associació catalana de Geogebra

# Estimació de l'àrea sota una corba en el càlcul de Pi

## Introduint el GeoGebra al laboratori de matemàtiques

**Guillem Bonet Carbó i Manel Martínez Pascual**
Associació Catalana de Geogebra

## Introducció. El GeoGebra a l'aula

Sovint, quan programem una sessió amb GeoGebra, ens la plantegem com una hora de treball només amb el programa. Ens oblidem que GeoGebra, a part de ser una bona eina per treballar la matemàtica, es pot convertir en el nostre millor aliat a l'hora de completar una investigació, encara que aquesta no estigui planificada inicialment per ser treballada amb el programa.

GeoGebra no només ens pot servir per comprovar resultats, dibuixar situacions geomètriques i fer-ne els càlculs, sinó que també pot esdevenir una eina de gran ajut per descobrir propietats matemàtiques i visualitzar algunes idees que difícilment podrien ser representades gràficament en un full de paper si no és de manera dinàmica. A més, també permet que els alumnes puguin fer les seves investigacions matemàtiques.

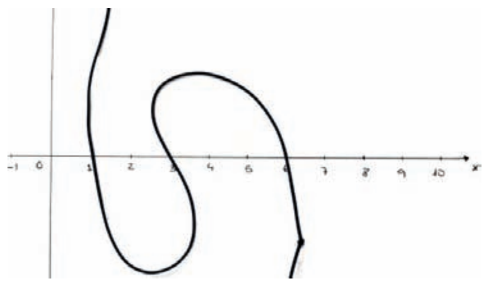
Precisament, aquest article seguirà la línia que acabem de definir. Us presentem una experiència d'aula realitzada per Manel Martínez a batxillerat i que es complementa molt bé amb GeoGebra. Esperem que us agradi.

## Introducció del problema

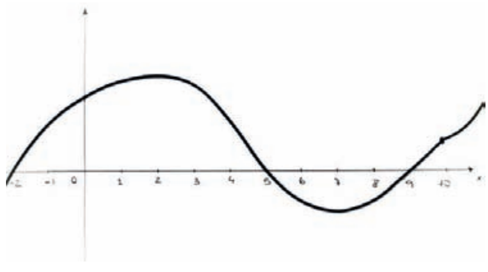
Tot seguit exposarem una seqüència d'idees per treballar amb els alumnes el concepte d'àrea sota una corba. Aquest concepte es pot generalitzar i aplicar al càlcul de l'àrea d'una superfície qualsevol. Amb tot, procurarem que sigui una superfície amb un perfil que tingui certa curvatura; en cas contrari, la resolució del problema podria ser massa senzilla i no ens serviria per al concepte que pretenem introduir. També ens interessa que la corba que s'estudiï pugui expressar-se matemàticament amb una funció. Això no és imprescindible per a la primera part de l'activitat, però sí per a la darrera.

En l'activitat d'aula que us presentem, proposem als alumnes calcular, de la manera més aproximada possible, l'àrea que es troba entre una funció i l'eix de les abscisses en un interval determinat. Els alumnes es disposaran per parelles amb l'objectiu de fomentar el debat i la discussió matemàtica en aquelles situacions de conflicte que vagin sortint en les seves investigacions i, alhora, provocar l'argumentació i el consens en el moment de prendre decisions. Unes condicions idònies per treballar les competències agrupades en la dimensió de comunicació i representació.

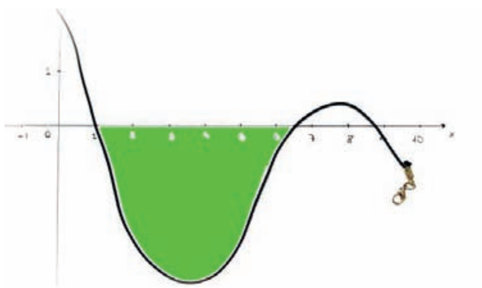
Una primera activitat ha de ser la comprensió del problema utilitzant esquemes o una representació matemàtica aproximada que els permeti identificar l'àrea que han de mesurar i, alhora, evidenciar els elements que la determinen. Per a això, facilitarem a cada parella un bon tros de cordill i un DIN-A3 on tan sols hi hauran representats els eixos de les coordenades. Amb el cordill representaran corbes i pintaran l'àrea delimitada per aquestes i pels eixos de les abscisses. En aquest moment sorgirà de manera natural quines corbes són funcions i quines no, i, a la vegada, la importància del domini a l'hora de seleccionar les àrees.



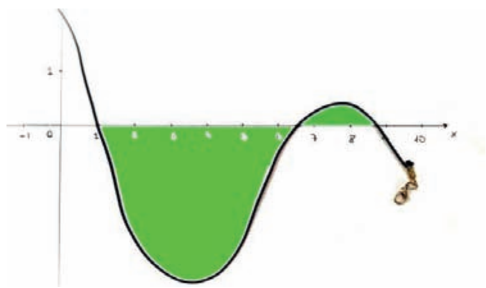
No es pot expressar com una funció.



Sí que es pot expressar com a funció.



Mesurem des de $x = 1$ fins a $x = 6,5$.



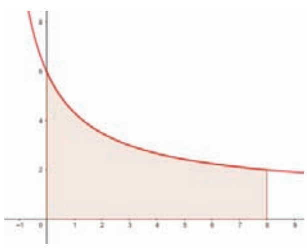
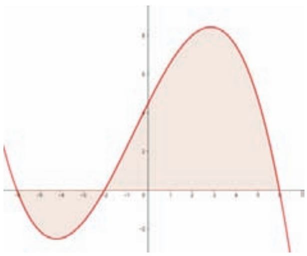
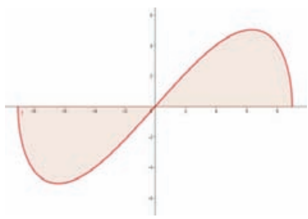
Mesurem des de $x = 1$ fins a $x = 8,75$.

Tot seguit hauran de discutir en grup petit quina serà la seva estratègia de resolució, s'hauran de plantejar com poden assolir amb èxit l'objectiu de l'activitat, aproximar l'àrea entre la funció i l'eix de la manera més exacta possible.

Amb l'objectiu d'assegurar-nos que s'adquireixen els conceptes que es treballen, assignem les funcions següents als alumnes segons el seu nivell d'assoliment habitual.

- $f_A(x) = 2 - \dfrac{x - 8}{x + 2}$ en $[0, 8]$. Funció positiva en tot aquest interval.
- $f_B(x) = \dfrac{(x + 2)(36 - x)^2}{16}$ en $[-6, 6]$. La funció agafa tant valors positius com valors negatius.
- $f_C(x) = \dfrac{1}{8}x\sqrt{81 - x^2}$ en tot el seu domini. Funció antisimètrica amb valors positius i valors negatius.

Un cop discutit tot això, del grup petit al grup gran, els demanarem que comencin a treballar en aquesta estratègia usant una gràfica de la funció que els demanarem que representin ells amb GeoGebra i que imprimirem en un DIN-A3.

| Funció A | Funció B | Funció C |
|---|---|---|
| $f_A(x) = 2 - \frac{x-8}{x+2}$ en $[0, 8]$ | $f_B(x) = \frac{(x+2)(36-x)^2}{16}$ en $[-6, 6]$ | $f_C(x) = \frac{1}{8}x\sqrt{81 - x^2}$ en $[-9, 9]$ |
|  |  |  |

Un cop discutit tot això, del grup petit al grup gran, els demanarem que comencin a treballar en aquesta estratègia usant una gràfica de la funció que els demanarem que representin ells amb GeoGebra i que imprimirem en un DIN-A3.

Per dibuixar una funció $f(x)$ definida en un interval $[a, b]$ amb GeoGebra, cal usar la instrucció:

$$\mathit{funció}(f(x), a, b)$$

En cas que els alumnes no trobin cap solució viable per resoldre el problema, els induirem a seguir la proposta que està desenvolupada en el punt següent.

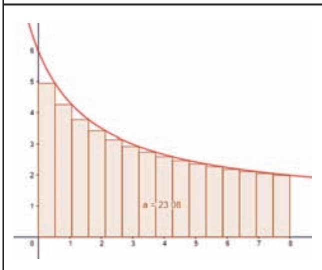
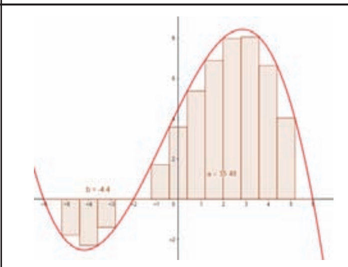
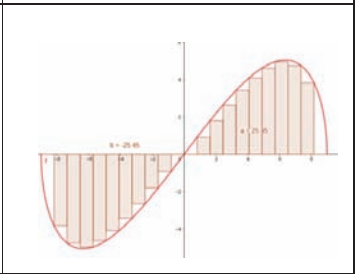
# Proposta de treball d'exploració

## Comencem manipulant

Un dels factors clau per entendre bé un problema és familiaritzar-se amb ell mitjançant la manipulació i descobrir a poc a poc la matemàtica que hi està implicada. Per aquest motiu, la primera proposta per aproximar l'àrea sota la corba pot consistir en la comparació amb figures senzilles, de les quals sapiguem calcular l'àrea de manera ràpida. Les millors opcions són els rectangles i els triangles. En cas que els alumnes hagin emprat una altra figura per omplir l'àrea buscada, analitzarem la situació, comentarem els pros i els contres que hi trobem i, si és el cas, els animarem a continuar amb la seva proposta.

Volem simplificar tant com sigui possible el càlcul i el muntatge del recobriment de l'àrea. Per aquest motiu, usarem rectangles que tinguin tots la mateixa base situada sobre l'eix de les abscisses.

Podem fer unes primeres estimacions de l'àrea usant tiretes de paper d'un gruix enter i determinat. Deixarem que els alumnes dedueixin que aprimant aquestes tiretes 5 cm, 3 cm, 2 cm, 1 cm..., poden ajustar millor el valor de l'àrea. Una primera consideració sobre la decisió presa serà si amb els rectangles seleccionats es podrà cobrir el domini i quines solucions aporten en cas que no es pugui, tenint en compte que hauran de mantenir sempre la mateixa amplada en tots els rectangles. Un cop consensuada la resposta, hauran de retallar les tires de paper i alhora decidir l'alçada, tot depenent de la part d'àrea que es cobreixi.

| $f_A(x) = 2 - \frac{x-8}{x+2}$ en $[0, 8]$ | $f_B(x) = \frac{(x+2)(36-x)^2}{16}$ en $[-6, 6]$ | $f_C(x) = \frac{1}{8}x\sqrt{81 - x^2}$ en $[-9, 9]$ |
|---|---|---|
|  |  |  |

Molt probablement els alumnes decidiran l'alçada del rectangle mesurant directament en el full amb el regle. Això ens pot semblar que els aparta d'usar la funció i de treballar amb les imatges de la funció. No ens hem d'alarmar, ja que és des de l'experimentació que acabaran entenent quin paper hi té la funció. Aquesta serà una primera aproximació de l'àrea, i no serà fins que no s'hagi produït la descoberta que els alumnes estaran en condicions de formalitzar el procés seguit i expressar matemàticament el que han estat manipulant.

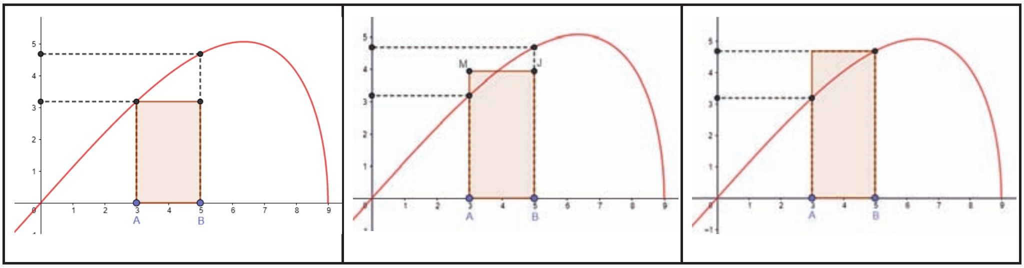
Un cop omplerta la regió amb rectangles, aproximaran la seva àrea amb la suma de les àrees de tots ells.

## Pas a la formalització del procés

La formalització del procés seguit és important per dos motius: en primer lloc, l'estudiant ha de reflexionar sobre la manipulació realitzada, sobre el que ha descobert en grup, relacionant el que sap de funcions amb el que ha fet amb els rectangles; en segon lloc, cal que els alumnes aprenguin a organitzar el seu pensament i les seves idees, i a redactar i explicar el procés seguit. En aquest moment es pren consciència de tot el que s'ha fet i es dona pas a la reflexió amb l'objectiu d'introduir millores en cas que es pugui.

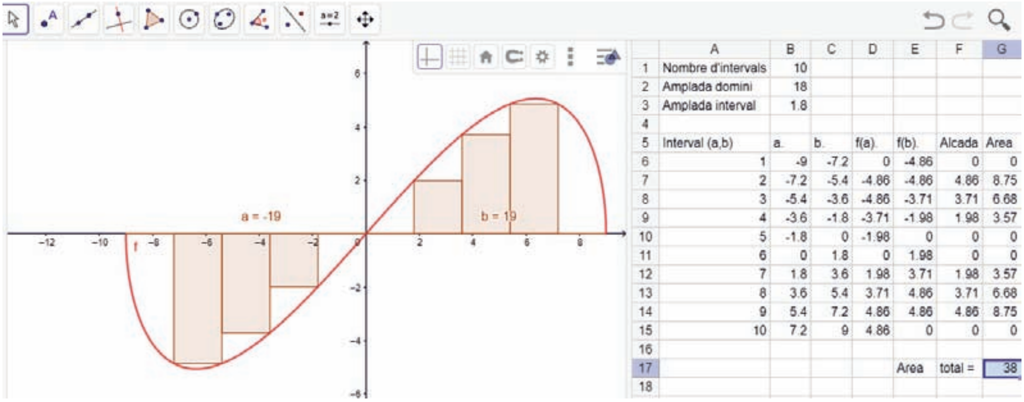
En aquest procés, els estudiants hauran deduït que l'alçada de cada rectangle ve determinada per la funció i, concretament, per la imatge d'un punt determinat de la base. L'elecció d'aquest punt també és digna d'investigació i discussió per part dels integrants del grup de treball. Per fer-ho, no els donarem cap indicació, sinó que hauran de ser ells els que prenguin les decisions en cada moment.

És a dir, posem que hem de calcular l'alçada d'un rectangle que tindrà la base entre les abscisses $x = a$ i $x = b$; la seva alçada estarà relacionada amb les imatges d'algun dels punts de l'interval $[a, b]$. Per l'experiència que tenim, els alumnes acaben consensuant raonadament quines alçades del rectangle agafen. La majoria escullen l'alçada mínima entre $f(a)$ i $f(b)$, de manera que el rectangle caigui completament dins de la regió, però si haguessin escollit la mitjana entre les dues, probablement estarien retallant l'error; cal valorar-ho. Aquí les opcions són múltiples i es produeix un tractament molt ric del control de l'error.



En el punt en què ens trobem, no caldrà calcular gaires imatges perquè els rectangles tenen prou amplada i els alumnes podran estimar l'àrea fent els càlculs a mà o amb la calculadora. En el punt següent, els intervals del domini seran molt més petits i la cosa ja es complicarà. Serà convenient llavors usar un full de càlcul; per exemple, el de GeoGebra.

Què succeirà quan la imatge doni valors negatius? Aquest serà un punt important que la manipulació amb materials ajudarà a resoldre. Mentre s'utilitzen tires de rectangles, no hi ha dubtes a l'hora de calcular àrees. És quan es relaciona l'alçada dels rectangles amb la imatge de la funció en un punt, que aquest debat sorgeix i es resol. Caldrà prendre sempre el valor absolut de les imatges.

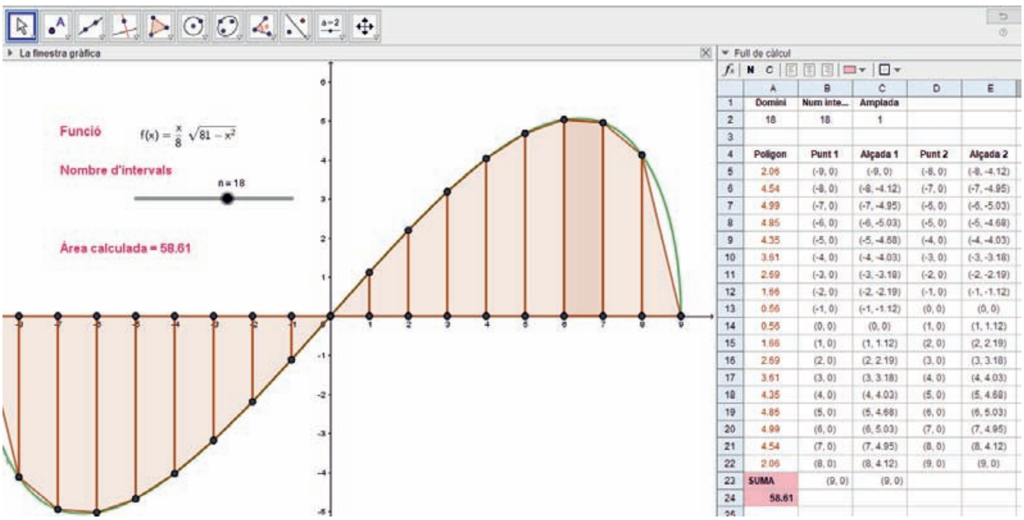



Els grups que ho necessitin, podran ampliar el que han fet experimentant; per exemple, fent un estudi sobre com varia l'àrea obtinguda en funció del punt de la base que s'ha escollit com a referència. Experimentació que, com hem comentat anteriorment, els pot portar a fitar el valor real de l'àrea i fer una primera estimació de l'error comès en l'aproximació.

Una altra ampliació interessant és provocar que els alumnes aprenguin a connectar el full de càlcul creat amb la pantalla gràfica. En aquest cas, hauran de calcular i definir els punts o vèrtexs de cada quadrilàter i crear dins la columna *A* (o la que sigui) del mateix full de càlcul l'element Polígon(Bk,Ck,Ek,Dk), on *k* és la fila on es troben els punts creats.

D'aquesta manera, a la imatge anterior s'han calculat les alçades dels rectangles amb la funció mínim o màxim, mentre que a la imatge següent no s'ha fet aquesta precisió i s'ha agafat la imatge de cada punt com a alçada del vèrtex base corresponent, per la qual cosa aquesta segona vegada s'han obtingut els trapezis que ens aproximaran l'àrea. Noteu que en aquest segon cas s'ha modificat l'ordre dels vèrtexs per aconseguir el polígon buscat.

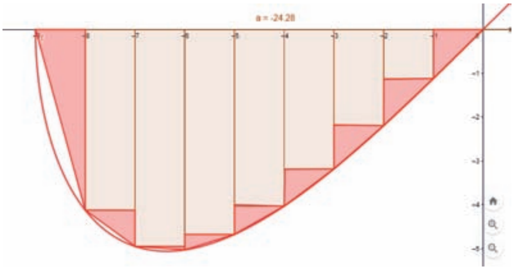
Paral·lelament, a la pantalla gràfica es dibuixen automàticament els polígons creats.



Amb aquesta idea, els alumnes visualitzen els càlculs realitzats i s'asseguren que el que han calculat és realment el que hi ha dibuixat. A l'exemple proposat, s'han calculat els trapezis sota la corba, però es podrien haver calculat els rectangles usant la funció màxim o mínim de les alçades.

### Valoració del resultat

Un cop executada la proposta de resolució per part dels alumnes, ens hem de preguntar fins a quin punt el resultat trobat és fiable i òptim. Recordem que els alumnes han usat rectangles per aproximar una funció corba i que, per tant, quedaran petits espais entre la corba i els rectangles que no estaran mesurats. Ens interessa que els alumnes es preguntin com es poden cobrir aquests espais, ja que d'aquesta pregunta en sortiran de ben segur bones idees. Una podria ser cobrir els espais amb trapezis en lloc de rectangles, una altra podria ser afinar l'amplada del rectangle per ajustar-nos més a la corba.

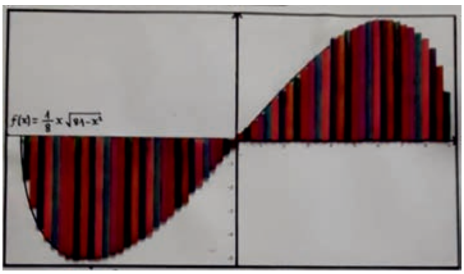



Ens fixarem que, fent-ho d'aquestes maneres, haurem aproximat el nostre resultat molt més del que ho havíem aconseguit en la resolució inicial.

## Una resposta ens porta un altre problema

Un cop tenim una hipòtesi sobre el que estem treballant, ajustem la intuïció de l'alumne amb una altra pregunta: quina quantitat d'espaguetis o de tallarines cabrà sota la corba? Fem el càlcul primer i després comprovarem el resultat.

Els alumnes se les hauran d'enginyar per mesurar l'amplada d'una tallarina i d'un espagueti. Acostumen a posar-ne uns quants l'un al costat de l'altre, i a repartir l'amplada total que ocupen entre el nombre total d'unitats posades. Un cop obtingudes les amplades, apliquen el mateix mètode i els mateixos càlculs al nou problema.



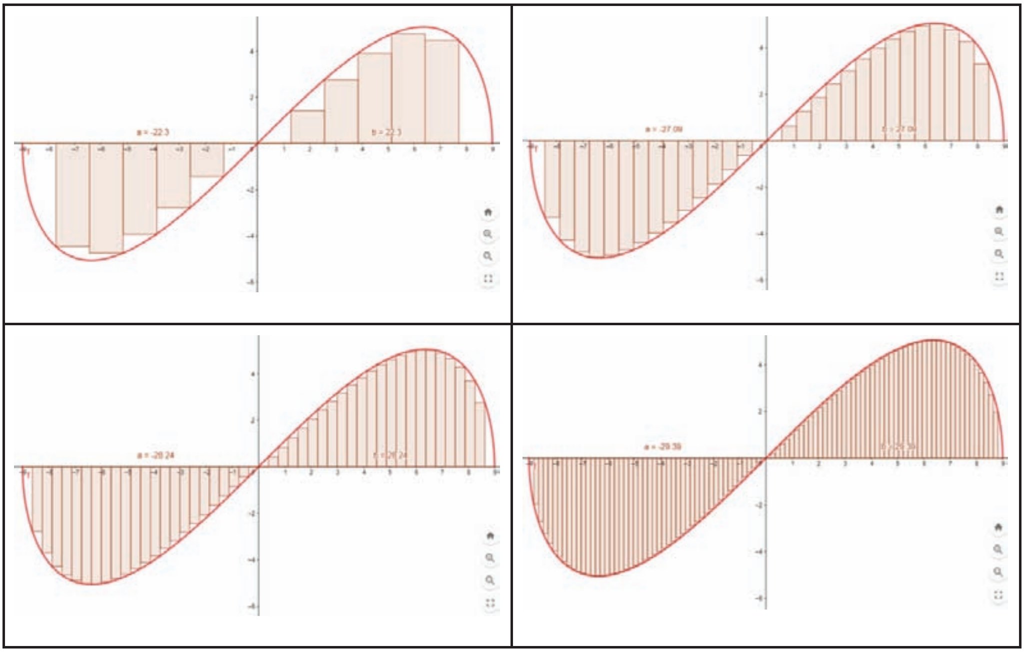
**Mesura de l'àrea sota la corba mitjançant tallarines.**

Observem que ara els càlculs seran molt més llargs, ja que per omplir el domini es necessiten més intervals i, per tant, més rectangles. Per aquest motiu, és molt aconsellable fer totes aquestes operacions amb el full de càlcul S'enganxaran amb cola totes les tallarines, d'una en una, i tots els espaguetis, d'un en un, fins a recobrir tota l'àrea sota la corba, i es tallaran al punt que toca (vegeu la imatge anterior amb el resultat final).

Un darrer pas seria comprovar si els càlculs realitzats a partir de la pràctica s'ajusten als teòrics. En aquest cas, el resultat es podria validar a partir d'un càlcul senzill si sabem quant pesen els espaguetis que hi ha sota la gràfica (caldria usar una balança de precisió) i l'àrea que cobreixen 100 g dels mateixos espaguetis. Amb tot, és convenient que els alumnes argumentin quin mètode han emprat per resoldre la situació.

## Pas al límit, els intervals es fan petits

Arribats fins aquí, ens podem preguntar fins a quin punt podem millorar l'estimació de l'àrea. D'alguna manera, manipulativament hem fet tot el que hem pogut i volem fer un pas més. Geogebra acabarà ajudant en aquesta fase.



**Afinant l'amplada dels rectangles per explicar el pas al límit amb GeoGebra.**

En aquest cas, de manera natural després del procés seguit surt que

$$\textit{Àrea buscada} = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{|f(a_k) - f(a_{k-1})|}{2}, \text{ si es treballa amb trapezis.}$$

$$\textit{Àrea buscada} = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}|\text{màx}(f(a_{k-1}), f(a_k))|, \text{ si es treballa amb sumes superiors.}$$

$$\textit{Àrea buscada} = \frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n} |\text{mín}(f(a_{k-1}), f(a_k))| \text{, si es treballa amb sumes inferiors.}$$

Com veiem, el que hem fet ha estat treballar amb els diferencials de manera natural i sense haver-los introduït.

### Visualització del límit amb GeoGebra

Al punt anterior hem comentat que no podem trobar manipulativament cap aproximació més precisa de l'àrea buscada. Bé, no és del tot així. GeoGebra és una eina molt potent que ens permet visualitzar i manipular aquest pas al límit. Això ho podrem fer gràcies a les funcions *SumaSuperior* i *SumaInferior*.

Per calcular i representar gràficament la suma superior o la suma inferior d'una funció $f(x)$ definida en un interval $[a, b]$ amb $n$ subintervals, cal usar les instruccions següents:

$$\textit{SumaSuperior}(f(x), a, b, n) \quad \text{i} \quad \textit{SumaInferior}(f(x), a, b, n)$$

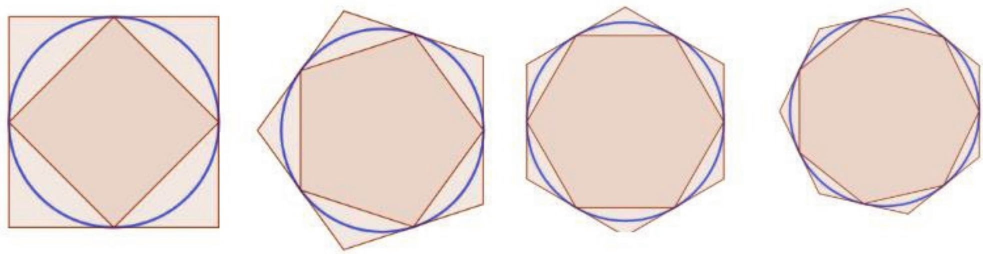
Si, a més, pretenem crear cert dinamisme, cal definir el nombre d'intervals $n$ en forma de punt lliscant que només prengui valors naturals (per exemple, des d'1 fins a 100).

Usarem les funcions *Integral*$(f(x), a, b)$ o *IntegralEntre*$(f(x), g(x), a, b$ si el que volem és calcular el valor exacte de l'àrea definida sota una funció $f(x)$ definida en un interval $[a, b]$ o l'àrea definida entre dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ al mateix interval.

L'ús d'aquestes funcions per visualitzar l'aproximació de l'àrea amb sumes inferiors i superiors serà el pas que necessiten els nostres alumnes per acabar de copsar el pas al límit descrit.

## Referents històrics

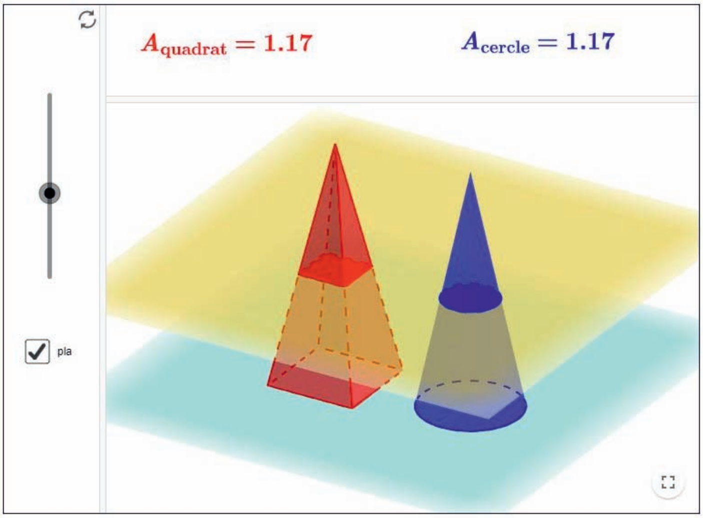
El mètode que hem usat per apropar-nos a la integral i aproximar una àrea curvilínia donada és en realitat molt antic. Una idea molt semblant a aquesta va ser usada per Èudox de Cnidos (s. IV aC) per aproximar de manera exhaustiva àrees i volums a través d'una successió de polígons d'àrea coneguda que convergien en l'àrea buscada.



**Idea d'Arquimedes per aproximar l'àrea d'un cercle.**

El mateix mètode va ser usat pocs anys més tard per Arquimedes (s. iii aC), que el va emprar per trobar una aproximació de pi, fitant-lo entre $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ a través del càlcul d'àrees de polígons regulars que s'aproximaven a la circumferència (vegeu la imatge superior). També va treballar en el càlcul d'un segment d'espiral i en el de l'àrea d'un segment de paràbola (si voleu treballar aquest darrer, us aconsellem la miniaplicació de GeoGebra d'E.M. Fernández Aguilar, titulada «La cuadratura de la parábola de Arquímides»: www.geogebra.org/m/uNRgJDvJ ). Poc més tard, a la Xina, Liu Hui i Zu Chongzhi usaven aquest mateix mètode d'exhaustió per aproximar, respectivament, l'àrea del cercle i el volum d'una esfera.

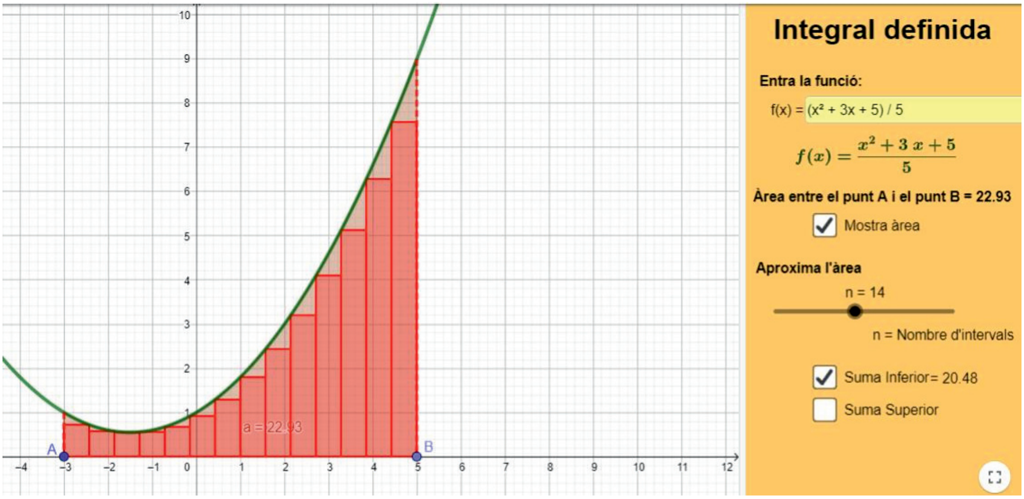
Molt més endavant, ja al segle XVI, Cavalieri va fer servir la idea del mètode d'exhaustió d'Èudox per deduir el que avui coneixem com a principi de Cavalieri: «Si dos cossos de la mateixa alçada són tallats per plans paral·lels a les seves bases i produeixen regions d'igual àrea, tenen el mateix volum».




**Miniaplicació de Juli Jurado Llamas que ajuda a visualitzar el principi de Cavalieri.**

Per treballar el principi de Cavalieri podeu mirar el llibre de GeoGebra de Ramon Nolla, titulat *Sobre àrees i volums* (www.geogebra.org/m/wqsyzHAa) o l'applet de Juli Jurado Llamas titulada *Volum d'un con - Cavalieri* (www.geogebra.org/m/h2GVAbyP) (veg. la imatge anterior). Després de Cavalieri, la teoria va passar per Newton i Leibnitz, que amb el teorema fonamental del càlcul van posar marc al que va ser la teoria del càlcul infinitesimal. Posteriorment, Riemann i després Lebesgue van recollir el treball dels seus predecessors i van establir amb rigor el càlcul integral.

En aquest cas, per treballar les integrals de Riemann recomanem les miniaplicacions de Guillem Bonet sobre integrals definides (www.geogebra.org/m/AR9EN8TS), a la imatge, o la de Raül Fernández *La integral definida* (www.geogebra.org/m/Td2Qtm2Z), que inclou també una comprovació de la integral amb la regla de Barrow.




**Miniaplicació de Guillem Bonet per treballar les integrals de Riemann.**

## Conclusions i recomanacions

Com segurament deveu haver deduït, aquesta proposta d'activitat no és més que una descoberta del mètode de Riemann, on els alumnes de batxillerat, sense necessitat de grans coneixements previs, van descobrint tots els detalls del mètode, com ara els càlculs infinitesimals, les sumes superiors o les inferiors..., seguint les fases d'experimentació, descoberta, conceptuació i formalització que el professor Anton Aubanell esmenta que ha de tenir tot bon recurs didàctic.

L'experimentació s'ha dut a terme amb materials manipulatius i amb GeoGebra. Destaquem la importància d'haver emprat els dos suports i d'extreure de cadascun d'ells l'ajut necessari per fer les investigacions corresponents. La visualització dels resultats que es van obtenint, així com la de cadascuna de les etapes que conformen l'estudi, mostren que la matemàtica també pot ser presentada com una ciència experimental, i això permet als nostres alumnes treballar i desenvolupar les competències que la constitueixen.

## Referències


Aubanell Pou, Anton. «Orientacions pràctiques per a la millora de la geometria». *Quaderns d'Avaluació*, 31.

Aubanell Pou, Anton. *Recursos materials i activitats experimentals en l'educació matemàtica a secundària*. Llicència d'estudis. 2005-2006.

*Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic*. Educació secundària. Departament d'Educació.