El nombre π

per Antoni Serraima

El nombre π la relació entre el perímetre (d'aquí ve l'elecció d'aquesta lletra grega equivalent a la nostra P) d'una circunferència i el seu diàmetre és conegut des de l'antigüetat. Un dels primers en determinar-lo amb una certa precissió va esser Arquímides. En aquest artícle, Antoni Serrahima ens fa un breu repàs històric i ens explica perquè els matemàtics s'esforcen en fer aquests càlculs dels dígits d'un nombre que juga un paper tan important en la teoria de funcions periòdiques.

Antoni Serraima: Milián (Girona, 1957), és llicenciat en matemàtiques per la Univ. de Barcelona. Actualment realitza tasques de recerca i de docència a la càtedra de Mètodes Informàtics de l'Escola d'Enginyers Industrials de Barcelona.

Introducció

El nombre π no és imprescindible per a l'existència humana, però durant cents d'anys ha portat molts mals de cap a un grup força considerable de matemàtics i simpatitzants de les matemàtiques. I ara ens seria difícil d'entendre el món tècnic sense aquest nombre.

També és cert que qualsevol persona que hagi cursat uns estudis mitjans, n'ha sentit parlar. Potser ara ja no recordarà què és el nombre π, però tampoc no el desconeixerà.

Aquest article no pretén fer un estudi profund d'aquest nombre. Però farà un ràpid recorregut per la seva història, i així, es veurà com neix l'estudi de π amb els grecs, i la importància fonamental de π en el problema de la quadratura del cercle, tan de moda a començament de l'edat moderna. El problema quedà totalment resolt al segle passat després de 2000 anys sense trobar-hi una solució. Es veurà també que π és un nombre incommensurable, és a dir, que no té una expressió decimal periòdica. A partir del segle XVI, quan ja s'havia desenvolupat plenament el càlcul amb decimals (encara que hi ha referències que els xinesos ja havien representat algun nombre amb decimals al segle VI, però no hi feien cap operació), alguns matemàtics es dedicaren a calcular i a cercar mètodes que permetessin conèixer el nombre amb la quantitat més gran possible de decimals.

Actualment es troben matemàtics que han calculat π amb més de 500.000 decimals. En realitat això no té cap sentit pràctic, ja que en la vida quotidiana no es treballa amb una precisió superior a les centèsimes. Però aquests càlculs ens serveixen per verificar l'eficiència d'alguns mètodes algorítmics, i per saber com es desenvolupen quan són incorporats a grans ordinadors. És clar que per obtenir el nombre π amb 500.000 decimals es necessita un ordinador ràpid. Si una persona ho hagués de fer a mà, tardaria molts mesos, i, el que li podria passar és que quan arribés al decimal 500.000 s'adonés que el decimal 134.999 és incorrecte, i en conseqüència ho serien també la resta fins al 500.000, i hauria de refer tots els càlculs.

Orígens històrics

π és un símbol que correspon a una lletra de l'alfabet grec i que s'ha incorporat a la geometria per representar la relació constant entre una circumferència i el seu diàmetre.

Encara que la història de les matemàtiques comença amb les escoles jòniques, no hi ha dubte que els filòsofs grecs foren guiats pels anteriors investigadors egipcis i fenicis. Els coneixements sobre les nocions matemàtiques que aquests pobles podien posseir són incomplets i els intentarem resumir breument.

Sembla ser que els primers pobles grecs varen tenir els fenicis i els egipcis com a font d'inspiració. Els fenicis pel que fa referència a l'aritmètica pràctica o a l'art del càlcul, i potser també per a alguna propietat del nombre. Els egípcis, pel que fa a la geometria, ja que eren una civilització agro-pecuària i els seus problemes es fonamentaven en els estudis geomètrics per a la repartició de les terres.

És curiós i interessant remarcar l'ascendència fenícia d'alguns matemàtics grecs, com Pitàgores, Heròdot i Tales.

El text més antic sobre matemàtiques conegut per nosaltres és una part del "Papir de Rhind (2000 aC)", en el qual hi ha escrits d'un matemàtic anomenat Ahmes. El que explica Ahmes en aquests papirs són problemes d'aritmètica i de geometria amb les solucions corresponents, i molts d'ells sense demostració. Aquests problemes ens han servit per saber quin era el coneixement egipci de les matemàtiques.

Ahmes comença en la primera part del seu manual donant alguns exemples numèrics per mesurar "grans o cereals". Desgraciadament no se sap amb gaire certesa quina era la forma egípcia usual de mesurar. Després s'ocupa de l'àrea de certes figures rectilínies. Més endavant busca l'àrea d'un camp circular de diàmetre 12 (no especifica cap unitat de mesura) i dóna com a resultat $(d - \frac{1}{9} \cdot d)^2$, essent d = diàmetre del cercle. Això vol dir que pren π com $3.1604 = (\frac{16}{9})^2$.

Se suposa que els càlculs matemàtics de les civilitzacions anteriors als egipcis i fenicis eren força erronis, per la qual cosa no se'ls ha prestat atenció.

FIGURA I

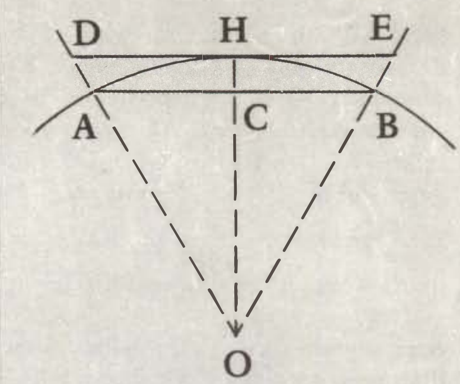
1) Donat el valor d'un costat d'un polígon regular inscrit en un cercle de radi R, es troba el valor del costat de polígon regular circumscrit semblant a l'inicial.
Sigui AB = M el costat del polígon inscrit. Tracem el radi OH perpendicular a la corda i tangent al costat del polígon circumscrit i semblant al primer.
Els costats del triangle OBA i ODE són semblants, i per consegüent OC/OH = AB/DE, o també

$$\frac{OC}{R} = \frac{M}{N} \quad (a)$$

Dels costats del triangle OAC, el catet val $OC = \sqrt{R^2-\frac{1}{4}M\cdot M}$. Substituint el valor OC en la igualtat (a) obtenim:

$$\frac{\sqrt{R^2-\frac{1}{4}M^2}}{R} = \frac{M}{N}$$

d'on, posant a un costat N, s'obté: $N = \dfrac{R \times M}{\sqrt{R^2-\frac{1}{4}M^2}}$



Es interessant ressenyar que una aproximació al valor de 3 era utilitzada pels babilonis i els jueus, essent probable que aquest nombre hagués estat obtingut de forma empírica. Això es pot trobar a la Bíblia, on es fa referència a una piscina circular del Temple de Salomon al perímetre de la qual es donava un valor de tres.

Seguint la història es troba una successió de matemàtics grecs que varen afrontar el problema. Hi ha dubtes que els matemàtics de l'escola jònica, els pitagòrics, Anaxàgoras, Hippias i Antífont obtinguessin un valor de π més aproximat que els anteriors. Es tenen algunes referències que els últims alumnes de l'escola d'Atenes encaminaven les seves investigacions cap a altres problemes. Euclides, fundador de l'escola d'Alexandria, probablement sabia que π estava comprès entre 3 i 4, però en cap dels seus treballs no ho menciona explícitament.

L'estudi matemàtic de π comença en realitat amb Arquímedes, matemàtic que desenvolupà la seva activitat fora de l'escola d'Alexandria, de la qual parlarem més endavant.

Quelcom sobre els orígens de π

Hom no pot creure que el símbol π fos inventat per representar el nombre 3.14592... Aquest símbol és una lletra de l'alfabet grec, inicial de paraules com περτφερετα (perifèria) o περτμετροζ (perímetres). Però sembla que és molt difícil determinar l'assignació d'aquesta lletra grega al nombre 3.14... Es creu que això ens pot portar cap al segle XVII.

En efecte, dins l'obra d'Ougfred *The Key of the Mathematics* (1647), es fa servir la notació de π com a relació de la circumferència amb el seu diàmetre. Barrow utilitzà igualment la lletra π en les seves lliçons públiques, pels voltants de 1669, a lletra π en les seves lliçons públiques pels voltants de 1669, a Cambridge. En el seu llibre *Isaaci Barrow-Mathematics tetiones habitae in scholes publicis Academiae Cantabrigensis* (1684), indica que la longitud d'una quarta part del cercle de radi (R) i diàmetre (D) és

$$\Theta = \frac{\pi R}{2} = \frac{\pi D}{4}$$

Moritz Cantor a *Geschichte der Mathematik* assenyala l'ús de la lletra π per William Jones dins la *Synopsis Palmanorium Mathesos* (1706). Alguns anys més tard Bernoulli designa aquest nombre amb la lletra **C**. Euler, el 1734, utilitza en els seus treballs la lletra **p** per representar-lo, i l'any 1736 va fer servir la lletra **C**. Goldback el 1712 torna a emprar la lletra π. Però sembla ser que aquest signe fou d'ús general després d'una publicació de *L'Analysi* d'Euler.

Es pot dir que fins als últims anys del segle XVIII i començament del XVIII, no existia un símbol d'ús general per representar el nombre 3.1415... i que després de la publicació d'Euler, la lletra π ha estat utilitzada per representar el nombre 3.-1415... o la relació de la circumferència amb el seu diàmetre.

Mètodes de càlcul

El valor del nombre π ha estat calculat mitjançant dos mètodes diferents, amb una aproximació tan gran com es vulgui. El primer dels mètodes és geomètric i consisteix a calcular els perímetres de polígons regulars inscrits i circumscrits en un cercle. La circumferència estarà compresa entre els dos perímetres anteriors. El segon mètode, és el més modern, consisteix a trobar una sèrie (o un producte infinit) convergent cap a aquest nombre (quan dic més modern vull dir dins dels últims 400 anys). Cal dir que el primer mètode representa π com una conseqüència de relacions geomètriques. El segon mètode tan sols utilitza π com un símbol representant d'un cert nombre que es troba en moltes branques de què es compon l'anàlisi matemàtica.

Els mètodes geomètrics són els que es varen fer servir inicialment per trobar els valors aproximats de π, fins més o menys el segle XVII, quan Wallis i, uns anys abans, el vescomte Brouncker, representen el valor de π com a resultat de la convergència de productes infinits i suma infinita, respectivament. Els mètodes geomètrics comencen amb Arquímedes.

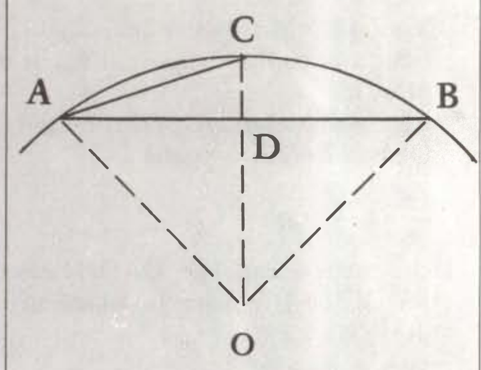
Arquímedes va néixer a Siracusa i segurament estava emparentat amb la família reial d'aquesta ciutat. Fou el primer a fer servir un procediment matemàtic, pel qual obtenia una aproximació del número π important. Deia que el valor de π era més petit que $3 + \frac{1}{7}$ i més gran que $3 + \frac{10}{71}$, és a dir, podia trobar-se entre els valors

FIGURA 1 (Continuació)

2) Donat el valor d'un costat d'un polígon regular inscrit, es troba el valor del costat d'un polígon regular inscrit amb un nombre doble de costats.

Sigui $AB = m$ el costat conegut, $AC = n$ el costat del polígon de doble nombre de costats que es vol conèixer i R el radi que també es suposa conegut. L'angle AOC és agut, perquè és la meitat de AOB i, per conseqüent, en el triangle AOC la recta AC s'oposa a un angle agut, per la qual cosa tenim la relació $AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2 \cdot OC \cdot OD$. Substituint les lletres pels valors coneguts s'obté $n^2 = 2 \cdot R^2 - 2 \cdot R \cdot OD$. Per al triangle OAD, el catet $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}$ que finalment $n^2 = 2 \cdot R^2 - 2 \cdot \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}$; fent l'arrel quadrada s'obté $n = \sqrt{2 \cdot R^2 - 2 \cdot R \sqrt{R^2 - \frac{m^2}{4}}}$

Amb aquestes dues expressions anteriors i prenent un cercle de radi unitat, l'hexàgon regular inscrit tindrà com a costat 1. I si anem duplicant els seus costats fins a 96, es veu que el valor del perímetre del polígon inscrit és 3.141... i el del circumscrit 3.142... .



3.1428... i 3.1408... Això ho va aconseguir inscrivint i circumscrivint en una circumferència un polígon regular, i seguint el mètode de la figura 1; anava doblant els seus costats de manera que s'anaven obtenint polígons inscrits i circumscrits amb més costats, els perímetres dels quals s'acostaven a la circumferència.

L'aproximació d'Arquímedes arriba fins a la centèsima. El resultat anterior l'obté de la desigualtat

$$\frac{6336}{2017\ 1/4} < \pi < \frac{14688}{4673\ 1/2},$$

conseqüència d'inscriure i circumscriure dins d'una circumferència polígons regulars fins a 96 costats. Heron d'Alexandria ha mencionat el resultat de $\frac{22}{7}$. Un altre valor aproximat, obtingut per Ptolomeu era $\pi = 3^o 8' 30''$, que equivalia a dir

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3 + \frac{17}{420} = 3.1416$$

Al llarg de la història podem anar trobant molts personatges que varen investigar sobre aquest nombre. Però no és la finalitat d'aquest escrit anarlos mencionant un a un, ja que per això ja hi ha llibres d'història. Per aquest motiu el que es farà serà anar enumerant les referències que es creu que poden ser més importants i interessants.

Un dels problemes que va tenir un interès especial per al càlcul d'aquest nombre, va ésser l'anomenat "quadratura del cercle". El problema s'enuncia així: trobar el costat d'un quadrat la superfície del qual és igual a la d'un cercle donat. Arquímedes va anunciar (és molt probable que es sabés anteriorment) que el problema es resumia a trobar la superfície d'un triangle rectangle els catets del qual eren respectivament iguals al perímetre i al radi considerats. La semirelació entre aquests costats és un nombre representat per π.

Durant l'edat mitjana i el Renaixement, molts matemàtics dedicaren part de la seva vida a resoldre aquest problema sense obtenir-ne cap resultat satisfactori. Les construccions geomètriques i invents numèrics per trobar una solució correcta, la més aproximada possible, foren moltíssimes. Per altra banda, per mor d'aquesta profunda investigació, es varen obtenir importants propietats geomètriques i de càlcul que afavoriren la resolució de problemes en altres camps.

Se suposa que el lector tindrà curiositat per tenir una relació del nombre de decimals obtinguts al llarg a la història de π. La podeu trobar a la taula I. Cal dir també, perquè s'entengui el fet, que des de l'any 600 aC i fins al segle XVI pràcticament no es va calcular el nombre π amb molta precisió, ja que fins a finals del segle XV i començaments del XVI no es va començar a treballar, a Europa, amb nombres decimals. Fins aleshores tothom ho feia amb fraccions. Es construeixen expressions complicades amb fraccions com

$$\frac{633\ 1/6}{472\ 3/2}$$

Es coneix una referència xinesa de l'any 500 dC, en la qual queda representat el nombre π com "3 CHANG, 1 CHIN, 4 TSHUM, 1 FEN, 5 LI, 9 HAO, 2 MIAO, 7 HU". Les unitats de l'esquerra són TSHUM, 1 FEN, 5 LI, 9 HAO, 2 MIAO, 7 HU". Les unitats de l'esquerra són 1 HU = 1/10 MIAO etc... Fins a l'edat mitjana les aproximacions més importants sobre aquest nombre es varen fer a l'Índia i a l'Orient.

Cap a l'any 530 Ary-Bhata dóna una aproximació del valor de π amb la fracció $\frac{62832}{20000}$, fracció igual a 3.1416... Brahmagupta cap al 650 dóna un valor aproximat de π, $\sqrt{10} = 3.1416$. Bhaskara cap al 1150 dóna un valor aproximat de $\frac{3927}{1250}$, fracció igual a 3.1416, i un altre $\frac{754}{240}$, igual a 3.14166. Aquestes fraccions varen ser obtingudes mitjançant el mètode d'inscriure polígons regulars dins del cercle.

Els àrabs varen obtenir els valors $\frac{22}{7}$, $\sqrt{10}$ i $\frac{62832}{20000}$ donats per Alkharizm cap a l'any 830, però són sens dubte d'origen hindú. Els xinesos donaven els valors de 3, $\frac{22}{7}$ i $\frac{157}{50}$. Les dues fraccions últimes és molt possible que fossin agafades dels àrabs.

Tornem al continent. La major part dels resultats obtinguts fins aleshores queden resumits amb l'aproximació de Leonardo de Rise, el segle XIII, que dóna a π el valor $\frac{1440}{458\ 1/3}$, igual a 3.1418. El segle XV, Purbach menciona el valor de $\frac{62832}{20000}$, que és igual a 3.1416. El cardenal de Cusa, amb l'expressió $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$ s'aproxima a

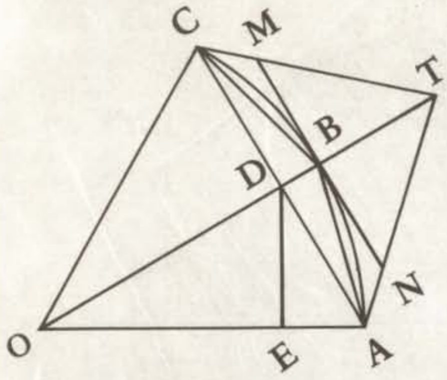


FIGURA 2

Aquest mètode reposa sobre el teorema següent, la seva demostració es quasi immediata.
Teorema: Sigui un arc de cònica ABC de centre O. Ajuntem el centre O amb el punt mitjà D de la corda AC i considerem les tangents TC, TA, MBN.
1) El quadrilàter OCBA és mitjana proporcional entre OCA i el quadrilàter OCTA.
2) El pentàgon OCMNA és mitjana harmònica entre els quadrilàters OCTA i PCBA. D'aquí es representen les notacions de la sèrie

$$b=\sqrt{aA},\ B=\frac{2Ab}{A+b},\ c=\sqrt{bB},\ C=\frac{2Bc}{B+c}\ \ldots\ldots\ldots$$

de la qual els termes tendeixen cap a l'expressió del sector, de manera que difereixin tan poc com es vulgui.
L'ús d'aquest teorema és fàcil d'entendre. Partint de dos valors inicials $a=2$, $A=4$ s'arriba, després de 14 duplicacions, a dos límits que tenen igual les 14 primeres xifres decimals.

π amb el valor 3.1423. Viete, l'any 1579 demostrà que π era més gran que la fracció

$$\frac{3145926535}{10^{10}}$$

i més petit que la fracció

$$\frac{3141592653 7}{10^{10}}$$

Deduïa aquest resultat del càlcul de perímetres de polígons regulars inscrits i circumscrits de 6 x 2^{16} costats. Dóna un resultat equivalent, amb el pas al límit, del producte

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

El pare Adrien Metius, l'any 1585 obté la fracció $\frac{355}{113}$, que és igual a 3.14159292, valor exacte al π fins a 6ᵉ decimal. El resultat en realitat és curiós per la seva inspiració, i demostra que π està comprès entre $\frac{377}{120}$ i $\frac{333}{106}$.

L'any 1593, Adrian Romanus calculà el polígon regular inscrit de 1073741824 costats (2^{30}) i en deduí un valor de π aproximat fins al quinzè decimal. L. Van Ceulen va esmerçar part de la seva vida estudiant la qüestió, i l'any 1596 va conèixer un resultat exacte fins al vintè decimal, inscrivint i circumscrivint polígons regulars de 60 x 2^{33} costats. Va morir l'any 1610, i en la seva tomba, a l'església de Saint-Pierre, es va gravar el nombre π amb 35 decimals. L'any 1630 Grienberger va ésser l'últim dels matemàtics que utilitzà el mètode clàssic d'aproximació del nombre π, inscrivint i circumscrivint polígons regulars en un cercle.

Existeix un mètode geomètric molt més ràpid per al càlcul numèric del nombre π, gràcies a James Grégory (explicat amb més detall a la figura II). La seva rapidesa és deguda al fet que l'arrel quadrada augmenta ràpidament de precisió.

Mètodes analítics de pas al límit

Les primeres referències que es tenen de l'ús de sumatoris o productes infinits per calcular el nombre π són les del vescomte de Brouncker, el qual cap a l'any 1650 tenia que

$$\frac{\pi}{4}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}$$

L'any 1656 Wallis demostrà que

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot}\ldots$$

Aquest era deixeble de Neper, de qui han pres nom els logaritmes neperians. Wallis va ésser un dels matemàtics més importants del segle XVII. Demostracions d'aquesta igualtat es poden trobar en molts llibres de càlcul.

Els geòmetres posteriors a aquestes dates varen començar a fer servir sèries convergents i en varen deduir un mètode que hauria estat difícil de saber abans del coneixement del càlcul de sèries.

L'ús de les sèries per al càlcul de π, va ésser proposat per James Grégory, el qual va demostrar la relació θ = tgθ.

$$\theta-\frac{1}{3}\ \mathrm{tg.}^3\ \theta+\frac{1}{5}\ \mathrm{tg.}^5\ \theta\ \ldots$$

Substituint θ per arc. tag. (X) s'obté el desenvolupament de l'arc tangent que s'explica a la figura III.

El primer matemàtic que va fer servir les sèries de Grégory per aproximar el valor del nombre π va ésser Abraham Sharp, l'any 1699, aconsellat per Halley. Obtingué, després d'un llarg càlcul, 71 decimals exactes. Ho va fer substituint $\theta=\frac{1}{6}\pi$, és a dir un angle de 30° (equivalent a $\frac{\pi}{6}$ radians), del qual és fàcil calcular la tangent.

Machin als voltants de l'any 1706, donà un valor de π amb 100 decimals, calculats mitjançant la fórmula: $\frac{\pi}{4}=4\ \mathrm{arctg}\ \frac{1}{5}\ \mathrm{arctg}\ \frac{1}{239}$. Aquesta fórmula accelera notablement la convergència de la sèrie de Grégory.

Per mitjà de la sèrie de Grégory es varen obtenir diferents variants per calcular una aproximació de π. Per resumir-les una mica construirem la taula nº 1.

L'any 1853, Rutherfort va aproximar fins a 440 decimals exactes i William Shanks fins a 700. El 1882 el matemàtic alemany Ferdimand Lindemann va demostrar que π, no solament era un nombre irracional, sinó irracional transcendent, és a dir, que no era arrel d'una equació algebraica de coeficients enters. D'aquesta manera es va provar que no es podia efectuar la rectificació de la circumferència (i per tant la quadratura del cercle) mitjançant regle i compàs, i aquest problema va quedar resolt després de quasi 2000 anys.

La demostració es basava en el següent: si X és una arrel d'una equació algebraica amb coeficients enters, e^x no pot ser racional. Per tant, si πi fos arrel d'una equació tal, $e^{\pi i}$ no seria racional, però $e^{i\pi}=-1$, i en conse-

FIGURA 3

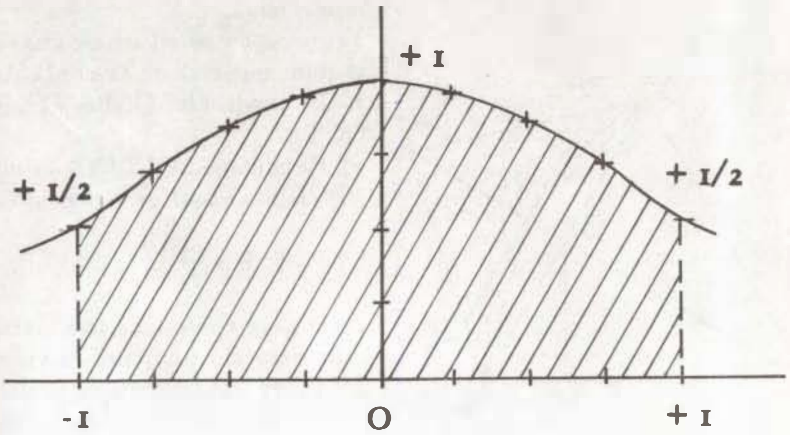
El desenvolupament de l'arc tangent s'obté de la funció $Y=\frac{1}{1+X^2}$

És interessant veure que l'àrea compresa entre aquesta corba i l'eix x entre els valors −1 i 1 val π

Se sap que el desenvolupament de $Y=\frac{1}{1+x^2}$ $1-x^2+x^4-x^6+\ldots\ldots$

Integrant la funció s'obté arctan(x) $= x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\ldots\ldots$ per x = 1 s'obté la serie de Leibniz.

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\frac{1}{11}\ldots$$



TAULA I

Personatge	Fórmula	Nom. de decimals	Any
Sharp	Sèrie de Gregori	71	1699
Machin	$\frac{\pi}{4}=\text{arctg}\,\frac{1}{5}$ - $\text{arctg}\,\frac{1}{239}$	100	1706
Lagny	Sèrie de Gregori	112	1719
Hutton	$\frac{\pi}{4}=\text{arctg}\,\frac{1}{2}+\text{arctg}\,\frac{1}{3}$	100	1776
Euler	$\frac{\pi}{4}=\text{arctg}\,\frac{1}{7}+2\text{arctg}\,\frac{3}{79}$	100	1779
Vega	Algunes variants anteriors	126	1794
Rutherford	$\frac{\pi}{4}=4\text{arctg}\,\frac{5}{70}$ - $\text{arctg}\,\frac{1}{70}+\text{arctg}\,\frac{1}{99}$	152	1841
Dase	$\frac{\pi}{4}=\text{arctg}\,\frac{1}{2}+\text{arctg}\,\frac{1}{5}+\text{arctg}\,\frac{1}{8}$	200	1884
Clausen	$\frac{\pi}{4}=2\text{arctg}-\frac{1}{3}+\text{arctg}\,\frac{1}{7}$	248	1847

TAULA II

Autor		Any	Decimals	Temps
Reitwiesmes	ENIAC	1949	2037 decimals	70 h
Nichalson & Leenel	NORC	1954	3089 decimals	13m
Felton	Pegasus	1958	10.000 decimals	33 h
Genuys	IBM 704	1958	10.000 decimals	100 h
——	IBM 704	1959	16.167 decimals	4.3 h
Shanks	IBM 7090	1960	100.000 decimals	8h 43 m
Leon Guillard	——	1967	500.000 decimals	

qüència, és racional; això comporta que π i no pot ser arrel d'una equació algebraica amb coeficients enters, per la qual cosa passa el mateix amb π.

Crec que és important remarcar que tots aquests personatges de què hem parlat fins ara, feien tots els càlculs amb paper i llapis. En aquell temps, és a dir, al segle passat, encara no existien computadores ni calculadores de butxaca. Quan varen sortir les primeres màquines de calcular, molts dels càlculs matemàtics començaren a ser menys pesats, ja que en part eren resolts amb aquests aparells.

A mesura que la tecnologia anava evolucionant, molts dels resultats numèrics s'obtenien en la meitat de temps i sense l'error possible de la persona humana. Actualment ja s'ha arribat a calcular el nombre π amb més d'un milió de decimals. En la figura IV, hem posat el nombre π amb més de mil decimals, calculats amb el mètode de la figura III, i obtinguts amb l'ordinador de la càtedra de Mètodes Informàtics de l'Escola d'Enginyers Industrials de Barcelona, en poques hores. Imagineu-vos el que podria tardar una persona si ho hagués de fer a mà.

Per centrar una mica més aquesta qüestió, mostraré en la taula nº 2 una idea de la rapidesa del càlcul i el nombre de decimals obtinguts des de l'any 1950 fins al 1970.

Amb la tecnologia actual, i amb no gaire temps, es poden calcular molts decimals de π. Si Rutherfort i companyia ho sabessin, segurament arribarien a maleir la quantitat de dies i mesos emprats repassant els càlculs per obtenir 200 o 400 decimals.

Per acabar, voldria fer notar la importància didàctica que tenen Per aca-

Però com es pot apreciar aquest sumatori convergeix molt lentament, per això es va buscar un mètode que n'accelerés notablement la convergència, i es fa servir el següent:

$$tg(a+b) = \frac{tg(a)\ tg(b)}{1-tg(a)\ tg(b)}\ .$$

substituint $a = \operatorname{arctg}(u)$, $b = \operatorname{arctg}(v)$, obtenim la fórmula $\operatorname{arctg}(u) + \operatorname{arctg}(v) =$

$= \operatorname{arctg}\left(\frac{u+v}{1-u\cdot v}\right)$. Agafant u, v de manera que $\frac{u+v}{1-u\cdot v} = 1$ s'obté $\frac{\pi}{4}$.

Per exemple, amb $u = 1/2$, $v = 1/3$, com va fer Euler, s'obté $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$

i si observa que $\frac{1/3 + 1/7}{1-1/21}$ $1/2$, es té $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$, i

substituint en l'expressió anterior, tenim $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.

Fent servir l'equació $\frac{1/5 + 1/8}{1-1/40} = \frac{1}{3}$ es té $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$

i obtenim: $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{8}$

FIGURA 3 (continuació)

TAULA 3

Data	Personatge	Decimals exactes
2000 aC.	Egipcis (Ahnes)	1
250 aC.	Arquimedes	2
500 dC.	Xinesos	6
1464	Regiomontanus	3
1464	Estronems Indis	3
1580	J. Rheticus	8
1585	Pierre Metius	8
1579	Viete	11
1596	Lud Van Ceulen	20
1597	Adrien Romanus	16
1610	Lud Van Ceulen	36
1621	Snell	35
1705	Abr. Sharp	71
1706	Machin	100
1719	De Lagny	112
1789	Vega	126
1794	Vega	136
1841	Rutherford	152
1844	Dahse	200
1847	Clausen	248
1853	Shanks	318
1853	Rutherford	440
1853	Shanks	440
1853	Richter	330
1855	Richter	500
1873	Shanks	700
1877	Tsing-Chi-Hung	100
1877	Tsing-Chi-Hung	100
1902	Duarte	200
1940	MS. See Uhles	333
1946	Ferguson	620
1948	Ferguson&Wreorche	810
1949	Reitwiesnes	2037
1954	Wicholson&Leenel	3089
1958	Felton	10000
1958	Genuys	10000
1959	—	16167
1960	Shanks	100000
1967	Leon Guillard	500000
—	altres	1000000
—	altres	100000000

bar, voldria fer notar la importancia didàctica que tenen alguns dels mètodes anteriors, per entendre les eines del càlcul. També es poden fer servir per introduir conceptes com els d'integració, etc... Llegint llibres de matemàtiques que comentaven coses sobre el nombre π, vaig veure, en un de francès, unes frases que serveixen per recordar els 10 primers decimals de π. Ràpidament em va passar pel cap que si els francesos disposaven d'aquesta frase, també la podíem tenir nosaltres, i amb l'ajut d'un amic aconseguírem la següent:

Que	l'amic	s'ompli	plenament
3	1 4	1 5	9

el	calaix	antic	amb	molts	decimals
2	6	5	3	5	8

Antoni Serraima

Materials de lectura

Recreations Mathematiques: Rouse Ball, Librairie Scientifique A. Herman, Vol. 2, 3. Paris, 1908.

–*An index of Mathematical Tables*-Vol. I-Fletcher, Miller, Rosserhead, Conrrie. Addison-Wesley (1962).

–*Histoire des Mathematiques*-Vol. I-Rouse Ball- Librairie Scientifique A.Herman Paris (1906).

–*Introduction to calculus and analysis* Richard Courant, Fritz John, Vol. I-John Wiley&Sons (1965).

–Calculation of PI to 100.000 decimals -Daniel Shanks (1961), Math. of Comp. n. 76 (1962).

–Geometria i trigonometria.- D. Vicente Rubio y Diaz, Imprenta de la revista médica de D. Federico Joli (Cádiz), 1900.

–Seminumerical Algorithms (Addison-Wesley). E. Knuta.