

# Fotografia matemàtica

**David Alonso Asensio, Anna Darnaculleta Esteve**

INS Moisès Broggi

**Francesc Creixell Robert, Carles de Cubas Garcia**

INS Pla Marcell

**Pilar Figueras Mestres**

INS Vila de Gràcia

**Maite Gorriz Farré, Santi Vilches Latorre**

INS Vilamajor

**Francisco Moreno Rigall**

INS XXV Olimpíada

fotomatiques@gmail.com

## Resum

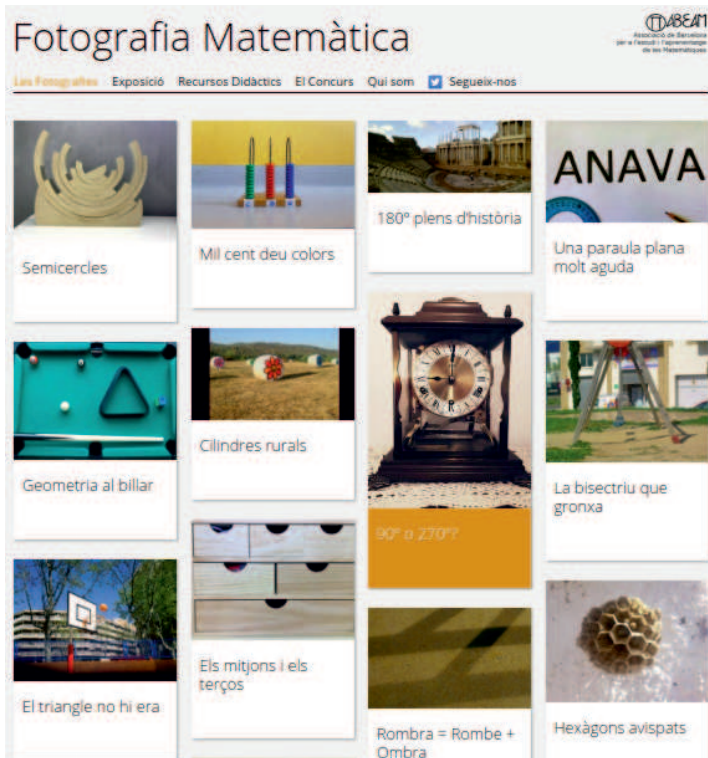
Prengui una fotografia familiar. Com sap si té una fotografia matemàtica? L'argument pitagòric que «tot és nombre» converteix qualsevol fotografia en matemàtica. Una *selfie* és una representació de l'1, una imatge dels pares ho és del 2... Aquesta visió fa que tota fotografia sigui matemàtica i, evidentment, manca de sentit. Oposadament, podem mirar-nos el món des d'un punt de vista platònic i afirmar que les matemàtiques pertanyen al món de les idees. Ergo, mai no aconseguirem una representació perfecta dels conceptes perquè és impossible fotografiar un punt o una recta. Per al nostre col·lectiu, una fotografia matemàtica és un mitjà didàctic que facilita l'aprenentatge sistemàtic de les matemàtiques; unes matemàtiques integrades en el nostre entorn, generadores de bellesa, font de creativitat i útils per tenir una visió crítica de la societat que ens envolta. La fotografia matemàtica ens ha de fer perdre la visió hermètica de les matemàtiques poc útils i ens ha d'ajudar a trobar entorns on desenvolupar matemàtiques properes a les persones. Dit això i amb l'ajut de l'experiència acumulada, una bona fotografia matemàtica ha de tenir una intencionalitat que ha de quedar recollida en un títol (imprescindible) que determini el concepte que es vol copsar. També ha de ser útil des del punt de vista didàctic, creativa i bella.

## Abstract

*Take a family photograph. How do you know if you have a mathematical picture? The Pythagorean argument that «all things are numbers» turns any photograph into mathematics: a selfie is a representation of one, an image of the parents of two... This vision suggests all photography mathematical and devoid of meaning. On the other hand, we can look at the world from a Platonic point of view and affirm that mathematics belongs to the world of ideas, ergo we can never perfectly represent the concepts because it is impossible to photograph a point or a straight line. For us, a mathematical photography is a didactic tool that facilitates the systematic learning of mathematics: mathematics integrated into our environment, a source of beauty, a well of creativity, and useful in developing a critical vision of society. Mathematical photography should help us to forget our closed vision of barely useful mathematics, and to find surroundings in which to develop a mathematics of the people. Also, in our experience, good mathematical photography must have an intentionality that can be summarised in a title (essential) that defines the concept to be communicated. It should also be useful from the point of view of didactics, creativity and beauty.*

## 1. L'espai web fotografiamatematica.cat

Amb el pas del anys i vista la volada que estava agafant el Concurs de Fotografia Matemàtica de l'ABEAM (Associació de Barcelona per a l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques), iniciat l'any 2000 amb motiu de l'Any Mundial de les Matemàtiques, va semblar-nos una bona idea crear un portal on poguéssim difondre la nostra tasca. Així va ser com va néixer el 2014 la pàgina [www.fotografiamatematica.cat](http://www.fotografiamatematica.cat).



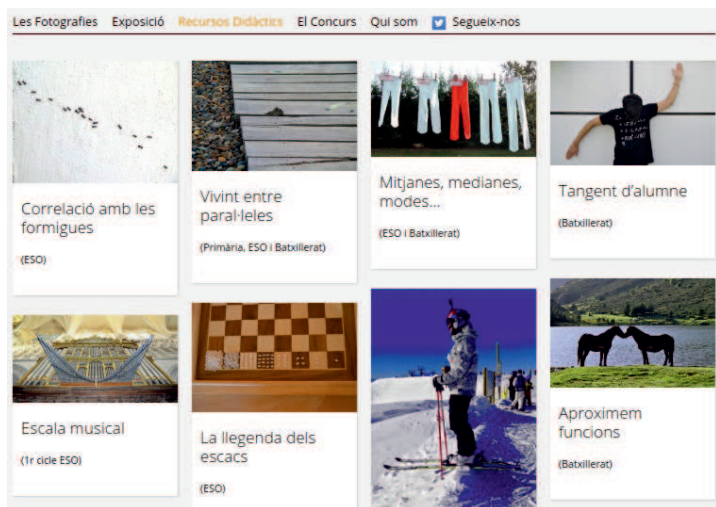
Des d'aleshores hem vist com el nostre portal s'ha anat fent un lloc entre les pàgines de recursos didàctics que utilitzen els docents d'aquest país. La nostra idea inicial de tenir una finestra al món ha esdevingut una de les principals eines de treball que utilitzem en gairebé totes les activitats que fem.

Dins la web s'hi poden trobar totes les fotografies que han rebut algun reconeixement en les divuit edicions del Concurs de Fotografia Matemàtica. Aquest conjunt d'imatges formen un fons d'aproximadament cinc-cents excel·lents exemples d'idees matemàtiques expressades amb llenguatge fotogràfic. Aquestes imatges estan etiquetades segons conceptes matemàtics, de tal manera que és fàcil visualitzar totes les fotografies relacionades amb una idea matemàtica concreta. La pràctica totalitat dels conceptes matemàtics coberts des de la primària fins al batxillerat estan representats en aquesta col·lecció, on, a cada nova edició del concurs, s'incorporen unes quaranta fotografies noves.

La pàgina ens serveix per informar i gestionar les diferents activitats que portem a terme dins del grup. Així, per exemple, s'hi pot trobar informació detallada sobre l'exposició itinerant que

hem elaborat. També hi trobareu informació sobre el calendari fotomatemàtic que cada any editem amb algunes fotografies presentades al concurs, i alhora la web és un dels principals instruments que utilitzem per organitzar-lo.

Una altra part de l'espai web, potser la més important, és el recull d'activitats didàctiques. Aquestes activitats d'aula proposen un treball matemàtic al voltant de la fotografia. A vegades el punt de partida és una fotografia que origina una reflexió o un treball sobre un concepte matemàtic. En altres ocasions, la proposta és aconseguir plasmar un problema o una idea matemàtica en una imatge. Volem que aquesta col·lecció d'activitats sigui útil als docents i la millor mostra que la fotografia matemàtica pot ser un bon instrument per ensenyar matemàtiques. La nostra voluntat és anar engreixant aquesta col·lecció de mica en mica, recollint les nostres pròpies propostes i també les que rebem d'altres docents.



Ens agrada imaginar-nos que docents i alumnes entren a la nostra web i s'hi submergeixen cercant un petit tresor: una idea original que els ajudarà a tirar endavant una activitat d'aula, un petit estímul que els farà avançar en l'aprenentatge de les matemàtiques, una fotografia que il·lustrarà un concepte matemàtic concret que volen fer entendre...

## 2. L'exposició. Tot un èxit dinamitzador als centres

Seguint amb les nostres ganes de generar recursos didàctics relacionats amb la fotografia matemàtica i de posar-los a l'abast de tothom, vam crear una exposició itinerant formada per deu plafons. L'exposició es va presentar el juliol del 2016 al claustre de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona (UB) en el marc del C<sup>2</sup>EM (Congrés Català d'Educació Matemàtica). En cadascun d'aquests plafons s'exposen diferents fotografies premiades al llarg de les disset edicions del concurs realitzades fins aleshores. Cada plafó engloba una mateixa temàtica i permet plantejar activitats amb l'alumnat per tal que cada centre educatiu tingui un recurs més per activar l'aprenentatge de les matemàtiques.

El títols dels plafons intenten provocar i alhora fer sentir curiositat sobre el perquè de les fotografies.

1. Mira amb ulls matemàtics
2. Funcions pertot arreu
3. La bellesa és matemàtica
4. Efectes especials
5. Quin és quin?
6. Estadística i atzar
7. Simetries
8. On som?
9. Matemàtiques amb sentit...
10. Fem-la!



Institut Serra de Miramar, Valls.

La presència de l'exposició als centres és una bona oportunitat per fer matemàtiques. A la pàgina web hi ha recollides diverses propostes i també demanem als centres que ens facin arribar allò que elaboren. A partir de les respostes rebudes, podem afirmar que l'activitat relacionada amb el plafó «On som?» ocupa una posició privilegiada al rànquing de les més reeixides.



Imatges cedides pels instituts Marta Estrada, de Granollers; Viladomat, de Barcelona, i Vilamajor, de Sant Pere de Vilamajor.

L'activitat consisteix a trobar en quin lloc del món es va fer la fotografia «Vectors», d'Alba Mas. Per aconseguir-ho, primer han de fer un indicador en miniatura i l'han de situar en un poble de referència sobre un mapa de Catalunya. Llavors els companys han d'endevinar l'indret triat pels altres grups. Per completar el repte, es construeix un indicador amb fletxes de fusta en algun lloc ben visible de l'institut i es proposa posar al web del centre el repte de trobar «El nostre institut al món».

Amb el plafó «Estadística i atzar» proposem un treball sobre el significat de les paraules mitja, mitjana, mediana, moda i mediana, o bé sobre el significat de segur, possible, probable,

impossible i improbable. També fem preguntes com: quan hi ha dues possibilitats, tenim la mateixa probabilitat que passin les dues coses? O bé: quin aspecte tenen els objectes posats a l'atzar? O fins i tot: com es relaciona la recta de regressió amb el camí d'unes formigues? Subratllem que el més important és que qualsevol nen o nena, qualsevol noi o noia, pot descobrir els misteris de l'atzar a través de la fotografia.



**ESTADÍSTICA I ATZAR**  
 Què significa mitjana, mediana, moda i... mitja?

Patricia Darnés *La mitja del mig és la mitjana i la mediana però no la moda*

Dues possibilitats mateixa probabilitat?

Estan posats a l'atzar?

Quin camí segueixen?

Segur, possible, probable, improbable, impossible...

**Fes-li, a l'atzar, una fotografia**  
 fotografiamatematica.cat

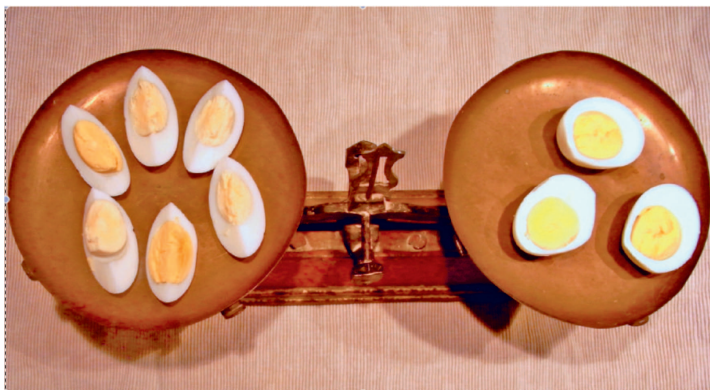
**Aquí tenim una mostra de l'alumnat de l'Institut Pla Marcell, de Cardedeu, i de l'Escola Mercè Rodoreda, de Martorell, treballant l'estadística i l'atzar amb l'exposició de fotografia matemàtica.**

### 3. De la fotografia a l'aula

#### 3.1. Fotografia matemàtica i fraccions

Observem que els temes que més s'han tractat a les classes de matemàtiques també es recullen més freqüentment a les fotografies que es presenten al concurs. Destaquem que les fraccions són un d'aquests temes. Moltes vegades apareixen lligades als conceptes de partició de la unitat, repartició, probabilitat, i també a situacions en què dues quantitats poden representar un numerador i un denominador.

Tot i que és injust centrar-se en un exemple, sí que considerem que la fotografia de l'Ona Aguilera, que porta per títol «Fraccions equivalents», va una mica més enllà del tractament habitual de les fraccions perquè inclou el concepte d'igualtat amb un recurs de vegades utilitzat per explicar manipulacions algebraïques: la balança.



Aquesta fotografia ha donat molt bons resultats per introduir el tema de les fraccions en els primers cursos d'educació secundària obligatòria (ESO), tal com us descrivim a continuació.

1. Es projecta aquesta fotografia i es demana als alumnes que justifiquin el títol.
2. Normalment els alumnes argumenten que el contingut dels dos plats és el mateix.
3. Fent d'advocat del diable, el professor els fa veure que en un braç hi ha sis porcions i en l'altre, tres.
4. Ràpidament diuen que els uns són quarts i els altres són meitats, de manera que tres meitats equivalen a sis quarts.
5. Finalment, es demana un títol sense lletres i els alumnes acaben proposant  $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ .

En resum, a la classe introductòria hem treballat: la fracció com un conjunt de parts iguals d'un total, l'equivalència de fraccions, la simplificació de fraccions i la possibilitat de fotografiar fraccions.

La proposta és demanar als alumnes que s'animin a mirar el món amb ulls matemàtics i busquin fraccions. L'objectiu és treballar a classe aquestes fotografies. Una bona part de les imatges sovint són de menjar, ja que diàriament a les cases es talla pa, formatge, pastissos i pizzes. Ara és el moment d'afegir un altre ingredient a la pizza: la matemàtica. Com? Amb una mica de provocació!



Imatge de Martí Peña.

En aquesta fotografia veiem una pizza tallada en vuit trossos: això vol dir que a casa sou vuit?

Dius que és la manera més fàcil de tallar-la?

Si a casa som cinc i volem que tots mengin el mateix, sembla que s'hauria d'haver tallat en cinc parts. Quan anem a fer la queixalada, sona el timbre i venen dos amics que tenen gana. Què fem?

Tallar cada porció en dues meitats? Aleshores tindrem deu porcions, i som set! És important fer parts iguals!

Aquí ja tenim un problema de fraccions, múltiples i divisors, i amb aquest teatre intentarem engrescar l'alumnat.

Hi ha imatges que ens presenten la situació inversa:

En aquesta fotografia veiem que una persona ja ha agafat la seva part de pizza. Si tots mengen el mateix, quantes persones se l'estant repartint?



Imatge de Mireia Roma.

Per donar una resposta a la pregunta és necessari conèixer quin angle fa el tros que falta, i en aquest sentit el programa Geogebra és un gran ajut.

Si fa  $46,91^\circ$ , com que

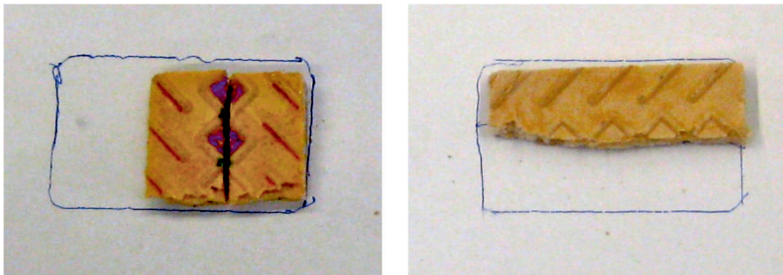
$$\frac{360}{46,91} = 7,67,$$

vol dir que sou 7,67 persones? Hem aprofitat una imatge per treballar fraccions, angles i arrodoniments.

Tot i que estem compartint una experiència d'aula que ens ha funcionat, entenem que el fet de deixar a l'atzar (en mans dels alumnes) l'aparició d'imatges didàcticament útils pot

generar dubtes. En aquesta mateixa línia també es poden treballar les fraccions amb imatges *ad hoc*. Proposem una altra activitat amb galetes, en la qual prèviament hem generat les fotografies i que pretén guiar els alumnes en la suma de fraccions amb diferent denominador. Considerem que la manera ideal de treballar-la és en grup.

1. Mostrem imatges de galetes rectangulars tallades transversalment i longitudinalment. Acompanyem les imatges amb una mica de ficció dient que a la meitat de la classe només els agraden les galetes tallades verticalment i a l'altra meitat, les tallades horitzontalment. Ho personalitzem en dues alumnes (la Marta i l'Ariadna) i expliquem que han tallat les seves galetes, se n'han menjat algun tros, han fet les fotografies i ens les han compartit al Drive:



2. Seguidament, posem dificultats afegint que la Marta i l'Ariadna volen menjar-se trossos de galeta de la mateixa mida, però com que han tallat les galetes de manera diferent, això no pot ser!
3. Ara és el moment de cedir el torn als alumnes per tal que busquin solucions. Se'ls demana que discuteixin com podrien tornar a tallar les galetes perquè tinguin trossos de la mateixa mida. Cal deixar ben clar que no importa que tinguin una quantitat diferent de trossos: el que importa és que siguin de la mateixa mida. Entenem que aquest és el punt més complicat de l'activitat i constatem que ajuda molt portar galetes a l'aula per tal que els alumnes puguin experimentar. A la imatge es pot veure els alumnes sumant fraccions amb pa de motlle i crema de formatge.





4. Finalment, proposem que descriguin el procés en llenguatge matemàtic. La consigna és que la Marta i l'Ariadna s'han menjat tots els trossos que han sortit de dividir les seves galetes i que ara s'ha d'escriure en forma de fracció la quantitat de galeta de cada una d'elles i la quantitat total de galeta que mengen entre les dues.
5. El premi per haver fet bé l'activitat és menjar-se les galetes!

### 3.2. Fotografiant equacions

Durant tots els anys que hem estat fent el concurs de fotografia, hem rebut imatges sobre un tema recurrent: les equacions. Aquest fet reflecteix la gran preocupació de tots els docents del nostre país per resoldre equacions. No ens posarem a discutir sobre la importància o no d'aquest element del currículum, però sí que ens agradaria fer una reflexió sobre les fotografies que rebem, que mostren una manera de treballar a l'aula molt procedimental i poc reflexiva. Això sí, la vessant estètica de les fotos que rebem sobre equacions és indiscutible. Moltes d'elles ens han captivat i han estat premiades, com ara la fantàstica foto que ens va enviar l'Aina López, titulada «x aïllada». Malauradament, hem de dir que totes les fotografies rebudes contenen imatges que evoquen exclusivament la lletra  $x$ , com si la lletra definís el concepte.






Aquesta allau de lletres  $x$  fotografiades ens va fer plantejar una pregunta: les equacions són infotografiables? Calia posar fil a l'agulla. El resultat és la següent activitat d'aula, que titulem «En aquesta foto en total hi ha...».

La seqüència didàctica consisteix a presentar la imatge següent als alumnes:







Tot seguit s'informa que a la foto hi ha un total de dotze fitxes i es demana que es calculi quantes fitxes hi ha sota cada got.


Al nostre entendre, la principal virtut de l'activitat és visualitzar la manipulació algebraica. Recollim en un quadre el paral·lelisme entre els dos mètodes de resolució.

<i>Solució gràfica</i>	<i>Solució algèbrica</i>
<p>En aquesta foto hi ha en total 12 fitxes:</p> 	<p>Si <math>x</math> és la quantitat de fitxes que hi ha dins el pot, l'equació és: «en dos pots més 6 fitxes són 12 fitxes»</p> $2x + 6 = 12$
<p>Si traiem les 6 fitxes, ens quedarà:</p> $12 - 6 = 6 \text{ fitxes}$ 	$2x = 12 - 6$ $2x = 6$ <p>Visualment: el +6 que sumava a l'esquerra passa a la dreta restant -6.</p>
<p>Si repartim les 6 fitxes entre els 2 gots, toquem 3 fitxes per cada got:</p> 	$x = \frac{6}{2} = 3$ <p>Visualment: el 2 que multiplicava a l'esquerra passa a la dreta dividint.</p>

A partir d'aquí, encoratgem els alumnes a crear equacions. A l'exemple següent els animem a visualitzar els parèntesis i la propietat distributiva. Amb les mateixes indicacions que abans, informem que hi ha 29 fitxes.



<i>Solució gràfica</i>	<i>Solució algebàrica</i>
<p>En aquesta foto veiem 3 plats iguals en cadascun dels quals hi ha 2 gots i 4 fitxes; a més, hi ha 5 fitxes en un costat. Però en total hi ha <b>29 fitxes</b>.</p> 	<p>En cada pot hi ha <math>x</math> fitxes. Representem els plats amb parèntesis; per tant, hem de trobar quin nombre és <math>x</math> si</p> $3(2x + 4) + 5 = 29$
<p>El primer que fem és buidar els plats; per tant, tenim 6 gots, 12 fitxes i 5 fitxes més. I en total hi ha 29 fitxes.</p> 	<p>Com que el que hi ha dins dels parèntesis ho tenim 3 cops, agafem el triple de tot el que hi ha dins els parèntesis.</p> $6x + 12 + 5 = 29$ <p>Aquest procés s'anomena propietat distributiva.</p>
<p>Ajuntem les fitxes i, per tant, tenim 6 gots i 17 fitxes. Però en total hi ha 29 fitxes.</p> 	<p>Sumem els nombres <math>12 + 5 = 17</math></p> $6x + 17 = 29$
<p>Ara traiem les 17 fitxes i, per tant, queden 12 fitxes repartides en els 6 gots.</p> 	<p>El 17 que sumava a la esquerra ara resta a la dreta (passa a l'altra banda fent el contrari):</p> $6x = 29 - 17$ $6x = 12$

<i>Solució gràfica</i>	<i>Solució algebàrica</i>
<p>Si repartim les 12 fitxes entre els 6 gots, queda clar que hi ha 2 fitxes a cada got.</p> 	<p>El 6 que multiplicava la <math>x</math> a l'esquerra passa dividint a la dreta i, per tant, <math>x = 2</math>:</p> $x = \frac{12}{6} = 2$

Ara buscarem equacions amb incògnites als dos costats de la igualtat. El repte creix en dificultat si diem que l'única cosa que sabem és que a cada taula hi ha exactament el mateix nombre de fitxes. Arribats a aquest punt, qui dubta que les equacions es poden fotografiar i que són una fotografia de l'equació?

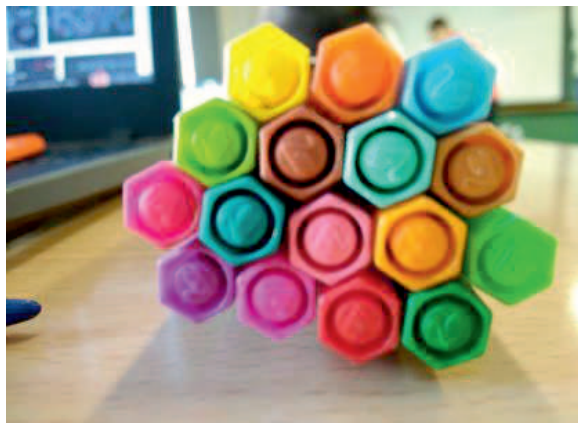


### 3.3. Fotografia matemàtica en la geometria

La geometria és una de les disciplines de la matemàtica que més vegades es recull a les fotografies que rebem al concurs, ja que és present als currículums de tots els cursos i alhora descriu els objectes de la realitat.

L'objectiu de l'activitat següent és treballar la geometria amb els alumnes de primer d'ESO a partir de les seves pròpies imatges. Això es farà iniciant el camí cap a la construcció dels cinc poliedres regulars, tot recordant i ampliant els conceptes de polígon i polígon regular. Mirarem de donar més presència als contextos reals dels alumnes amb la realització de fotografies matemàtiques.

L'activitat consistirà a demanar a cada alumne que faci quatre o cinc fotografies amb el seu mòbil i posar títol a cadascuna per tal que aflorin els conceptes i les idees geomètriques. De l'anàlisi d'aquestes fotografies amb els seus títols podrem obtenir una primera avaluació inicial de cada alumne.



Hexàgons encaixats



Hexàgon



Polígon rodó

L'estudi i l'organització de les fotografies matemàtiques de l'alumnat esdevenen el motor de l'activitat: els alumnes presenten a classe les seves fotografies i entre tots acaben elaborant una definició de polígon. S'utilitza la mateixa tècnica per treballar el concepte de polígon regular: presentació de fotografies fetes pels alumnes, detecció dels polígons regulars i elaboració col·lectiva de la definició.

Per tal de reforçar els dos conceptes i treballar algunes de les propietats dels polígons regulars, es poden construir amb escuradents plans alguns d'aquests polígons, per exemple sumant els angles interiors d'un polígon regular. El Geogebra també és una bona eina per seguir investigant més propietats.



A continuació s'inicia el camí cap a la construcció dels cinc poliedres regulars i per tancar l'activitat podem demanar dues coses: noves fotografies matemàtiques que continguin els conceptes treballats o la modificació dels títols de les fotografies inicials.

Haurem aconseguit construir coneixement geomètric?

#### 4. De l'aula a la fotografia

Fins ara hem mostrat situacions en què la fotografia és a la gènesi de l'activitat docent. Però volem destacar que també es pot aprofitar la potència de la imatge per resumir l'activitat docent realitzada. Considerem que condensar en una fotografia tot el que s'ha treballat en una unitat didàctica és un repte interessant que obliga a revisar la feina feta i mirar-la des d'altres angles de visió.

Dins del projecte «Global Scholars», amb un grup d'alumnes de primer d'ESO es va treballar de manera transversal la nutrició arreu del món. Inicialment es va analitzar la nostra alimentació i després es va comparar amb la d'altres indrets del món. La primera activitat que es va fer es titulava «How much sugar do we drink?». En les dades de l'etiqueta d'una beguda es va trobar la proporció de sucre que contenia.



Sabent que un terròs de sucre equival a 4 g de sucre, es va calcular el nombre de terrossos de sucre que contenien les diverses begudes. Tot aquest procés es va resumir en la imatge de l'envàs amb la seva equivalència en terrossos de sucre apilats al costat.

La segona activitat es titulava «How much sugar do we eat?». En aquesta activitat es va analitzar el sucre de les galetes o snacks que mengen els alumnes. Cada grup d'alumnes va portar una caixa de les seves galetes preferides. De l'etiqueta es va extreure la informació del sucre per cada 100 g de galetes. En aquest cas, es va trobar la proporció de sucre que hi ha en cada paquet individual de galetes. Amb unes balances es va pesar el sucre, es va posar en bossetes i es va elaborar un pòster amb la comparativa de sucre.

Ambdues exposicions es van penjar al passadís del centre. Això va obligar els alumnes a repassar el treball, a banda que va tenir un efecte divulgatiu i va fer que els alumnes de primer d'ESO se sentissin valorats per la seva tasca.



## Bibliografia

Alonso, D., Darnaculleta, A., Creixell, F., Cubas, C. de, Figueras, P., Gorriz, M., Moreno, F., Vilches, S. (2018). *Fotografia matemàtica*. <http://fotografiamatematica.cat>.

Vilches, S., Gorriz, M. (2017). «La fotografia matemàtica como recurso didàctico». *Suma. Monografia*, 6, 41-57.

Vilches, S. (2016). «Fotografia matemàtica. Vint anys mirant el món amb ulls matemàtics». *SCM. Notícies*, 39, 64-67.