

Experiències i emocions en educació matemàtica

Anton Aubanell

.....

Experiències

Seria discutible si la matemàtica és o no una ciència experimental, però sembla evident que l'educació matemàtica ha de tenir un important component d'experimentació. Henri Poincaré deia:

Només hi ha dos mètodes per ensenyar fraccions: tallar, encara que sigui mentalment, un pastís, o fer-ho amb una poma. Amb qualsevol altre mètode d'ensenyament els escolars prefereixen sumar numeradors amb numeradors i denominadors amb denominadors.

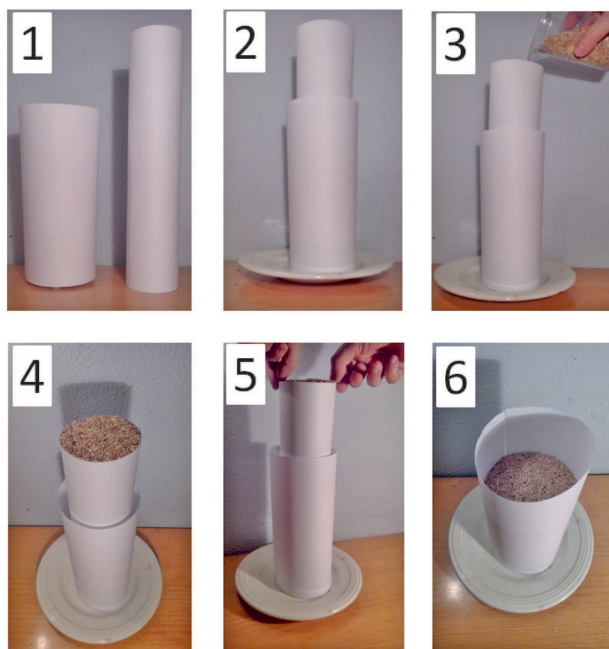
Vaig conèixer aquesta frase a partir d'una citació de Vladimir Igorevitx Arnold inclosa en una conferència publicada al *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*¹ on defensava obertament el vessant experimental de la matemàtica. Ni Poincaré ni Arnold són gens sospitosos de cap frivolitat matemàtica.

No hi ha dubte que l'educació matemàtica ha d'aconseguir que l'alumne assoleixi capacitat d'abstracció i un cert domini del llenguatge formal, especialment els alumnes que desitgin prosseguir estudis científics o tecnològics. Tanmateix, el camí per arribar a aquests objectius ha de partir de l'experiència més concreta sense voler assolir des del primer dia allò que caldrà dominar l'últim i que s'haurà d'anar coent a poc a poc. Puig Adam, en el seu decàleg (1955), recomana «graduar acuradament els plans d'abstracció» i Aristòtil, a *De Anima*, diu que «res no hi ha en l'intel·lecte que no hagi estat abans en els sentits». Una bona activitat d'experimentació pot ajudar-nos a avançar en el camí vers l'abstracció i el coneixement matemàtic profund perquè planteja preguntes no sempre trivials, perquè mostra la presència d'estructures matemàtiques en el que ens envolta, perquè convida a crear models generals, perquè posa de manifest la necessitat d'emprar eines matemàtiques... No és el mateix explicar una idea a la pissarra que fer-la evident des de l'experiència viscuda.

1. «Models matemàtics durs i models matemàtics tous». Conferència pronunciada el 25 de setembre de 1997 i publicada al *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. 13, núm. 1(1998), pàg. 7-26.

Un bonic exemple d'això és l'activitat següent, que vaig conèixer, en primer lloc, a partir de la Núria Guitart, mestra de l'Escola Guillerries, de Sant Hilari Sacalm,² i després a través de Dan Meyer.³ Emma Castelnuovo, en el llibre *Matemática Nella Realtà* (p. 36 i 37) i en el llibre *Documenti di un'Esposizione di Matematica* (p. 74 i 75), explica una experiència molt semblant citant l'obra de Galileo Galilei (1638) *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*. La proposta també es pot relacionar amb l'activitat «Parallelepèdri di uguale superficie laterale» del llibre ja esmentat *Matemática Nella Realtà* (p. 25). En el nostre cas es fa un plantejament una mica diferent que es descriu tot seguit.

- Prenem dos fulls DIN A4, amb els quals volem construir dos cilindres sense tapes. Amb un full fem el cilindre unint amb cinta adhesiva els dos costats llargs del full i, amb l'altre, unint els dos costats curts. Vegeu la imatge 1. Els dos cilindres tenen la mateixa àrea lateral, però ¿tenen el mateix volum?
- Serà bo convidar els alumnes a pensar-hi i fer les seves conjectures argumentades. Normalment hi ha opinions diverses, però la majoria opten per suposar que els dos cilindres tenen el mateix volum.
- Després posem el cilindre gruixut sobre un plat i el cilindre prim dins del gruixut.
- Emplenem el cilindre prim amb mill fins dalt de tot i l'enrasem.
- Finalment, subjectem bé el cilindre gruixut al plat (inicialment l'enganxàvem amb cinta adhesiva, però si es va amb cura no cal fer-ho i queda més natural) i, prenent el cilindre prim amb dos dits, l'anem tirant amunt tot deixant que el mill que conté vagi sortint per la part inferior i vagi emplenant el cilindre gruixut.



Imatge 1. Seqüència d'imatges que descriu l'activitat de comparació dels volums de dos cilindres amb la mateixa àrea lateral fets amb fulls DIN A4.

2. <http://apliense.xtec.cat/arc/node/743>.

3. www.youtube.com/watch?v=mH0QLSffq0c.

- Observarem que l'alçada que assoleix el mill és molt inferior en el cilindre gruixut i descobrim així (cosa que sorprèn a molts alumnes!) que aquest cilindre té molt més volum que el prim.
- Si volem, depenent del curs, podem repetir l'experiència amb altres mides de fulls i deduir alguna regularitat en els resultats.
- A partir d'aquí, convé posar paraules a la nostra descoberta i treure'n el major profit didàctic, atès el nivell en què es faci l'experiència:
 - Observem que la igualtat d'àrees laterals no implica igualtat de volums: una idea ben rellevant que trenca alguns preconceptes arrelats fins i tot en persones adultes.
 - Ho comparem amb el cordill de l'Emma Castelnuovo, una de les activitats més destacades de l'admirada professora italiana, que feia simplement amb un cordill lligat sobre si mateix amb el qual s'anaven formant diferents rectangles (naturalment, tots amb el mateix perímetre) que tenien diferents àrees (des d'àrea zero, quan el fil s'estira al màxim, fins a l'àrea d'un quadrat). L'analogia és clara: la igualtat de perímetres no implica igualtat d'àrees; és el mateix que hem observat amb els cilindres, però en una dimensió menys. Vegeu la imatge 2.



Imatge 2. Rectangles amb el perímetre igual i diferents àrees.

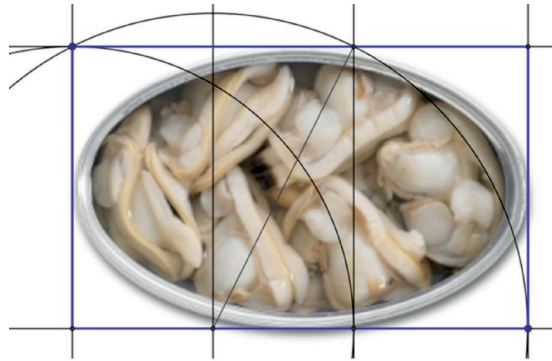
- En els cursos avançats podem justificar-ho i parlar del fet que el volum d'un cilindre depèn linealment de l'altura i quadràticament del radi, de manera que, si volem aconseguir volums grans, ens convé més «invertir» en radi que en altura.

L'experiència és molt concreta, però les lectures que se'n deriven són d'ampli abast i gens superficials. En la línia del que hem comentat abans, observem que a partir de l'experimentació podem treballar idees matemàtiques de fons que poden contribuir a crear models abstractes de manera més eficient que una explicació clàssica.

En una activitat com la que acabem de descriure s'observen molt bé els passos que ja han estat comentats en escrits anteriors d'aquesta secció: conjecturem (què passarà si...?), experimentem (mans a l'obra!), descobrim (l'esclat de la sorpresa!), conceptuem (posem paraules a l'experiència!) i, finalment, formalitzem i/o demostrem (si cal, atès el perfil de l'alumnat). Es tracta d'una seqüència didàcticament molt rica quan portem a terme activitats d'experimentació.

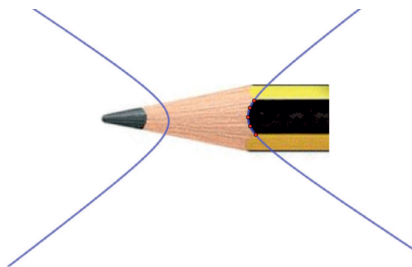
Amb l'expressió «activitats d'experimentació» ens referim a les activitats que es desenvolupen entorn de materials manipulables o eines tecnològiques (com el GeoGebra o els fulls de càlcul). Tanmateix, cal distingir el material de l'activitat que li dona vida a l'aula. Un mateix material pot utilitzar-se en activitats diferents per respondre a propòsits didàctics específics. A continuació presentem exemples d'activitats diverses construïdes a partir de dos materials ben quotidians:

- Una llauna de conserves amb forma el·líptica, calcant-la en un paper, ens permet determinar (aproximadament) els eixos de l'el·lipse; a partir d'aquests, amb un compàs podem situar els focus i, finalment, comprovar, per a diferents punts, la condició mètrica que defineix l'el·lipse. Fa anys un professor participant en una formació ens va fer observar que, en molts casos, en el disseny de la llauna es prenen els eixos de l'el·lipse de manera que pugui inscriure's en un rectangle auri. La imatge 3 presenta una petita construcció per mostrar aquest fet curiós.



Imatge 3. Una llauna de conserves el·líptica inscrita en un rectangle auri.

- Un llapis com el de la imatge 4 és un material que pot utilitzar-se en activitats diverses. Així, per exemple, en l'educació infantil podem preguntar-nos si és més llarg o més curt que un altre objecte donat, més endavant potser el farem servir per identificar els cossos geomètrics que el formen (un prisma i un con) i potser en algun moment ens pot interessar mesurar-lo i calcular-ne el volum. Al batxillerat podem observar que les corbes que es produeixen entorn del con de la punta són branques d'hipèrbole, ja que resulten de la intersecció entre els plans de les respectives cares laterals i el con final. Vegeu la imatge 4.



Imatge 4. Branques d'hipèrbole resultants de la intersecció entre el con de la punta d'un llapis i les seves cares laterals.

Els dos exemples anteriors evidencien la fèrtil complementarietat entre recursos materials i eines tecnològiques (les construccions s'han fet amb GeoGebra) i mostren com es poden generar activitats molt riques a partir d'objectes ben quotidians. És la mirada professional del docent la que és capaç de crear bones activitats a partir de materials, a vegades, insospitats. En aquesta «conversa» entre el mestre i el material per crear l'activitat, cal tenir sempre en compte dos aspectes:

- El contingut matemàtic que podem tractar, la càrrega de coneixement que aporta. Si no hi ha contingut, l'activitat és buida i es pot convertir en focs d'artifici.
- La capacitat motivadora que té, el seu poder per captar i mantenir l'interès de l'alumne, sense el qual es compromet la transmissió del missatge.

Aquest procés en què el professor o la professora «descobreix» un material o una aplicació TIC i crea una activitat per ajudar els seus alumnes a construir idees matemàtiques, té alguna cosa de màgica, molt d'emocionant i és un dels millors exercicis per mantenir-nos professionalment joves.

Emocions

Tota experiència d'ensenyament i d'aprenentatge està amarada d'emocions. Professors i alumnes vivim emocions diverses que no per ser intangibles o dissimulades són menys reals i rellevants per entendre la relació educativa que construïm cada dia.

Hem de reconèixer que els docents, afortunadament, som molt vulnerables respecte del retorn que rebem dels nostres alumnes! Convé que no ens quedem només amb l'actitud de desinterès o fins i tot de menyspreu d'un alumne concret i que valorem les coses bones que ens passen a classe: l'atenció de molts altres alumnes, una mirada agraïda, un «ara ho he entès!», un somriure... Més en general, hauríem de procurar compartir entre nosaltres (especialment amb els companys i les companyes del propi centre) les emocions positives, perquè s'encomanen! El professorat de matemàtiques a casa nostra tenim la sort de gaudir de moltes oportunitats per compartir idees i sentiments, disposem d'un teixit associatiu excepcionalment ric i d'abundants iniciatives (xarxes virtuals, jornades, congressos...) que, a banda d'aportar coneixement, ens fan sentir més acompanyats en la nostra tasca.

En l'ofici d'ensenyar és clau ser conscient de les emocions dels alumnes i tenir-les en compte. L'any 1993 el professor Jean Therer de la Universitat de Lieja va publicar, en forma de decàleg, la *Declaració de drets de l'aprenent*. Alguns d'aquests «drets» estan relacionats amb les emocions:

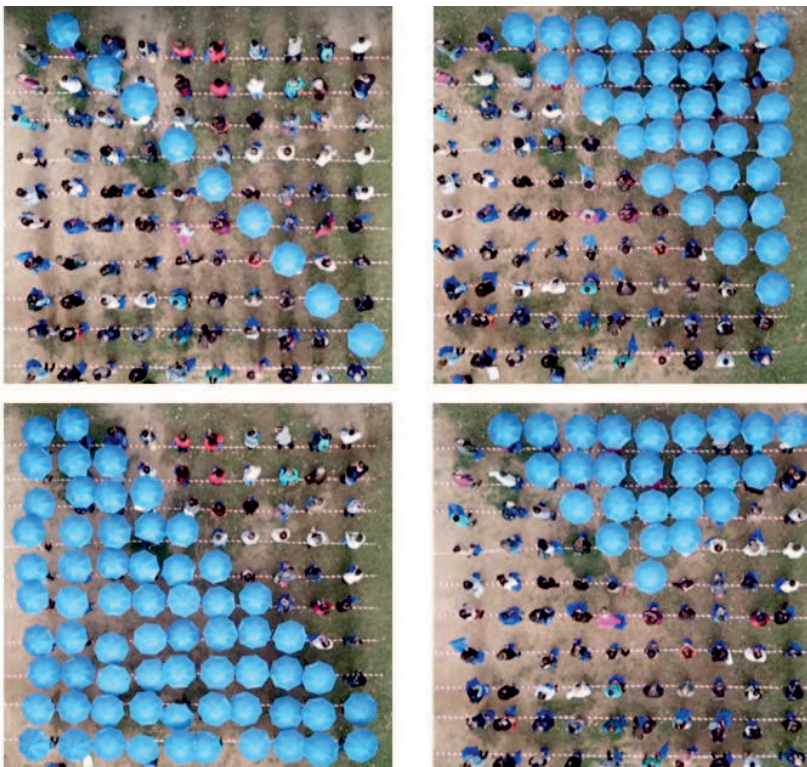
- Tothom té dret a aprendre amb gust.
- Tothom té dret a aprendre al seu propi ritme i a prendre's el seu temps.
- Tothom té dret a equivocar-se, a errar una experiència, en una situació d'aprenentatge.
- Tothom té dret a expressar els seus sentiments i les seves emocions en el decurs d'una situació de formació.

Com a docents, podem contribuir a crear emocions positives en les nostres classes a través de la gestió adequada del temps, de l'error, de l'èxit, de la cooperació...

El temps escolar és un bé limitat que hem d'emprar no per fer moltes coses, sinó per fer-les molt bé en un ambient serè que convidi a fer-se preguntes, a raonar, a enfrontar reptes, a crear converses matemàtiques interessants, a construir idees... A cada classe, un grapat de joves posen a les nostres mans una hora del seu temps (un «microsegle», deia Von Neumann), i hauríem d'aconseguir que sempre s'emportessin alguna cosa a la motxilla.

Hi ha alumnes que, al llarg dels anys, han tingut una relació amb les matemàtiques feta tan sols d'errors, de manera que, a poc a poc, han anat interioritzant la creença que s'expressa en la frase «jo no serveixo per a les matemàtiques», que hem sentit a dir tantes vegades a nois i noies que encara haurien de veure obertes davant seu, de bat a bat, totes les portes de la vida. Ens ho podem permetre? Tant de bo encertéssim a fer una gestió no devaluadora de l'error, que invités a millorar i que sempre posés en valor algun aspecte positiu, per petit que fos. La cooperació entre alumnes pot ser útil en aquest sentit i pot resultar molt estimulante per ajudar a superar dificultats matemàtiques.

En si mateix, el treball en equip té un component emocional molt potent. En la XX Jornada Didàctica Matemàtica de l'ABEAM, que tingué lloc la tardor passada, amb el lema «Emocionar per aprendre i ensenyar matemàtiques» el Cúbic, Grup de Didàctica de la Facultat de Matemàtiques i Informàtica de la UB va convidar els participants a portar a terme «en gran» el *role-play* de coordenades que descrivíem en aquesta secció del darrer número del *NouBiaix*. Cent participants, cadascun amb un bonic paraigües blau, es van situar en una quadrícula de 10×10 dibuixada prèviament al terra. Es van assignar coordenades i es va convidar a obrir el paraigües els participants les coordenades dels quals complissin certes condicions algebraïques (equacions i inequacions lineals amb dues incògnites). Les formes que anaven apareixent eren enregistrades per un dron i van ser projectades després a l'aula.⁴ Vegeu la imatge 5.



Imatge 5. Quatre fotografies de l'enregistrament realitzat des d'un dron del *role-play* de coordenades portat a terme en la XX Jornada Didàctica Matemàtica de l'ABEAM.

4. El control del dron i l'enregistrament van ser realitzats per Guillermo Bargaño.

Molts de nosaltres ens vam emocionar primer fent-ho i després veient-ho. Bona part d'aquest sentiment provenia del treball col·lectiu ben fet, de l'objectiu acomplert entre tots i totes, de l'èxit conjunt en forma de boniques imatges derivades de condicions algebraïques!

Hem de ser provocadors d'èxits matemàtics en els nostres alumnes perquè res és més motivador que l'èxit. De diverses maneres, amb diversos graus de profunditat, tothom pot fer coses en matemàtiques bàsiques i tot alumne, tota alumna, hauria de sentir que creiem en les seves possibilitats i hauria de gaudir dels seus minuts de glòria matemàtica.

Hauríem de procurar que els alumnes assaborissin les emocions genuïnes de la matemàtica seleccionant bons reptes, fent bones preguntes, donant-los temps, guardant silenci... Després ja serà la mateixa matemàtica qui farà la feina! Allò de la matemàtica que ens va seduir a nosaltres (la solidesa dels seus raonaments, la seva bellesa formal, les seves aplicacions, el plaer íntim d'assolir la solució d'un bon problema, la suau satisfacció d'entendre una idea...) també pot seduir a molts dels nostres alumnes.

Tot llegint un poema de Goethe que, en la traducció de Joan Maragall (1910), s'inicia amb el vers «Si vols una bona vida...», vaig pensar que intentaria fer un poema amb una estructura semblant i que resumís algunes de les idees que he expressat en aquest escrit. Tinc la gosadia de transcriure'l tot comptant amb la benevolència del lector, que espero que l'accepti més com a resultat de la meva emoció que de la meva perícia:

Si vols ser feliç ensenyant
no et planyis mai del passat.
Comença sempre la classe
pensant que tot és possible.
Intenta que cada concepte
tingui sentit i emoció.
Procura que cada moment
porti quelcom especial.
Complau-te en allò que ensenyas
i valora el que l'alumne fa.
Creu que tothom pot aprendre
i deixa que la bella matemàtica
faci encara més que tu.

Tant de bo aconseguim que els nostres alumnes tinguin un munt d'experiències emocionants construint matemàtiques!

