

l'espai de les associacions

Desè aniversari de l'Associació Catalana de GeoGebra. Divulgació d'una eina imprescindible

Pep Bujosa (ACG)

.....

Enguany es compleix el desè aniversari de la creació de l'Associació Catalana de GeoGebra. Un grup de professors de secundària i d'universitat vam decidir el 2008 respondre a la crida feta per Markus Hohenwarter, autor del programa GeoGebra, per tal que els usuaris s'associessin per territoris i aquestes associacions passessin a formar part de l'International Geogebra Institute (IGI).

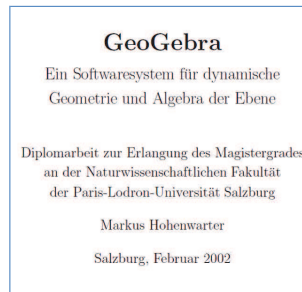
D'aquesta manera vam constituir l'Associació Catalana de Geogebra (ACG), la vam registrar i vam demanar el seu reconeixement com a seu catalana de l'IGI, cosa que se'ns va concedir.

L'ACG té com a objectius i així consta en els seus estatuts:

- Potenciar projectes de recerca, el seguiment d'experiències i la divulgació de continguts
- Crear, recopilar, adaptar i traduir material didàctic
- Fomentar activitats de formació i impulsar-ne el reconeixement dins del Pla de Formació del Departament d'Educació
- Desenvolupar una estructura de suport al professorat
- Impulsar el disseny del GeoGebra mitjançant propostes de millora

Com va començar tot?

El GeoGebra va néixer l'any 2002 com a part del projecte de la tesi doctoral de Markus Hohenwarter a la Universitat de Salzburg.

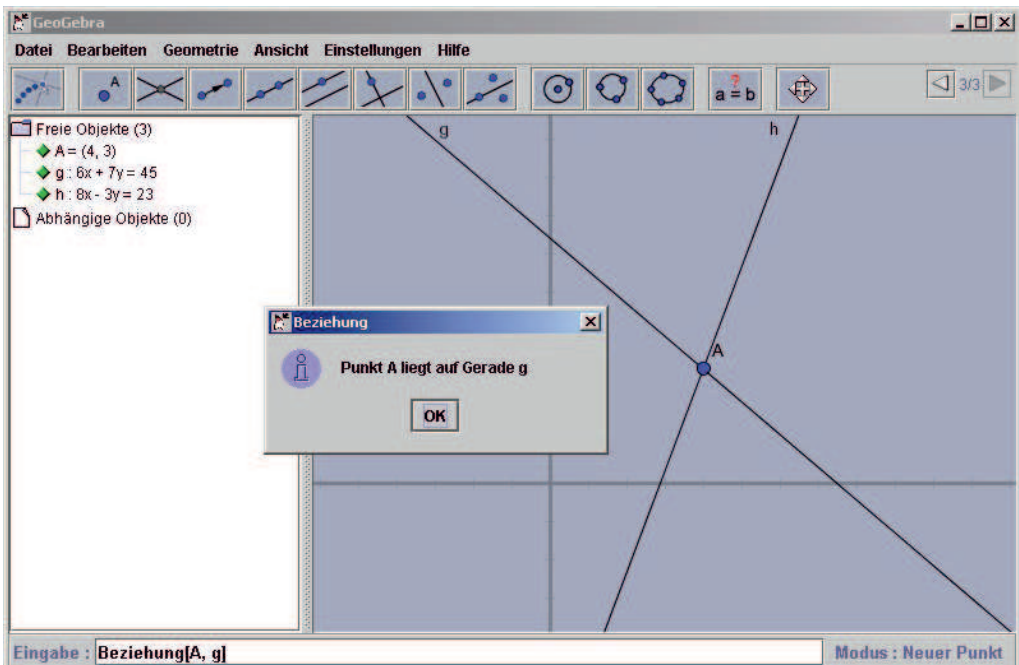


En aquells moment existien programes CAS (*computer algebra systems*), com el Derive i el Mathematica, i programes DGS (*dynamic geometry software*), com el Cabri, el Cinderella, l'Euklid Dynageo, el Geometer's Sketchpad, el Geonext i el Ruler and Compass. Per altra banda, les calculadores TI-92 ja incorporaven aplicacions amb els dos tipus de programari, però amb poca qualitat visual.

A partir d'aquesta realitat i davant les mancances que veia en tot aquest programari, en Markus crea un programa per a l'aprenentatge de les matemàtiques (inicialment, sobretot la geometria) que reuneix els avantatges dels diferents sistemes, que connecta en tots dos sentits la part algebraica i la part gràfica o geomètrica dels objectes matemàtics i que té una presentació i una notació prou clares perquè l'alumnat el pugui fer servir ràpidament.

A tots aquests avantatges hi hem d'afegir la característica que és un programari lliure.

Aquesta primera versió va aparèixer al gener del 2002 i tenia aquest aspecte:

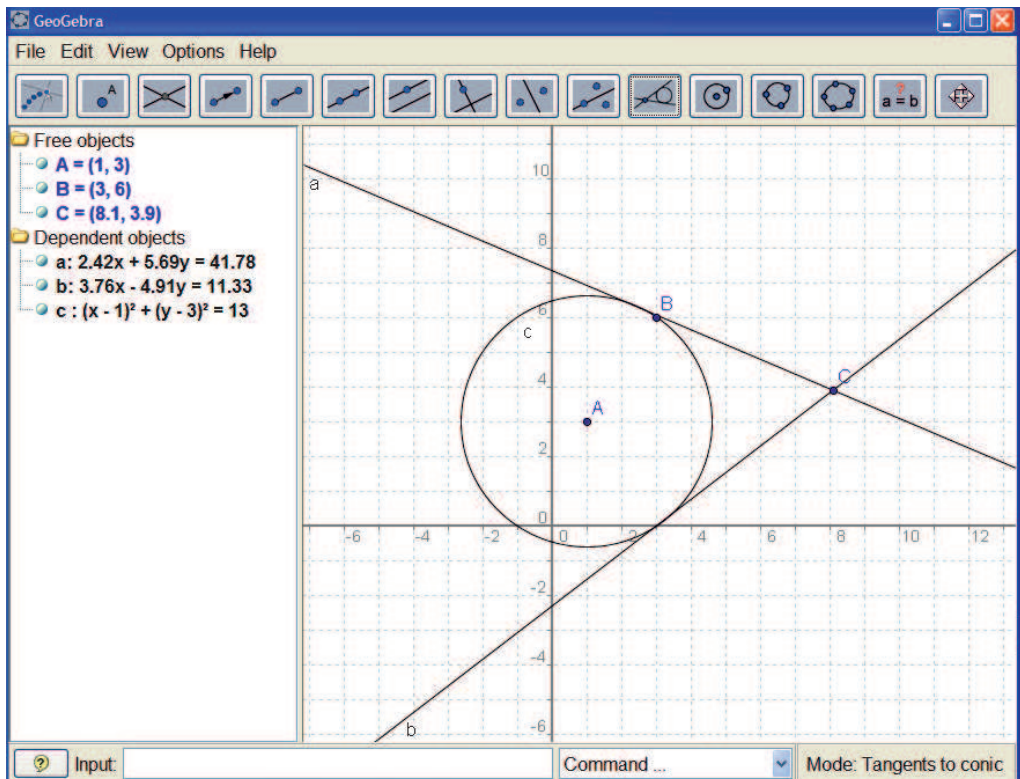


Imatge treta de la tesi doctoral.

En aquesta primera versió observem que:

- És, sobretot, de geometria.
- Hi ha una relació biunívoca entre la finestra gràfica i l'algebraica.
- Només s'hi poden entrar funcions polinòmiques de primer i segon grau i còniques.
- S'hi pot operar amb vectors.
- No s'hi poden introduir textos.
- No hi ha graella. Els eixos són molt simples.
- No hi ha l'eina segment.
- No hi ha l'eina polígon.
- Dona molta importància a les còniques.
- Hi ha incorporada l'eina de relació entre objectes.
- Els idiomes disponibles són l'anglès i l'alemany.

Després de diverses actualitzacions, el gener del 2004 apareix la versió 2.0, que presenta una gran millora en tot. Hi apareixen les gràfiques de funcions, les derivades i les integrals.



I a Catalunya, què?

En aquell temps, l'any 2004, el programa era desconegut a Catalunya, tret de molt poques excepcions. En relació amb les matemàtiques, en els catàlegs de formació del Departament d'Ensenyament/Educació d'aquests anys hi trobem:

Anys 2003 i 2004

- Aplicacions educatives del full de càlcul en l'entorn Excel
- Desenvolupament d'activitats en l'entorn Clic
- Estadística amb Excel
- Geometria amb Cabri-Géomètre-II (Windows)
- Ús de la calculadora Wiris com a recurs didàctic

Aquesta era la formació oficial. En els diferents instituts de ciències de l'educació (ICE), el Derive també era un programa que es feia servir, i menys el Mathematica. Per tant, a part d'aquests, els programes més emprats per a l'ensenyament de les matemàtiques eren la Wiris, el Clic i l'Excel. Fixeu-vos que aquests programes no eren lliures. Tot i així, des del Departament es comença a apostar pel Linux i per l'ofimàtica lliure.

També s'ha de remarcar que és el moment de la creació i el desenvolupament dels Quaderns Virtuals, que també aporten aplicacions puntuals a l'ensenyament de les matemàtiques.

Any 2005

- Curs de full de càlcul avançat
- Desenvolupament d'activitats educatives en l'entorn JClick
- Estadística amb el full de càlcul
- Geometria amb Cabri-Géomètre-II
- Internet i les matemàtiques a primària
- Internet i les matemàtiques a secundària
- Introducció al full de càlcul
- La calculadora Wiris com a recurs didàctic

A part dels retocs i les reconfiguracions dels cursos anteriors, apareixen dos cursos específics de matemàtiques a primària i a secundària. Aquests dos cursos són molt innovadors perquè recullen tot tipus de materials i d'activitats accessibles per Internet, però sense cap referència al GeoGebra, que ja es coneix a altres llocs fora de Catalunya.

Així doncs, puc afirmar sense por d'equivocar-me que el començament del coneixement col·lectiu i, més endavant, massiu del GeoGebra al nostre país va començar als despatxos de l'antiga Subdirecció General de Tecnologies de la Informació (SGTI) cap al mes d'abril del 2005. En aquells moments hi havia un interès creixent en el programari lliure i un debat sobre la implantació d'aquest programari als centres d'ensenyament catalans. En aquest context, Santi Manrique ens va demanar a Jaume Bartrolí i a mi que cerquéssim programes de matemàtiques d'aquestes característiques. Després d'un temps de recerca i de rebuig de diferents aplicacions, vam quedar-nos amb dos programes: Geonext i GeoGebra. La versió que vam provar va ser la 2.5 i, evidentment, quan vam veure les possibilitats del GeoGebra ja no vam dubtar més. En una reunió amb Santi Manrique i Francesc Busquets el vam presentar i vam proposar que es traduís i es promocionés des del Departament. Aquesta proposta, es va acceptar i vam començar la feina.

En pocs dies vaig aprendre a utilitzar les eines bàsiques i vaig fer una petita web on vaig incloure les meves primeres construccions i aplicacions. Estava convençut que aquest

programa ajudaria a canviar la metodologia de les classes de matemàtiques, com així ha estat.

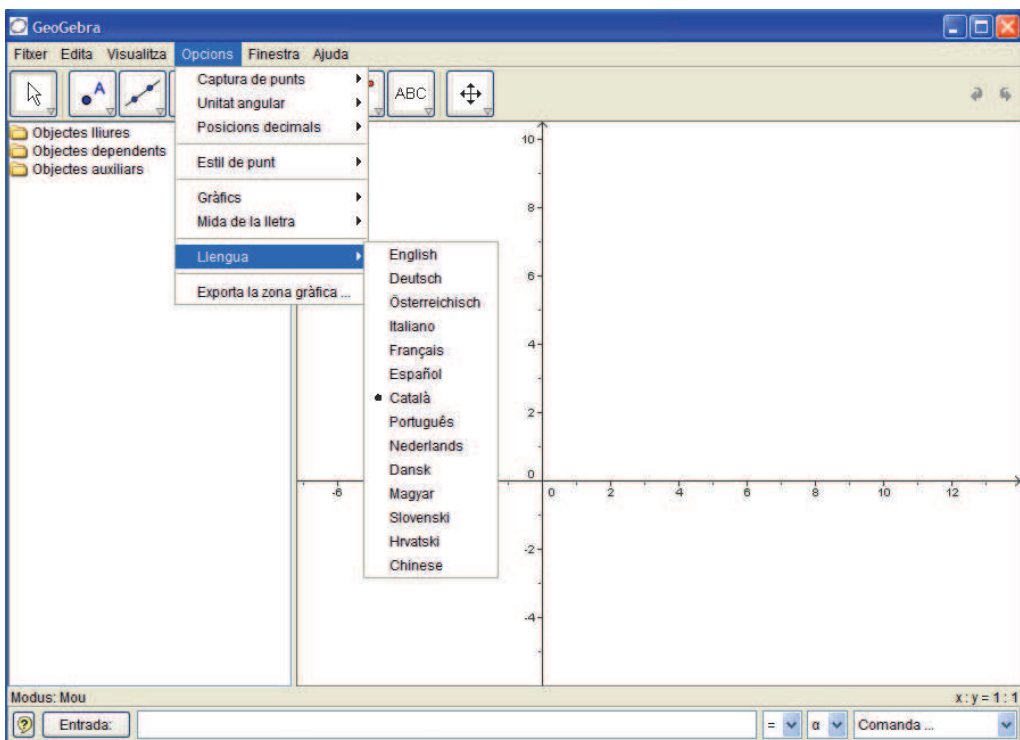
En aquell moment el programa estava disponible en onze llengües (alemany, anglès, castellà, xinès, croat, danès, eslovè, francès, hongarès, italià i portuguès). El primer pas per a la difusió del programa era la traducció al català.

El 12 d'abril de 2005 ens vam posar en contacte amb en Markus i ell, immediatament, ens va facilitar els fitxers necessaris per fer la traducció. En el seu missatge de resposta ens deia, entre altres coses:

Many thanks for your interest in translating GeoGebra to Catalan! There is noone working on this yet and you are very welcome to do this translation. Thank you for your intention to support the GeoGebra project in this way!

Jaume Bartrolí va traduir les eines i els menús i Roser Sebastián va fer la traducció de l'ajuda.

La primera versió en català (2.6b) va aparèixer al setembre del 2005.



Després la història ha anat molt de pressa: cursos de formació, cursos dels ICE, cursos en màsters i diplomes de la universitat, intervencions en diverses jornades d'aquí i de fora, fundació de l'ACG, les nostres jornades, aparició de la revista *Cònica*...

El passat mes de febrer vam celebrar la desena edició de les Jornades de GeoGebra de l'ACG. En totes aquestes edicions hem intentat portar experts catalans, espanyols i internacionals

en el programa, que ens han mostrat les novetats que anaven apareixent contínuament. El GeoGebra és un programa molt viu i que està en constant actualització. Cada any hi hem trobat nous al·licients per aplicar a les nostres classes. Per altra banda, en les nostres jornades s'han explicat multitud d'experiències concretes d'aula. Aquest aspecte s'ha valorat molt positivament perquè, al capdavant, les experiències concretes són el millor estímul per atreure nous usuaris i *practicants* de la nova tasca docent.

El GeoGebra, una eina imprescindible

Un dels elements més importants en la pràctica docent de les matemàtiques és la manipulació d'objectes per conjecturar i descobrir determinades propietats. Anton Aubanell, en el seu article «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria» (2015), proposa unes línies d'actuació. A continuació en reproduïm una.

Impulsar la presència a les classes d'activitats que permetin viure, en primera persona, l'experiència de construir coneixement geomètric. Un tipus d'activitat que poden ser útils són les que segueixen, de manera més o menys estricta, quatre etapes:

- Experimentació: explorar, establir contacte amb les idees que estan en joc, temptejar, fer proves, prendre mesures, comparar, contrastar, manipular, construir, etc.
- Descoberta: observar una regularitat experimental, sovint sorprenent, que apareix en proves successives. No es tracta d'un coneixement que ve de fora sinó d'una descoberta personal, resultat de l'experiència.
- Conceptuació: posar en comú allò que s'ha descobert, perfilar bé la idea, sentir-la com a pròpia, esforçar-se a expressar-la correctament, arribar a una formulació compartida.
- Demostració o formalització: passar de la conjectura descoberta a la propietat demostrada a partir d'un raonament lògic. En alguns casos, la demostració no caldrà o no serà possible amb les eines conceptuals de què es disposa o no millorarà la comprensió de la idea i ens quedarem amb la constatació experimental.

A continuació afirma:

Emprar més material manipulable i més programari tipus **GeoGebra** en l'ensenyament de la geometria. El material manipulable i el **GeoGebra** (o altres programes de geometria dinàmica) poden contribuir molt a fer que la geometria escolar recuperi l'experiència, la vivència directa, la intuïció...

Estic totalment d'acord amb aquestes afirmacions. El GeoGebra ha esdevingut una de les eines imprescindibles per al treball a l'aula. Però no només en referència a la geometria, sinó respecte a la pràctica totalitat del currículum de secundària. El GeoGebra no és un programa de geometria dinàmica, sinó un programa de matemàtica dinàmica. A continuació veurem uns quants exemples que ho il·lustren.

Tipus d'activitats

Quan el professor o la professora ja coneix prou el programa, pot fer les seves pròpies aplicacions per portar a classe. Però la manca de domini del GeoGebra no ha de ser un im-

pediment per fer-lo servir. A la xarxa hi ha un magatzem d'aplicacions ja fetes que es poden utilitzar (<https://www.geogebra.org/materials>). Ara bé, potser n'hi ha massa i cal fer una cerca intel·ligent per trobar el que es necessita.

En aquest apartat us presento diferents exemples d'activitats per fer a classe que reuneixen bona part de les característiques comentades en l'apartat anterior. Les he classificant en quatre tipus:

- Construccions geomètriques i representacions gràfiques
- Visualització i descobriment de propietats
- Cerca i comprovació de models i simulacions
- Investigacions i resolució de problemes

Per no allargar-me massa, us explico de manera detallada uns quants exemples. Si en voleu veure més, accediu a <https://www.geogebra.org/m/fVXM6fs4>. També trobareu altres materials al meu espai del magatzem: <https://www.geogebra.org/u/pep+bujosa>.

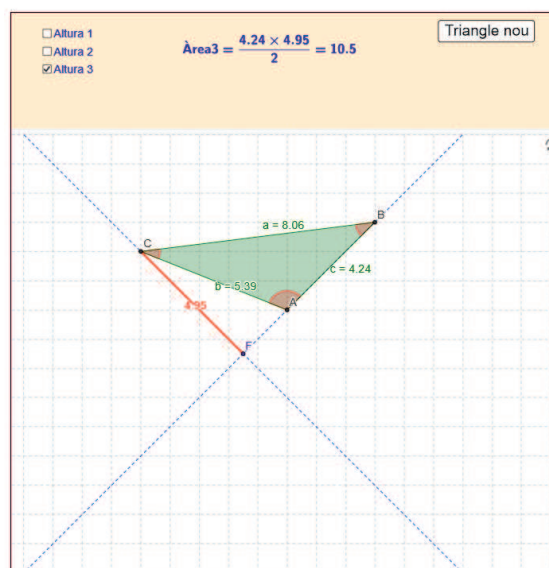
Tots aquests materials són lliures i els podeu baixar, respectant l'autoria i sense finalitats comercials, naturalment. Fins i tot hi podeu fer les modificacions que cregueu oportunes.

Construccions geomètriques i representacions gràfiques

En aquests exemples l'alumnat fa servir el programa per construir i representar gràficament objectes geomètrics o funcions. Aquestes construccions porten associats conceptes i propietats que han treballat en el procés.

Altures d'un triangle

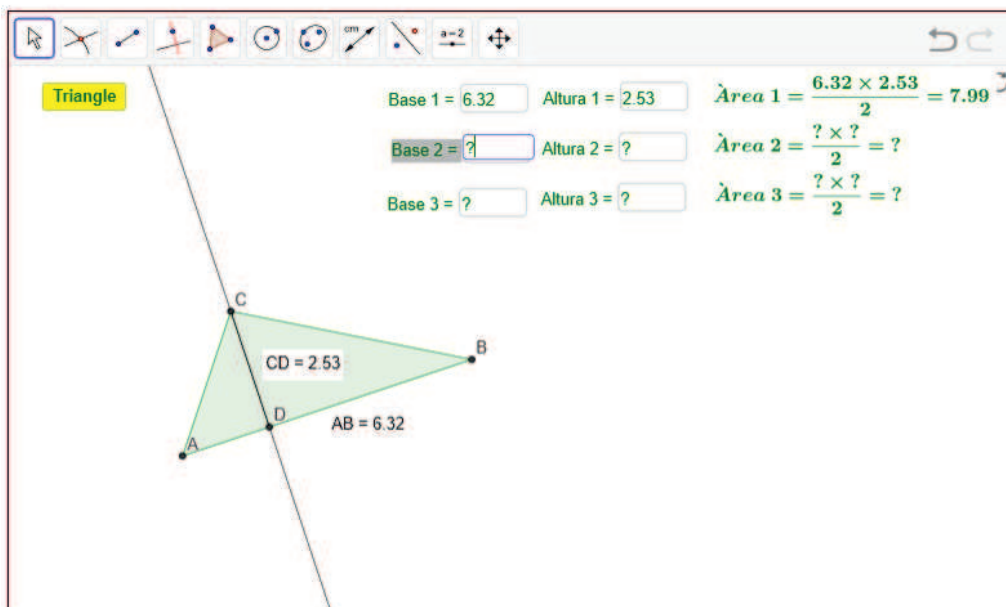
<https://www.geogebra.org/m/DtawMpuX#material/VNdjMw77>



Ens hem trobat moltes vegades amb alumnes que tenen dificultats per construir i mesurar les tres altures d'un triangle, sobretot si no està *ben posat*. Aquesta primera aplicació indica com es dibuixen les tres altures per a qualsevol triangle.

Cada vegada que es prem el botó «Triangle nou» apareix un nou triangle a l'atzar i l'usuari pot triar la representació de cada altura. A més, en cada cas, es calcula l'àrea.

Una vegada l'alumnat ha practicat i ha observat les diferents possibilitats, proposem que faci construccions pel seu compte i calculi l'àrea per a cada base i altura. Per a això farem servir aquesta segona aplicació: <https://www.geogebra.org/m/fVXM6fs4#material/ecaf92HQ>.



Per començar, l'usuari ha de prémer el botó «Triangle» i li apareixerà un triangle a l'atzar. A continuació, fent servir les eines que té a la seva disposició, ha de construir la perpendicular, trobar la intersecció amb la base, mesurar base i altura, escriure aquests valors a les caselles corresponents i observar el càlcul de l'àrea que surt automàticament. Després ha de repetir el procés per a les altres altures i comprovarà, si ho ha fet bé, que l'àrea surt igual o *quasi igual*. En aquest sentit, és interessant comentar entre tots la causa de la manca d'exactitud en alguns casos. Aquesta activitat s'hauria de completar amb la construcció en paper de diferents exemples.

Vegeu més aplicacions d'aquest estil:

- *Els centres dels triangles i les seves propietats.* <https://www.geogebra.org/m/fVXM6fs4#material/PY3JrRPc>
- *Gràfiques de funcions polinòmiques, arrels i factorització.* <https://www.geogebra.org/m/mJugtzKn>
- *Construccions bàsiques.* <https://www.geogebra.org/m/PnbnPhyq>

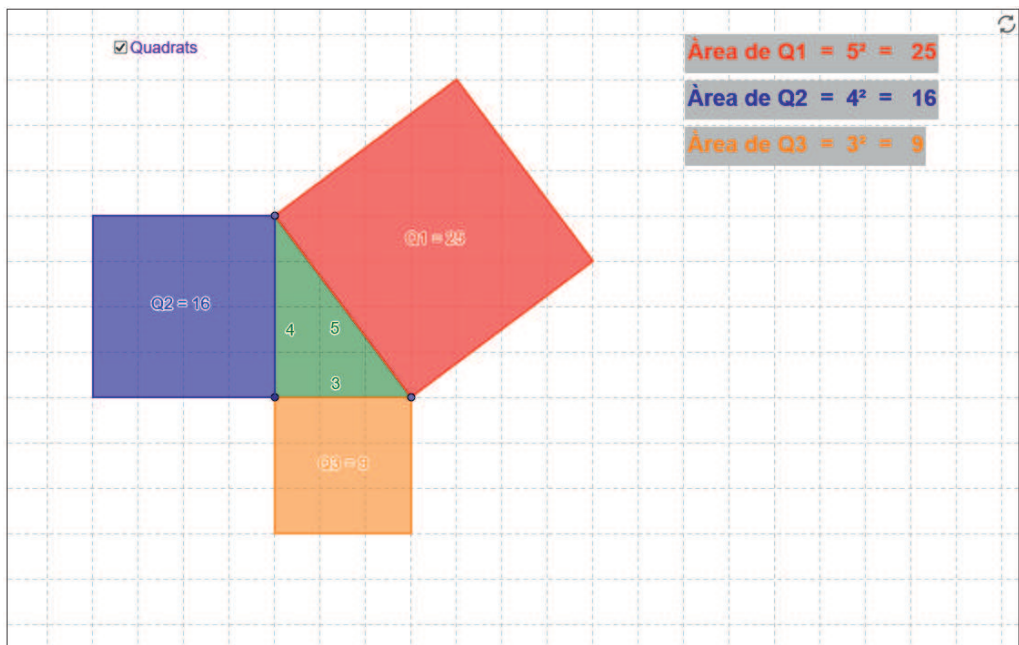
Visualització i descobriment de propietats

Uns dels aspectes més interessants del GeoGebra és la facilitat que dona per fer conjectures i tot seguit comprovar si es poden generalitzar i conceptualitzar fins a esdevenir propietats.

El teorema de Pitàgores

Aquestes dues activitats que proposo són un bon exemple de la manipulació d'objectes per conjecturar una propietat. Vegeu <https://www.geogebra.org/m/Ghn28dx5>.

Comencem restringint la manipulació només a triangles rectangles.



Activa l'opció «Quadrats». Desplaça els vèrtexs d'aquest triangle i observa la relació que hi ha entre les àrees dels quadrats situats en els seus costats.

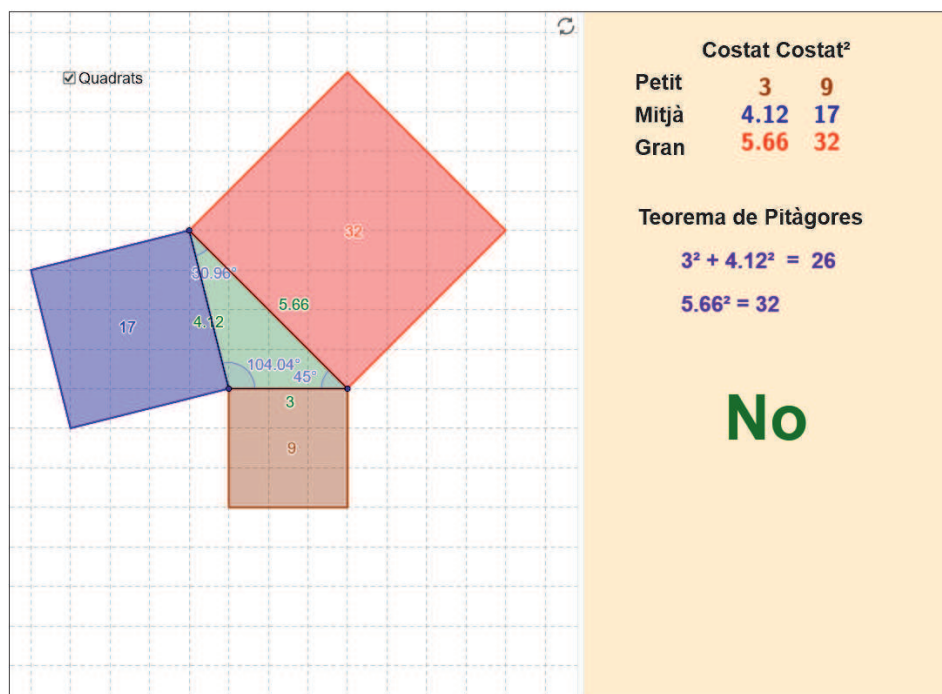
Quina propietat observes?

Com són aquests triangles?

Sigui a la hipotenusa i b i c els catets. Escriu correctament la propietat que has observat. Es complirà sempre?

L'alumnat va movent els vèrtexs del triangle i va observant les corresponents àrees que van sortint. Això sí, sempre surten triangles rectangles. Al final es voldrà que s'escrigui una relació correcta. Això no és immediat i caldrà escriure primer unes quantes relacions numèriques que es vagin comprovant numèricament. Aquesta aplicació també es pot aprofitar per treballar els nombres pitagòrics.

En la segona activitat es proposa que el triangle que s'ha de manipular no sigui obligatòriament rectangle.



Activa l'opció «Quadrats». Desplaça els vèrtexs d'aquest triangle i observa la relació que hi ha entre les àrees dels quadrats situats en els seus costats.

Quines propietats has observat?

Enuncia-les correctament.

Aquí l'alumnat ha d'arribar a la conclusió que el teorema de Pitàgores només es compleix en els triangles rectangles. En els altres es compleixen unes determinades desigualtats. Tot seguit es poden fer les següents activitats proposades en el mateix lloc.

Vegeu més aplicacions del mateix estil:

- Rectes. <https://www.geogebra.org/m/X6F9tzb4>
- Paràboles. <https://www.geogebra.org/m/nz56SmfP>
- Derivades. <https://www.geogebra.org/m/RjDK9hTr>
- Teorema de Varignon. <https://www.geogebra.org/m/fVXM6fs4#material/a2gYTJvD>
- Teorema de Viviani. <https://www.geogebra.org/m/z425scGG>
- Àrea d'un trapezi. <https://www.geogebra.org/m/wvejcqYH>

Cerca i comprovació de models i simulacions

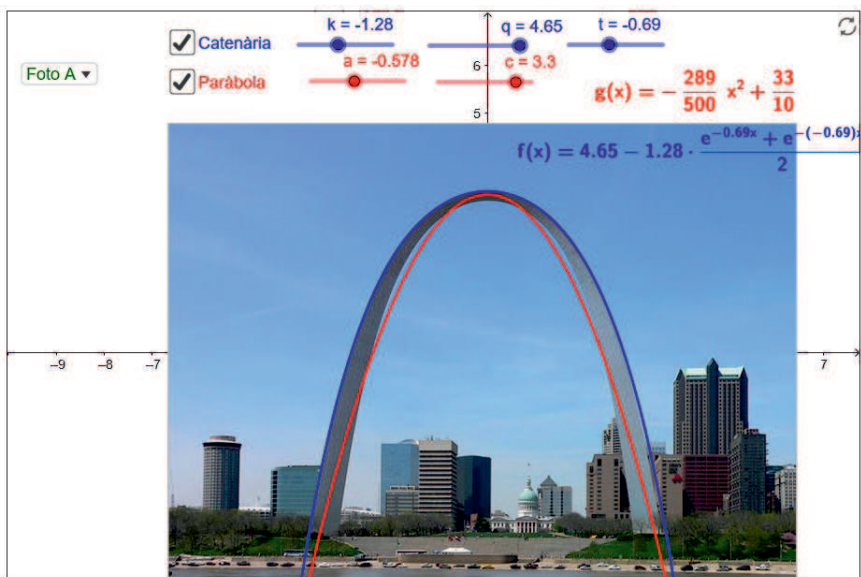
Una altra de les característiques del GeoGebra és que permet incorporar imatges a la finestra gràfica. Això fa que es puguin trobar objectes matemàtics que s'adaptin a figures reals. Aquí també hi podríem incloure les simulacions.

Paràbola o catenària

Aquestes dues corbes s'assemblen molt. Ara bé, pot ser interessant que, quan veiem un pont o un arc, puguem saber si es tracta de l'una o de l'altra. El GeoGebra ens ajuda a aconseguir-ho; vegeu <https://www.geogebra.org/m/K42pEJDM>.



Quan s'introdueix una fotografia a la finestra gràfica, es pot fer, sobre la fotografia, qualsevol construcció. En aquest cas, seleccionant les caselles corresponents podem superposar paràboles i catenàries, de manera que modificant els paràmetres podem observar quina de les dues s'ajusta millor a l'arc.



Es pot proposar que l'alumnat faci fotografies a determinats objectes semblants a paràboles o catenàries, i que els classifiqui fent servir el GeoGebra.

Vegeu més aplicacions del mateix estil:

- *Monuments amb proporció àuria*. <https://www.geogebra.org/m/GUwYS6rr>
- *Punt de Fermat a The Tridge (Carlos Giménez)*. <https://www.geogebra.org/m/BrVatMRC>
- *Llançament de daus. Simulació*. <https://www.geogebra.org/m/m9ay5wNU>
- *Astronomia propera*. <https://www.geogebra.org/m/M6j4GKCJ>

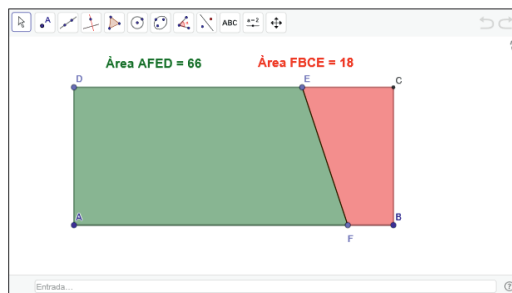
Investigacions i resolució de problemes

El GeoGebra també serveix per resoldre problemes i fer petites investigacions. En aquest cas, el programa és una eina que ajuda i guia cap a la resolució, encara que arribi a la solució completa.

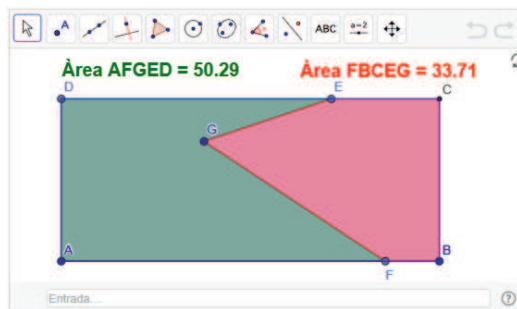
Repartiment de terres

Tenim un terreny rectangular, $ABCD$, que està dividit en dues parts d'àrea desigual per la tanca EF , com es veu a la figura. Contesta raonadament les preguntes següents.

- a) Sense tocar el punt E , situa el punt F sobre el segment AB de manera que la tanca EF divideixi el terreny en dues parts d'àrea igual. Raona la resposta.



- b) On s'hauria de situar el punt L per tal que les tanques EL i FL divideixin el terreny rectangular inicial en dues parts d'àrea igual? Quantes solucions hi ha?



Vegeu més aplicacions del mateix estil:

- Investigacions dissenyades per José Antonio Mora
Mantenir la distància: <http://jmora7.com/GG5/Mdist/Indice.html>
La meitat d'un quadrat: <http://jmora7.com/GG5/Mitad/Indice.html>
- *Problema del cangur* (Toni Gomà). <https://www.geogebra.org/m/zBWxrr89>
- *Problema i solució*
<https://www.geogebra.org/m/wrzqd2ud>
<https://www.geogebra.org/m/zyFtKC3a>
- *Construcció del punt de Gergonne*. <https://www.geogebra.org/m/j5Cd0IDL>

Per acabar

Com heu pogut veure, el descobriment del GeoGebra ha estat fonamental per a mi i crec que per a molts altres professors i professores. Espero que des de l'Associació Catalana de GeoGebra, en aquests deu anys d'existència, hàgim pogut contribuir a la seva divulgació i promoció per així col·laborar en la millora de l'aprenentatge de les matemàtiques a les nostres aules.

