades d'aquella civilització. Per exemple, els poblats ibèrics d'Ullastret, Cerro de los Santos o Campello, que han conservat alguns edificis molt complets, ens poden proveir de les dades numèriques que ens permetin establir la raó de proporcionalitat buscada per la cultura ibèrica de la Península (Gracia, Munilla, García, 1994). Es va definir, per tant, un concepte de delimitació per a l'arquitectura ibèrica d'un mòdul constructiu segons un patró de mesures proporcional. Si considerem tant la part baixa de pedra com la de tovot del damunt, que culmina la paret, a un gruix (*E*) d'uns 0,40 m correspon una alçària entre 2,4 i 3,6 m. És a dir, un anomenat *factor de resistència n* de valors entre 6 i 9 que, per a edificis grans i alts, pot arribar a ser de 12. La fórmula, per tant, queda així: $H = n \cdot E$.







Alguns exemples dels croquis a partir de la presa de dades sobre el terreny d'Ilduro: en els dos primers, d'una casa gran amb separació d'estances o bé habitacions. El tercer és l'edifici públic, amb dues columnes. No estan a escala.

Aquesta feina de determinar la raó de proporcionalitat *H*/*E* la fa l'alumnat a l'aula a la vista de les dades d'alguns d'aquests poblats. Ha de calcular el *factor de resistència* per a habitatges (primera taula) i per a edificis grans (segona taula).

Poblat ibèric	*E* (m)	*H* (m)	Factor de resistència *n* per a edificis petits
Cerro de los Santos	0,40	2,40	
Sant Miquel de Llíria	0,43	3,00	
Ullastret A	0,45	2,90	
Ullastret B	0,40	3,60	

Poblat ibèric	*E* (m)	*H* (m)	Factor de resistència *n* per a edificis grans
Cerro los Santos	0,60	7,40	
Sant Miquel de Llíria	0,43	4,90	
Ullastret A	0,65	7,90	
Ullastret B	0,40	4,72	

Aquest resultat per a *n*, calculat per l'alumnat, és el que usarem per a la reconstrucció virtual dels habitatges i l'edifici públic d'Ilduro a partir de les dades recollides *in situ* pels grups de treball.

Es produeix una discussió interessant sobre els diferents resultats de la raó que hem obtingut, el rang acceptable per a les nostres reconstruccions i el valor que usarem per a cada edifici del poblat. Aquestes discussions ens porten a debatre sobre l'ús d'eines matemàtiques en el món real, els errors i les estimacions, el grau de confiança que hem de donar a les conjectures, etc. La comparació amb el context purament matemàtic i la idea de demostració apareixen inevitablement.

Amb aquestes taules l'alumnat ha d'establir quina expressió ens donarà l'alçària del mur (H) a partir de conèixer el gruix (E). Passem, doncs, al llenguatge simbòlic més senzill, però que ja representa una relació entre variables.

Seguidament se'ls proposa d'esbrinar quines de les fórmules següents serveixen i quines no, i en cada cas han d'argumentar la resposta:

$H = E \cdot n$		$H = n \cdot E$	
$H = E/n$		$E = H/n$	
$H/E = n$		$E = n/H$	

Cal assegurar que l'alumnat troba més d'una manera de reconèixer quines fórmules són certes i quines no (per exemple, substituint valors numèrics iguals o aplicant propietats com la commutativa).

També se'ls demana que agrupin les que volen dir el mateix i expliquin per què creuen que se les anomena *fórmules equivalents*.

Per acabar aquest apartat, se'ls demana que trobin totes les fórmules equivalents a la següent: $a = b \cdot c$.

Càlcul de l'alçària dels murs

Una vegada han tornat del poblat amb les dades del gruix dels murs, cada equip calcula l'alçària estimada usant la fórmula lineal $H = n \cdot E$

Casa núm.	$E(m)$	n	$H(m)$
1			
2			
3			
4			

En el cas del poblat d'Ilduro, hi ha un edifici públic de dues plantes que permet l'ús de la raó més alta. La presència de les bases de dues columnes i l'àrea de la planta ens indiquen la importància de l'edifici. Cal recordar que cal usar la raó corresponent segons si es tracta d'un edifici gran o petit.

Una ampliació: Rondelet

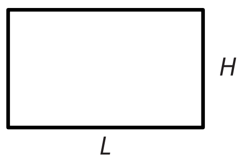
A principis del segle XIX, Jean Baptiste Rondelet —arquitecte que va acabar el Panteó de París— va plantejar en el seu tractat sobre arquitectura (Rondelet, 1802) una fórmula que desenvolupa l'esmentada anteriorment ($E = H/n$) i que porta a càlculs molt més rigorosos:

$$E = \frac{H}{n} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + H^2}}$$

on apareix una variable afegida a les anteriors, L, que és la longitud del mur considerat.

Aquesta expressió, que, d'entrada, espanta els alumnes, ens permet ajudar-los a comprendre com s'han d'analitzar expressions complicades però que, ben mirades, contenen pistes sobre el seu origen. Per exemple, l'arrel quadrada de la longitud al quadrat més l'alçària al quadrat, què ens pot suggerir?

Per facilitar aquesta observació, podem fer un dibuix del mur, en el qual apareix ràpidament la idea de la diagonal considerada hipotenusa d'un triangle rectangle.



Per tant, Rondelet pren en consideració la longitud del mur perquè un mur llarg presentarà més dificultats que un mur curt. Però la dificultat també depèn de l'alçària, per això busca la relació entre llargària i alçària i la troba en la diagonal del mur. Pitàgores està servit.

Lliguem el llenguatge simbòlic amb el món real.

Evidentment, a l'arquitecte li interessa el gruix per obtenir una alçària segura, mentre que per als arqueòlegs és a la inversa: volen l'alçària que correspon a un gruix mesurat. Per tant, s'imposa un aïllament que per als primers cursos de l'ESO resulta una mica difícil. Tot i així, és una bona oportunitat per donar sentit a aquestes manipulacions algèbriques tan habituals a les aules.

Rondelet aplicat al nostre poblat

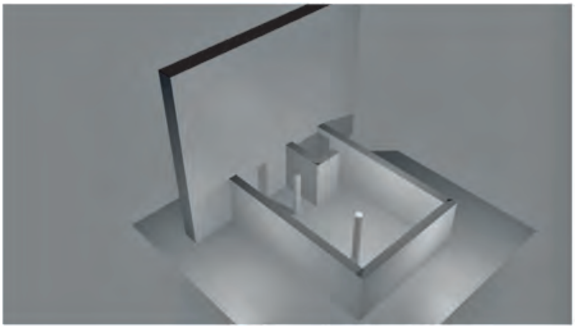
Ara cada equip ha de calcular de nou les alçàries usant la fórmula de Rondelet. Utilitzen un full de càlcul en el qual van introduint les dades i van avançant en la resolució de la fórmula. Això provoca errors i discussions sobre les prioritats de les operacions.

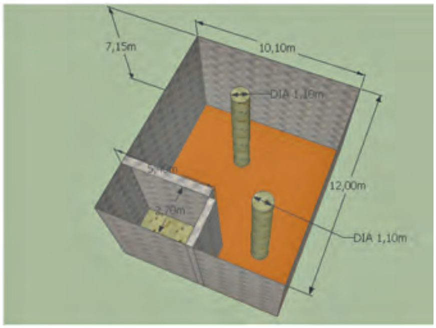
Casa núm.	$E(m)$	n	$H(m)$ fórmula senzilla	$L(m)$	$H(m)$ fórmula Rondelet
1					
2					
3					
4					

En disposar de les dues alçàries calculades usant la fórmula lineal o bé la de Rondelet, s'obre un debat sobre el significat de les diferències, la versemblança, el marge d'error en cada cas, la millora obtinguda quan usem més variables i eines algèbriques més potents. Queda clar que el model proporcional només era una primera aproximació al fenomen, i que si volem un millor ajust a la realitat necessitem usar una fórmula no proporcional més complexa.

La reconstrucció virtual

Ara toca usar l'eina informàtica per representar l'aspecte que podria tenir l'edifici estudiat. La utilització del programa SketchUp és força intuïtiva i els equips no tenen grans dificultats per usar-lo. Cal ser exigents amb el rigor en l'ús de les mesures fetes i calculades, cosa que ens assegura que les proporcions seran correctes. El resultat els és sorprenent: els alumnes se sorprenen que hagin arribat a aconseguir aquesta imatge a partir d'unes pedres alineades i apilades al terra. Aquí es fa un pas en l'empoderament de l'alumnat i en la confiança en les matemàtiques com a eina per comprendre el món.





Dues de les representacions de la reconstrucció de l'edifici públic, la d'en Gerard i la de na Lia.

Un bocí de ceràmica

L'alumnat, ara que ha vist les possibilitats de les matemàtiques per reconstruir un habitatge,

comença a creure que podrem reconstruir una peça sencera de ceràmica a partir d'un bocí, encara que no imagina com ho farà.

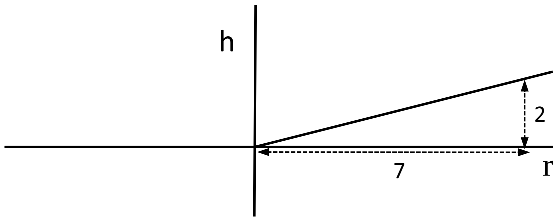
Se subministra a cada equip un bocí de ceràmica que tindrà part de la boca o de la base. Aquest detall és important per assegurar que podran situar el centre de la circumferència de la base o de la boca de la peça.

Curs rere curs, l'alumnat intenta trobar el centre a partir de l'arc de circumferència del tros de què disposen, però creuen que el trobaran usant la tangent a la circumferència i la seva perpendicular. Convé deixar-los que s'equivoquin, fins que s'adonin que el punt que cerquen queda situat com a tall entre rectes (dues cordes).

El pendent que identifica

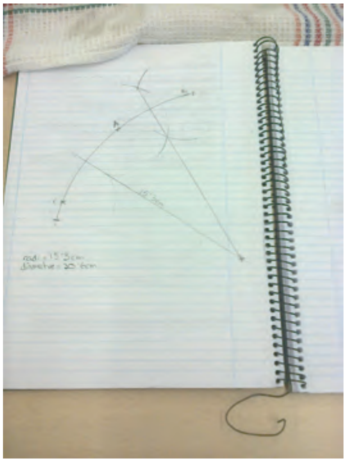
Quan vam saber com els arqueòlegs establien quina mena de peça tenien entre les mans a partir d'un petit trosset excavat, ens va sorprendre: el que identifica el tipus de peça és una relació entre dues variables, el diàmetre i l'altura de la vora. Van deduir empíricament aquesta relació quantitativa, la qual es basa en la idea del pendent de la recta imaginària que passa per la vora i pel centre de la base de la peça. És ben evident que es tracta d'una bona idea: altura/radi de la base és un bon indicador de la forma de plat, de bol o de gerra.

El primer que es planteja als alumnes és que trobin què és el que caracteritza un plat que fa que sigui ben diferent d'una gerra. Una vegada establert que no és el diàmetre o l'altura de la vora, sinó la relació entre les dues variables, se'ls demana si són capaços de determinar la relació que hi ha entre altura i diàmetre en el cas d'un plat, en el d'un bol i en el d'una gerra.



El pendent que identifica: un plat.

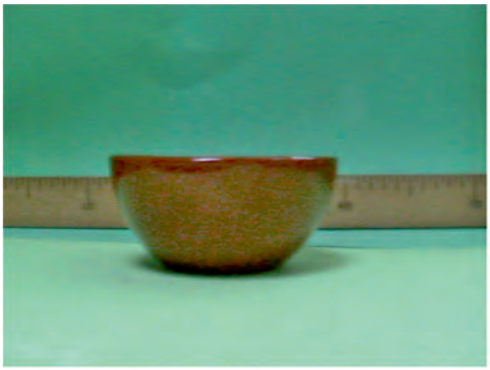
Les peces petites es poden treballar en DINA4.



Trobar el centre de la circumferència amb un mínim de rigor demana l'ús d'eines matemàtiques.

Tenim peces grans, de sitges, que requereixen treballar amb paper d'embalar.

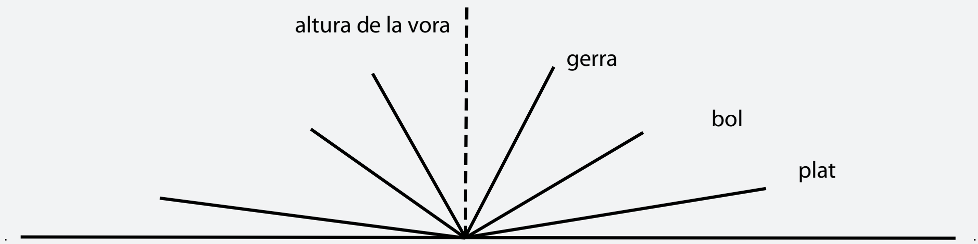
La boca de la sitja costa més de dibuixar amb exactitud.



Per a aquesta activitat cal disposar a classe d'un seguit de mostres de tots tres tipus de peces, perquè l'alumnat ha de generalitzar el que veu en cadascuna d'elles per arribar a la relació entre variables que busquem. La relació que utilitzen els arqueòlegs és la següent:

Clau d'identificació

En el dibuix, exemples per a gerra, bol i plat



Fórmules que identifiquen:

Per a una gerra: altura $>$ diàmetre

Per a un plat: altura $\leqslant 2/7$ radi

Per a un bol: altura $\leqslant 1/3$ diàmetre

Atenció al fet que en arqueologia s'usa el diàmetre en uns casos i el radi en d'altres. Els valors intermedis entre gerra i bol no els consideren perquè gairebé mai no apareixen peces amb aquests valors.

Per acabar

El treball desenvolupat en aquesta seqüència que proposem permet treballar les proporcions, la geometria, l'àlgebra i la funció proporcional com a eines valuoses per matematitzar fenòmens o situacions de la vida real.

La proposta presentada engloba tasques riques i també una gestió rica de l'activitat a l'aula (Vilella, 2009, 2010, 2013). La matematització és una resposta coherent i modelitzadora d'un procés de demanda que permet la reflexió i la construcció col·lectiva del coneixement, atès que desenvolupa competències matemàtiques dels nivells reflexiu i connectiu i facilita l'atenció a la diversitat (Gorgorió *et al*., 2002).

La gran importància del context en aquesta proposta demana un final metareflexiu que porti l'alumnat a reflexionar sobre què ha après, com ho ha après i com ho pot aplicar a noves situacions. Ja és a punt per al pas a la matematització vertical (Freudenthal, 1991), d'estructuració i simbolització.

Referències i bibliografia

Bishop, J.A. (1985). The social construction of meaning. A significant development for Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 24-29.

Bishop, J.A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Temas de Educación, 49. Barcelona: Paidós.

Boaler, J. (1993). The role of contexts in the matemathics classroom: do they make mathematics more real? *For the Learning of Mathematics*, 13(2), 12-17.

Brockbank, A., McGill, I.(2002). *Aprendizaje reflexivo en la educación superior*. Madrid: Morata.

Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goñi, J. M. (coord.)(2003). Contextos para el aprendizaje de las matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 32, monogràfic. Barcelona: Graó.

Gorgorió, N., Planas, N., Vilella, X. (2002). Immigrant children learning mathematics in mainstream schools. Dins G. Abreu, A.J. Bishop, N.C. Presmeg (ed.). *Transitions Between Contexts of Mathematical Practices*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 23-52.

Gracia, F., Munilla, G., García. E. (1994). Modelos de análisis de la arquitectura ibérica. Espacio público y construcciones religiosas en medio urbano. *Cota Zero*, 160, 14-21.

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. Dins W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, M. Niss. (eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. *The 14th ICMI Study*. Nova York: Springer Science/Business Media, LLC, 137-144.

Korthagen, F.A.J. (2001). *Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica reflexiva en el oficio de enseñar: profesionalización y razón pedagógica*. Barcelona: Graó.

Romberg, T., De Lange, J. *et al.* (1999). *Matemáticas en contexto*. Wisconsin: Center for Maths Education/Enciclopedia Britannica.

Rondelet, J.B. (1802). *Traité théorique et practique de l'art de bâtir*. París: Chez Firmin Didot Frères, Libraires.

Santacana, J. (coord.) (2006). L'arqueologia o el diàleg amb els objectes. *GUIX Elements d'Acció Educativa*, monogràfic. Barcelona: Graó.

Schön, D.A. (1983). *The reflective practitioner*. Nova York: Basic Books.

Sol, M. (1998). Proyectos matemáticos en la ESO: cómo los evaluamos. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 17, 105-114.

Sol, M., Jiménez, J., Rosich, N. (2007). Competencias y proyectos matemáticos realistas en la ESO. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 46, 43-60.

Sol, M. (2008). *Projectes matemàtics a l'educació secundària obligatòria*. Tesi doctoral.

Vilatzara, Grup (2000). *Matemàtiques i història al Maresme. Íbers i romans.* ICE-UAB/Ajuntament de Mataró/Ajuntament de Cabrera de Mar.

Vilatzara, Grup (2001). *Matemàtiques i història al Maresme. Modernisme*. ICE-UAB/Ajuntament de Mataró/Ajuntament de Vilassar de Mar.

Vilatzara, Grup (2002). *Matemàtiques i història al Maresme. Torres de guaita*. ICE-UAB/Ajuntament de Mataró/Ajuntament de Cabrera de Mar/Ajuntament de Vilassar de Mar.

Vilatzara, Grup (2001). Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 46, 29-47.

Vilatzara, Grup (2005). Àlgebra a l'ESO per a tothom. Reinventant a partir del context. *BIAIX*, 24, 41-47. FESPM.

Vilatzara, Grup (2006). *¿Es posible viajar con las matemáticas? Viaje y matemáticas.* Colección Matemáticas y Entorno, 1. Badajoz: FESPM/ICE-UAB.

Vilatzara, Grup (2009). Álgebra en contexto. Dins *Actas de las XIV JAEM*. Girona.

Vilatzara, grup (2009). Taller ¿Álgebra sin incógnitas? Una introducción competencial al álgebra. Dins *Actas de las XIV JAEM*. Girona.

Vilatzara, Grup, Martín, A., Vilella, X. (2015). Secretos guardados en piedra. Superficies regladas en la Sagrada Familia de Antonio Gaudí. Dins *Actas de las XVII JAEM*. Cartagena.

Vilatzara, Grup, López, A., Mas, B., Sol, M. (2015). Secretos guardados en piedra. Superficies regladas en la Sagrada Familia de Antonio Gaudí. Dins *Actas de las XVII JAEM*. Cartagena.

Vilatzara, Grup, Vilella, X, (2016). L'estadística, més enllà dels paràmetres. Dins *Actes del Congrés d'Educació Matemàtica* CE^2M. Barcelona.

Vilatzara, Grup, Sol, M., Vilella, X. (2017). Más allá de los parámetros. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 76, 32-38.

Vilella, X. (2007). Matemáticas para todos. Enseñar en un aula multicultural. *Cuadernos de Educación*, 53. Barcelona: HORSORI/ICE Universitat de Barcelona.

Vilella, X., Giménez, J. (2008). Teacher-researchers and encultured negotiation of meanings. Dins Czarnocha, B. (ed.). *Handbook of Mathematics Teaching Research*. Cracòvia: University of Rzeszów.

Vilella, X. (2009). El diálogo en el aula de matemáticas como comunidad de prácticas. Dins Planas, N., Alsina, A (coords.). *Educación matemática y buenas prácticas*. Biblioteca de Aula, 257. Barcelona: Graó, 167-177.

Vilella, X. (2010). Enriquiment competencial de tasques matemàtiques. *BIAIX*, 28 i 29.

Vilella, X. (2013). Algunes claus del desenvolupament competencial a l'aula. *Perspectiva Escolar*, 367, 54-59.