

# El laboratori de matemàtiques

## Maria Antònia Canals

**Jordi Font i Roger Grau**

Institut Baix a Mar  
Vilanova i la Geltrú

### Resum

Experimentació, descoberta, conceptualització i demostració o formalització. Aquestes són les quatre etapes que un bon recurs didàctic hauria de tenir. On ho fem? Com ho fem? Què utilitzem? Aquestes preguntes, entre d'altres, són el punt de partida del laboratori Maria Antònia Canals de l'Institut Baix a Mar. El laboratori és un espai on l'alumnat té disponible material per experimentar. El laboratori és un espai on l'alumnat pot treballar conjuntament.

### Abstract

*Experimentation, discovery, conceptualization, and demonstration or formalization: these are the four stages that a good learning resource should have. Where do we do it? How do we do it? What do we use? These questions, among others, formed the starting point for Maria Antònia Canals' laboratory at the Institut Baix a mar, a space where students have material available to experiment with. The laboratory is a space where students can work together.*

## 1. Context

Què entenem per laboratori de matemàtiques? És una aula específica?, és un magatzem de materials manipulables?, és un espai de creació matemàtica?... Potser el més rellevant no és preguntar-se què és, sinó *per a què serveix*.

La competència matemàtica, tal com es defineix al currículum, abasta una gran varietat d'habilitats i coneixements que s'han de desenvolupar als centres educatius. A secundària, es concreten en dotze competències matemàtiques agrupades en quatre dimensions (resolució de problemes, raonament i prova, connexions, i comunicació i representació).

Per tal d'acomplir els objectius que determina el currículum, des del Departament de Matemàtiques de l'Institut Baix a Mar creiem que és molt interessant disposar d'un espai adequat per tal de realitzar unes matemàtiques més riques que fomentin l'assoliment de les competències. Un entorn basat en l'aprenentatge compartit i l'ús de materials manipulats

matemàtics. És necessari comentar que la matèria de matemàtiques, en el nostre centre, està completament enfocada cap a un aprenentatge basat en la resolució de problemes, fugint de les activitats més calculístiques i repetitives, que fomentin l'autonomia de l'alumne, la investigació i la cooperació entre companys.

Aquesta contextualització inicial és imprescindible per entendre la necessitat d'un laboratori de matemàtiques. Així, en el nostre centre, l'aparició d'un laboratori ha estat conseqüència d'una manera de fer, ha esdevingut una necessitat per tal de potenciar les activitats que ja s'estaven plantejant.

En el fons, la definició de laboratori pot ser ambigua i cadascú l'ha d'elaborar en funció de les seves necessitats i dels recursos que tingui, però a l'hora d'entendre el nostre laboratori vam seguir la definició que Anton Aubanell va redactar en la seva llicència d'estudis:

Moltes de les activitats pràctiques que s'esmenten en el nostre treball poden ser realitzades a la classe habitual però, en molts de casos, sembla més eficient realitzar-les en un entorn de laboratori específic. Per aquesta raó creiem que el present treball ha de dedicar una atenció especial a aquest entorn. En primer lloc potser caldria justificar el per què hem optat per emprar l'expressió laboratori de matemàtiques en lloc de les expressions taller de matemàtiques o aula de matemàtiques. No sembla que aquesta qüestió de nomenclatura sigui essencial però tal volta el mot laboratori —que entronca també amb una rica tradició acadèmica i que etimològicament prové del terme llatí labor que significa treball— suggereix un tipus d'activitat més ampli que el mot taller (sovint associat a tasques de construcció amb un fort accent tecnològic) i més concret que el mot aula (molt genèric i, per tant, poc descriptiu). Naturalment aquesta elecció pot ser discutible però el que ens sembla important no és tant el nom com el concepte que representa.<sup>1</sup>

Que el nostre laboratori porti el nom de Maria Antònia Canals (mestra, matemàtica i referent en relació amb l'aprenentatge a través de materials manipulatius) pretén ser un humil i modest homenatge a aquesta gran pedagoga catalana.

## 2. Procés de construcció

Per tal de posar en marxa el Laboratori vam definir les etapes següents:

### a) Proposta del projecte a l'equip directiu

Per posar en marxa el projecte, des del Departament de Matemàtiques vam presentar un informe on exposàvem la necessitat de la creació del Laboratori. En l'informe es detallaven les característiques que havia de tenir l'espai, els materials inicials necessaris per iniciar el projecte i una justificació metodològica.

1. Anton Aubanell Pou (Institut Sa Palomera, Blanes), *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. Supervisor: Claudi Alsina Català. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya. [www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1005m.pdf](http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200506/memories/1005m.pdf).

## b) Disseny de l'espai i proposta de materials per comprar i construir el Laboratori

Alguns elements que es van considerar essencials van ser taules grans per fomentar el treball en grup, un projector i una pissarra blanca, un suro gran i una zona d'estanteries per tal que l'alumnat tingui el material sempre a mà i no hagi d'anar obrint i tancant armaris.

Una altra qüestió que calia tenir en compte era quins materials manipulatius s'havien de comprar i quins es construïen. Per prendre aquestes decisions, des del Departament de Matemàtiques es van plantejar (i se segueixen plantejant) les qüestions següents:

- *Preu*: hi ha materials el preu dels quals fa molt difícil adquirir-los. Aleshores la pregunta és: cal comprar-los?
- *Constructivitat*: és difícil construir-los? Aporta algun aprenentatge construir-los? Puig Adam deia que la mateixa construcció d'un material sovint porta intrínsec un elevat índex d'aprenentatge.
- *Precisió*: en cas que siguin construïts, el resultat final serà prou bo per tal que siguin «didàctics»? Hi ha materials que han de ser molt precisos i que, en cas que no ho siguin, perden el seu valor didàctic.

## c) Construcció del Laboratori

Va generar la implicació del professorat de matemàtiques durant el mes de juliol. Una de les propostes que es van dur a terme va ser que els alumnes amb la matèria de matemàtiques pendent de superació podien venir durant el juliol per crear materials. Aquest treball se'ls comptabilitzaria positivament en la seva recuperació del setembre.

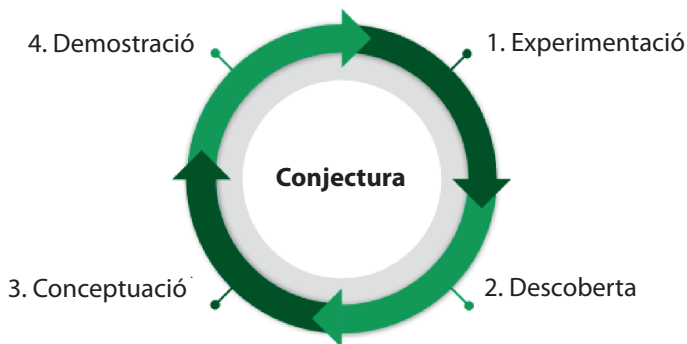
## 3. Proposta didàctica

És absolutament essencial plantejar-se com es vol que siguin les activitats abans de començar a fer qualsevol problema. Sí que és cert que la construcció del Laboratori pot esdevenir un motor de transformació metodològica del centre, però hem de tenir la certesa de cap a on volem anar i de quines són les activitats que volem realitzar per tal que els aprenentatges dels alumnes siguin tan rics com sigui possible. En aquest sentit, la nostra proposta didàctica conté activitats de caràcter competencial, d'investigació, amb moderació del càlcul, de construcció, de raonament... Així, la línia metodològica segueix la seqüència següent:

- **Experimentació**: explorar, establir contacte amb les idees que estan en joc, temptejar, fer proves, prendre mides, comparar, contrastar, manipular, construir, etc.
- **Descoberta**: observar una regularitat experimental, sovint sorprenent, que apareix en proves successives. No es tracta d'un coneixement que ve de fora, sinó d'una descoberta personal, resultat de l'experiència.
- **Conceptuació**: posar en comú allò que s'ha descobert, perfilar bé la idea, sentir-la com a pròpia, esforçar-se a expressar-la correctament, arribar a una formulació compartida.
- **Demostració o formalització**: passar de la conjectura descoberta a la propietat demostrada a partir d'un raonament lògic. En alguns casos, la demostració no caldrà o no serà possible amb les eines conceptuals de què es disposa, o no millorarà la comprensió de la idea i ens quedarem amb la constatació experimental.

Aquesta seqüència es proposa en el document *Orientacions per a la millora pràctica de la geometria*, realitzat per Anton Aubanell i que forma part dels documents curriculars del Departament d'Ensenyament.<sup>2</sup>

Ens agradaria afegir també una fase que es pot donar en qualsevol de les fases anteriors: la conjectura. Conjecturem abans de començar? O a mesura que anem descobrint coses? Podem conjecturar en haver demostrat quelcom que és el que passaria? Entenem que la conjectura es pot produir en qualsevol moment i que hem de generar situacions en què sigui necessària.



Feta aquesta contextualització metodològica essencial i després d'un cert procés de reflexió, hem dividit en cinc grans grups la tipologia d'activitats que realitzem. Val la pena comentar que tots els grups de l'ESO passen almenys dues hores per setmana al laboratori, però les sessions que duen a terme a l'aula ordinària es fan amb la mateixa filosofia i són una extensió de la idea de laboratori. No hi ha diferència entre el que passa físicament al laboratori i el que passa a l'aula habitual. Aleshores, ens podríem preguntar quina necessitat hi ha d'anar al laboratori? Bé, malgrat que la filosofia es manté intacta a l'aula ordinària, poder estar al laboratori facilita la proposta metodològica comentada anteriorment. Així, aquests cinc grans grups d'activitats són:

- 1. Activitats/problemes que es fan a la «llibreta»:** activitats de perfil més clàssic, sovint de caràcter individual però que sempre parteixen d'algun problema o situació conflictiva. L'aprenentatge sempre es basa a fer que sigui el propi alumne el qui, a partir del problema, busqui i investigui la millor manera de resoldre'l. Un cop resolt, l'alumne pot cercar generalitzacions del problema o bé propietats matemàtiques generals.

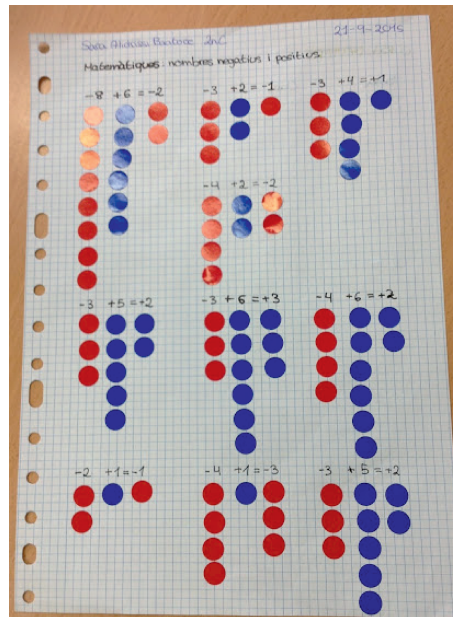
*Exemple: aritmètica d'enters*

Bloc de numeració i càlcul. 1r/2n d'ESO. 1 sessió. Gometes de dos colors diferents, targetes de dos colors diferents.

Activitat introductòria a la suma de nombres enters. Extreuen targetes amb números positius (blaves) i números negatius (vermelles) i han de fer la suma que hi apareix. La idea

2. <http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0035/14114b3a-7752-46c4-9ccb-46542a9b680c/quaderns31orientacions.pdf>.

és que representin cada valor amb gomets i observin que el resultat final és la diferència de gomets que hi ha.<sup>3</sup>



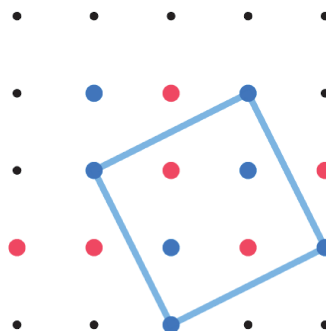
2. **Jocs:** activitats de caràcter més lúdic on es treballa la matemàtica a partir del joc. Sovint s'utilitzen per introduir conceptes matemàtics i familiaritzar-s'hi. De manera natural, en alguns casos l'alumnat cerca estratègies guanyadores (activitat d'un alt nivell didàctic).

*Exemple: quatre en quadrat*

Bloc d'espai i forma. 2n/3r/4t d'ESO. 1 o 2 sessions. Full quadriculat.

En una quadrícula cada jugador marca alternativament un punt. La idea és que guanya qui construeix primer un quadrat. Existeix una estratègia guanyadora? Quin tipus de «quadrats» apareixen? Que hi té a veure el teorema de Pitàgores?

Podem trobar el material i una versió en línia a Nrich.<sup>4</sup>



3. <http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/2015/10/sumes-i-restes-de-gomets.html>.

4. <https://nrich.maths.org/2526>.

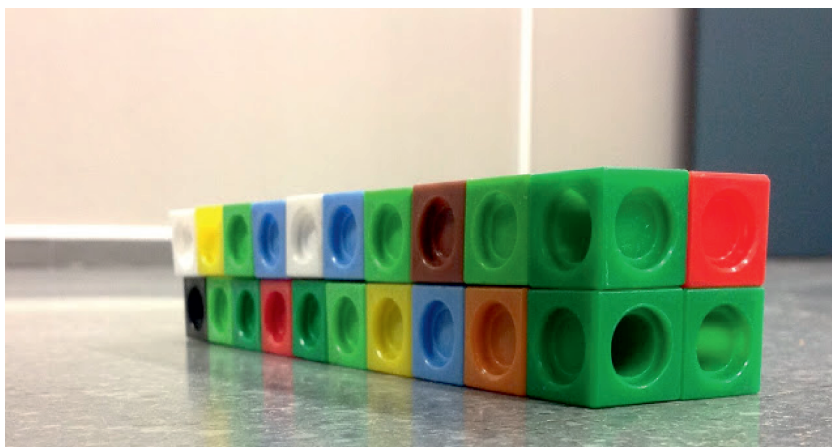
**3. Propostes d'investigació amb materials:** activitats d'investigació amb presència de materials manipulatius. Aquest perfil d'activitats intenta buscar el conflicte matemàtic i assolir generalitzacions del problema. Aquestes activitats sovint es duen a terme en grup i la seva durada acostuma a ser de diversos dies. Després de treballar amb els materials, és molt important que l'alumne traslladi les conclusions obtingudes a la llibreta o tauleta.

*Exemples: prismes amb policubs*

Bloc d'espai i forma. 3r/4t d'ESO. 3 o 4 sessions. Policubs.

Volem apilar quaranta policubs formant prismes. De quantes maneres ho podem fer?

Aquesta proposta d'investigació ens portarà a treballar propietats dels prismes, però també els nombres. Què passa amb el volum? Què passa amb l'àrea? Puc generalitzar algun cas?<sup>5</sup>



**4. Projectes (popularment, anomenats treballs):** activitats de diversos dies de durada i quasi sempre en grup. Es demana als alumnes la creació d'alguna producció en concret i un dossier que contingui tot el treball realitzat: càlculs, esbossos, metodologia, conclusions... Sovint aquests projectes constitueixen una unitat didàctica completa.

*Exemples: Voronoi va amb taxi*

Blocs d'espai i forma i de mesura. 4t d'ESO. 10 sessions. Paper vegetal, plàstics transparents, material de dibuix, retoladors permanents.

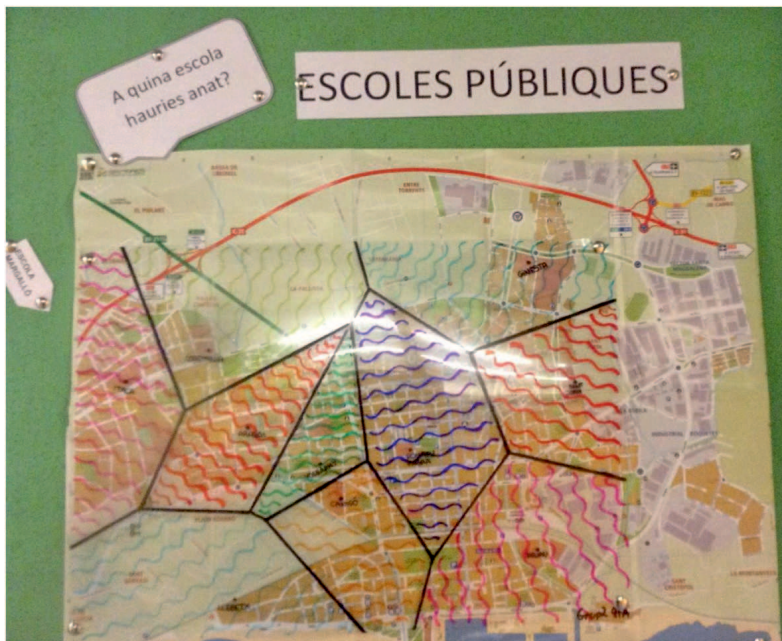
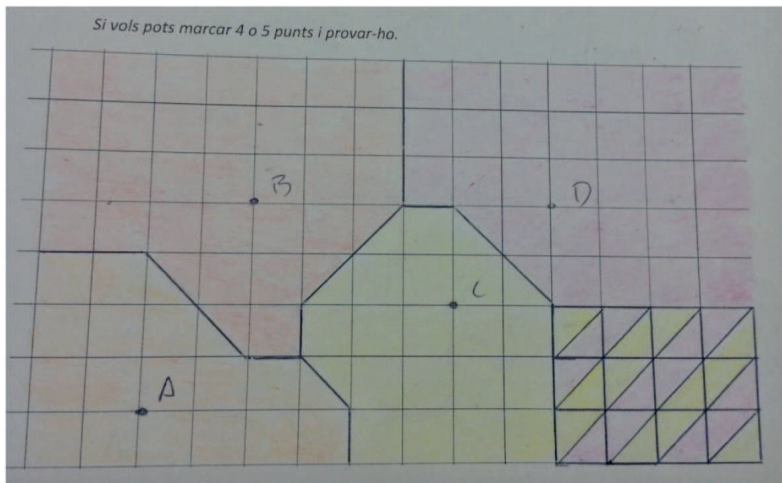
A quin institut hauríem d'anar segons el lloc on vivim? Quina és la farmàcia més propera a casa nostra? Aquest projecte estudia la ciutat de Vilanova i la Geltrú a través dels diagrames de Voronoi i de la taxigeometria. L'activitat es divideix en una primera part de treball més general sobre Voronoi,<sup>6</sup> una altra de taxigeometria<sup>7</sup> i, finalment, l'aplicació de tot el que s'ha après a la ciutat.<sup>8</sup>

5. <http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/2015/11/prismes-amb-policubs.html>.

6. <http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/2017/02/una-altra-geometria-voronoi-part-1.html>.

7. <http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/2017/02/una-altra-geometria-taxigeometria-part-2.html>.

8. <http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/2017/02/una-altra-geometria-el-trencaclosques.html>.



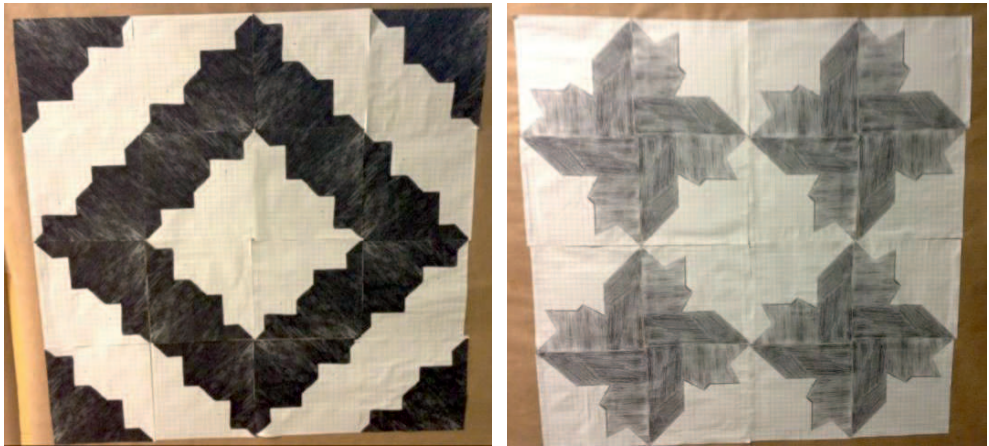
### Enrajolem

Blocs de numeració i càlcul, d'espai i forma, i de mesura. 1r d'ESO. 8 sessions. Molts fulls quadriculats, paper d'embalar, colors per pintar.

Activitat d'investigació que té com a objectiu la construcció d'un mosaic a partir de rajoles que tenen la meitat pintada. A partir d'un treball de dividir un quadrat en dues parts utilitzant diversos segments, els alumnes acaben construint les seves pròpies rajoles, fins que finalment decideixen quin enrajolat faran.<sup>9</sup>

9. <http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/2017/05/enrajolem.html>.

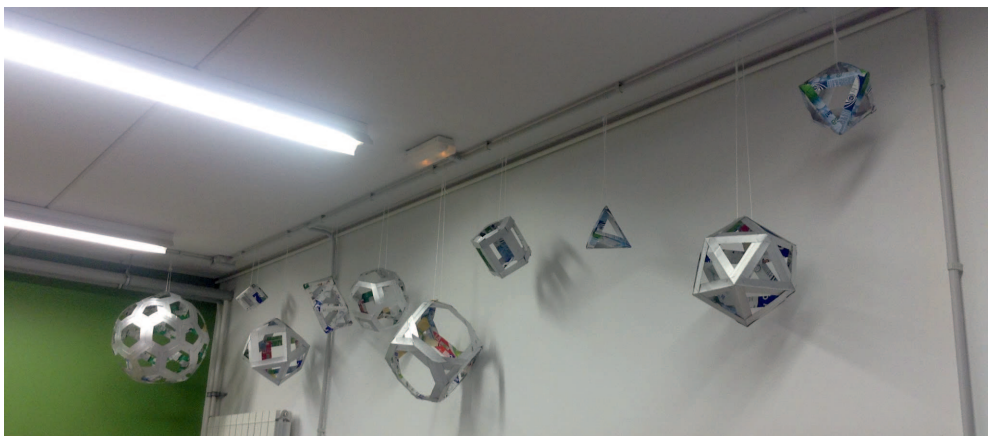
Podeu veure una ampliació del treball fet amb Geogebra.<sup>10</sup>



**5. Construcció de materials:** activitats que tenen com a objectiu la construcció d'un material matemàtic. Aquesta tipologia d'activitats és interessant si la pròpia construcció incorpora un procés matemàtic interessant. Aquesta tipologia és la que menys hem utilitzat durant el curs.

*Exemples: poliedres amb brics*

Blocs d'espai i forma i de mesura. 3r d'ESO. 8 sessions. Brics, material de dibuix. Projecte on, a través de la construcció de poliedres de diferents famílies, es treballen propietats mètriques i propietats no mètriques (vèrtexs, arestes, cares, dualitat, angles, longituds...).



Alguns exemples d'aquestes activitats i d'altres es poden trobar al blog de matemàtiques del centre, «Matemàtiques marines»,<sup>11</sup> i a les presentacions del laboratori realitzades al

10. <http://matematiquesmarines.blogspot.com.es/2017/10/enrajolem-2.html>.

11. <http://matematiquesmarines.blogspot.com>.



Congres d'Educació Matemàtica (C2EM)<sup>12</sup> i al Congreso Iberoamericano de Educación Matemàtica.<sup>13</sup>

## 4. Un exemple més desenvolupat

Des del moment de la seva creació, el Laboratori Maria Antònia Canals ha estat un espai d'investigació, descoberta, conceptualització i formalització. En les properes línies, el lector trobarà un exemple més d'activitats d'aquest tipus.

### 4.1. Balances algebraiques



#### Objectius

- Modelitzar l'equilibri d'una balança romana en funció del pes i de la posició que ocupa.

#### Descripció de la proposta

L'activitat busca cercar l'equilibri d'una balança romana (vegeu la imatge inicial). De fet, es tracta de modelitzar les situacions d'equilibri en diferents circumstàncies. Propostes d'activitats per resoldre podrien ser les següents:

12. <https://docs.google.com/presentation/d/1Tz0-iKTLyMW98BtsZ7LyvUQVG2IbNB-99u2Tp1-i05s/edit?usp=sharing>.

13. [https://docs.google.com/presentation/d/1blI72WDDgGqKN2zg0a-QwkiKo36oAQpuu3M84Ma96\\_4/edit?usp=sharing](https://docs.google.com/presentation/d/1blI72WDDgGqKN2zg0a-QwkiKo36oAQpuu3M84Ma96_4/edit?usp=sharing).

- **Situació 1.** Observa la balança següent:



En quina posició s'han de disposar els tres pesos de color vermell per tal d'equilibrar la balança?

- **Situació 2.** Equilibra la balança següent (només pots afegir pesos en una posició):



Quantes solucions diferents té aquest problema? Què tenen en comú totes les solucions trobades? Expressa la relació entre les dues variables (pes i posició).

- **Situació 3.** En quines posicions has de situar els dos paquets donats (un d'una peça i un de dues peces) per tal d'equilibrar la balança?



Quantes solucions diferents té aquest problema? Què tenen en comú totes les solucions trobades? Quina relació hi ha entre les dues posicions de les dues peces?

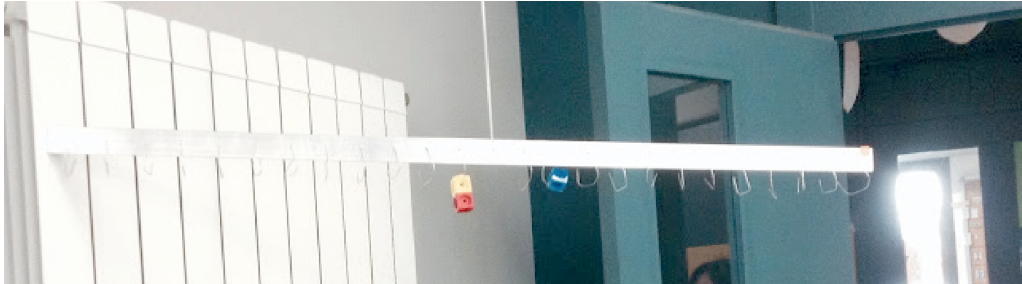
*Aspectes didàctics i metodològics*

Per dur a terme aquesta activitat a classe és imprescindible començar amb balances (vegeu l'apartat següent). No obstant això, la vida d'un material és finit (com a mínim des d'un punt

de vista didàctic). A mesura que l'alumne modelitzi el comportament de la balança, no li caldrà passar per la balança per cercar les solucions de la proposta. Però sempre podrem tenir-la com a element de comprovació dels resultats obtinguts.

### *Recursos emprats*

Per dur a terme aquesta activitat, proposem emprar una barra metàl·lica perforada de manera equidistant, uns clips (per fer de ganxos) i cubs *multilinks* per fer de pesos.



### *Continguts, competències i processos que es treballen de forma destacada*

Aquesta activitat pot entrar a l'aula des de 2n d'ESO en endavant. Depenent de l'enfocament que es vulgui donar i de la diversitat de contextos/problemes que es treballin, el recurs pot ser més adient per a altres cursos. El contingut essencial que es treballa és la resolució de problemes amb funcions. Com s'indicava anteriorment, depenent de cada situació podrem treballar la funció de proporcionalitat directa, la de proporcionalitat inversa o l'equació de la recta.

### *Interdisciplinarietat, transversalitat, relacions amb l'entorn*

Les connexions de l'activitat amb el món de la física són molt evidents. De fet, l'activitat se sustenta en el fonament de la llei de la palanca. És una ocasió excel·lent per treballar conjuntament amb el Departament de Física.

