

## Entrevista amb Hans Freudenthal, defensor de l'ensenyament de la geometria

Fotografies Anna Boye

40 (75 2/Volum 3/desembre 1983)

ciència 33

Hans Freudenthal és un dels més coneguts pedagogs dins el camp educacional de la matemàtica. Ha estat director del famós IOWO (Institut per al Desenvolupament de l'Educació Matemàtica) a Utrecht i fundador de la revista "Educational Studies in Mathematics". És autor de llibres com *Mathematics as an Educational Task* ("La matemàtica com a tasca educativa") i *Weeding and Sowing* ("Treure les males herbes i sembrar"), els quals han estat traduïts a diversos idiomes (la traducció castellana és en curs), entre ells el rus, amb edicions, inconcebibles en les nostres latituds i més encara en aquests temes, de 120.000 exemplars. Els lectors de (ciència) tenen al seu abast l'article titulat *¿Enseñanza de las matemáticas modernas o enseñanza moderna de las matemáticas?* publicat dins del volum *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza Universidad 207. Pel títol ja s'intueix el que opina Freudenthal sobre aquest tema i avui, 20 anys després que ell publicés aquest article, trobaríem pocs matemàtics que no li donessin la raó quan afirma: "...La teoria dels nivells és estretament lligada a la concepció moderna de les matemàtiques considerades com una activitat. Pot afirmar-se que els mètodes tradicionals tendeixen a "invertir" els nivells: es baixa dels nivells superiors als inferiors en lloc de pujar d'aquests a aquells. Aquesta inversió didàctica dels nivells pot donar lloc a tota una sèrie de dificultats, però el que és veritablement funest és el costum de deixar de costat els problemes de "pujada" a partir del nivell zero.

Crec que aquesta és la raó del fracàs quasi total del nostre ensenyament, fracàs que es manifesta clarament en el fet que, deixant de banda una minoria molt reduïda, absolutament incapaç d'aplicar les matemàtiques que hem après fins i tot als problemes més senzills que se'ns presenten fora de les matemàtiques... A mi em sembla que aquest oblit de les aplicacions en els programes moderns constitueix un perill..."

Hans Freudenthal va visitar Barcelona de camí cap a Saragossa on va participar en les Terceres Jornades d'Aprenentatge i Ensenyament de les Matemàtiques que ja van ser comentades al n.º 28. És un vellet amable que durant el dinar al Tritón ens va parlar del seu país d'adopció, Holanda, un país, segons ell, de burgesos amants de la pintura. Altres obres de Freudenthal són: *Mathematics Observed*, *Linear Lie Groups*, *Algebraic and Topological Foundations of Geometry*, *Brouwer, Collected Works*. A Saragossa va pronunciar una conferència que va titular: "En todos los niveles: ¡geometría!". Alguns dels exemples que va donar il·lustren la nostra entrevista, realitzada pel nostre col·laborador Jaume Puigbò.

---

(ciència): —Ens podrieu donar algunes dades biogràfiques, on van néixer, on van estudiar, etc.?

---

Freudenthal: —Vaig néixer a Alemanya, al que ara és l'Alemanya de l'Est, l'any 1905, prop de Berlín. Vaig començar a estudiar matemàtiques a la Universitat de Berlín l'any

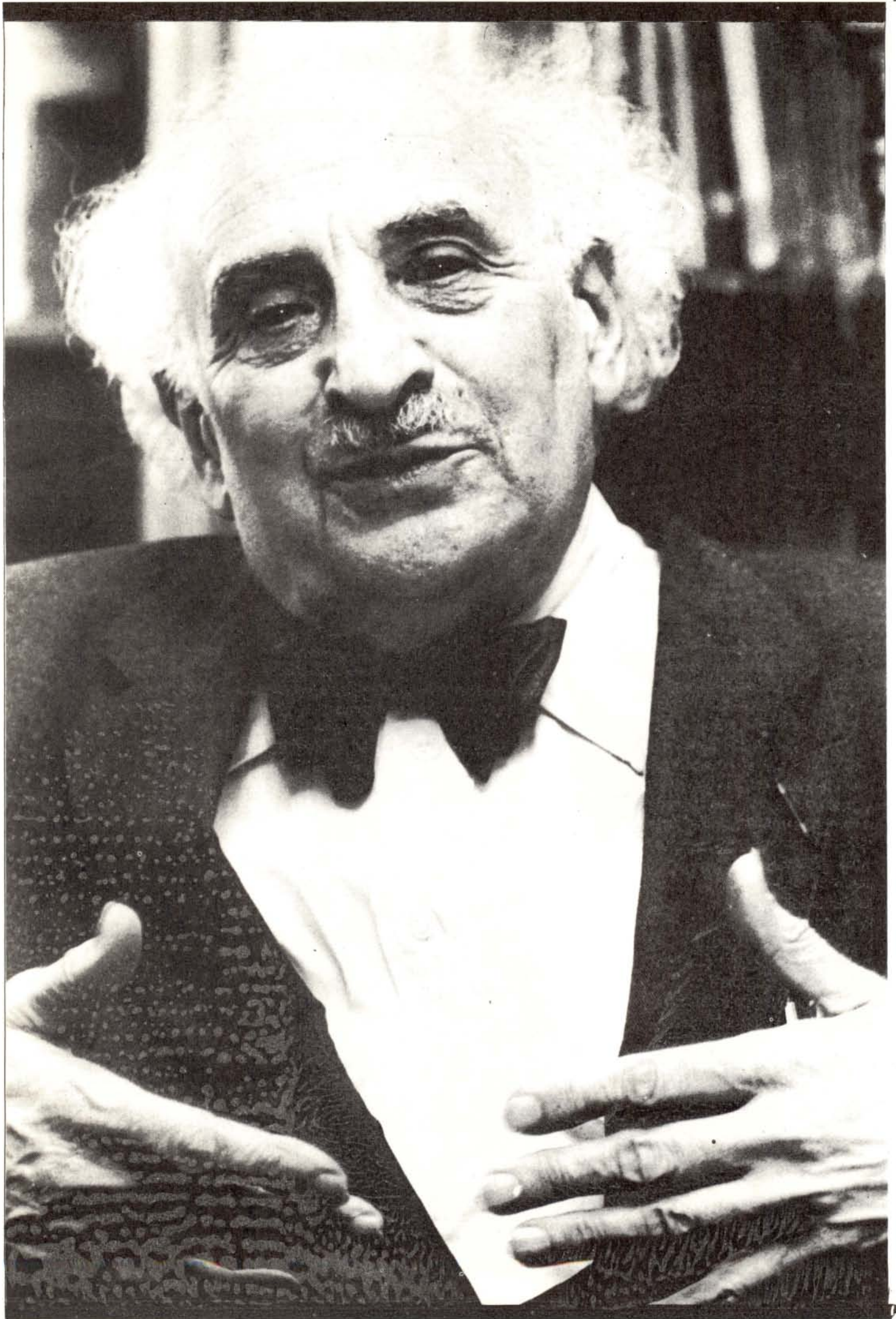
1923 i vaig continuar a París. Més tard vaig tornar a Berlín on vaig fer la tesi. En una conferència que va fer Brouwer vaig fer-li diverses preguntes i així vaig iniciar l'amistat amb ell. Em va demanar que fos el seu ajudant i el novembre de 1930 me'n vaig anar a Amsterdam. Durant l'ocupació alemanya vaig ser acomiadat per ésser jueu. En acabar la guerra vaig entrar de professor a la Universitat d'Utrecht. He treballat en diferents temes, especialment en grups de Lie. Les meves contribucions més importants han estat en el camp de la topologia i durant molts anys vaig treballar en grups de Lie especials. Més endavant em va interessar molt l'educació i també la història i la filosofia. Vaig ser nomenat president d'una comissió estatal per a la modernització de l'ensenyament de les matemàtiques. Després vaig ser director del IOWO (Institut per al Desenvolupament de l'Educació Matemàtica) i es pot dir que els temes educatius han estat el meu centre d'interès durant aquests darrers anys. He escrit uns quants llibres sobre el tema i també un munt d'articles...

---

(ciència): —Quines universitats us han conferit títols honorífics?

---

Freudenthal: —Berlín, Erlangen, Brussel·les, York, Amsterdam... La meua dona, que també està molt interessada en educació, però prové d'un camp diferent (ha estudiat germàniques), va obtenir un doctorat Honoris Causa l'any passat per una universitat alemanya.



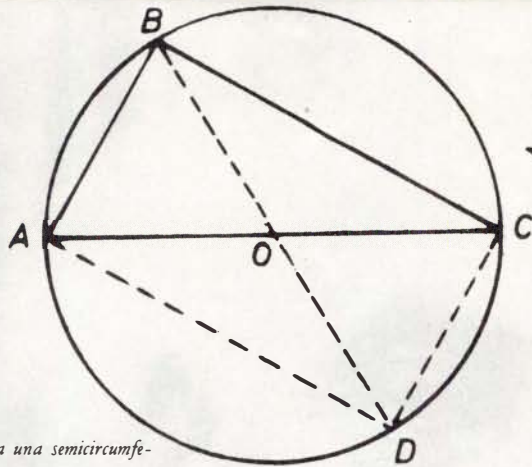


Fig. 1.- L'angle inscrit que abraça una semicircumferència és un angle de  $90^\circ$ .  
Per demostrar que l'angle inscrit B és recte construïm D com a intersecció de BO amb la circumferència. ABCD és un rectangle (les dues diagonals són iguals ja que són diàmetres i això caracteritza els rectangles). Així, doncs, B és recte.

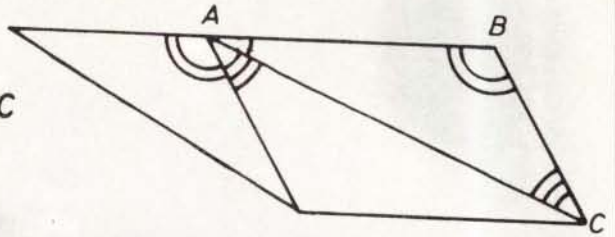


Fig. 2.- La suma d'angles d'un triangle val dues rectes. Enralojem el terra amb còpies del triangle. En el punt A reunim els tres angles del triangle. És evident que la suma és un angle de  $180^\circ$ .

(ciència): -Tentu fills?

**Freudenthal:** -Sí en tenim quatre, i onze néts. La meua filla viu prop de casa meua i un dels seus fills ha estat l'objecte dels meus estudis en les llargues passejades i estones que hem estat junts. Vaig començar quan tenia dos anys i ara ja en té gairebé tretze. És clar que a hores d'ara ja li interessien més altres coses que no pas anar a passejar amb el seu avi.

La gent acostuma a criticar-me quan trec conclusions d'aquest cas. Em diuen: "El vostre nét és un cas especial, és un geni." Però això no és veritat en absolut. Ell ha fet moltes matemàtiques, però no més que qual-sevol persona podria fer-ne. També he treballat amb una nena del nostre barri, una nena que treia molt males notes a l'escola i que més aviat estava poc dotada per a l'estudi. Malgrat això ella ha fet moltes matemàtiques amb mi.

(ciència): -Els estudiants generalment tenen por, fins i tot odien les matemàtiques. Què penseu que es pot fer per millorar aquesta situació?

**Freudenthal:** -Em sembla que això depèn de les matemàtiques que aprenen i del mètodes educatius, que són antiquats. Em sembla que es pot canviar aquesta situació, a poc a poc. Nosaltres hem preparat molts materials i de mica en mica estan penetrant en el nostre sistema educatiu. Però no es poden esperar canvis espectaculars ja que caldria canviar tots els mestres. Els mestres, per regla general, ense-



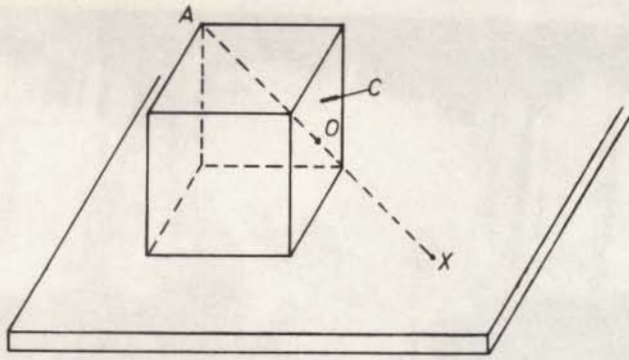


Fig. 3.- Com determinar exactament  $X$ ?  
La recta que passa per un vertex del cub,  $A$ , i el centre,  $O$ , de la cara  $C$ , on es troba amb el pla  $P$ ? (Solució a la Fig. 4).

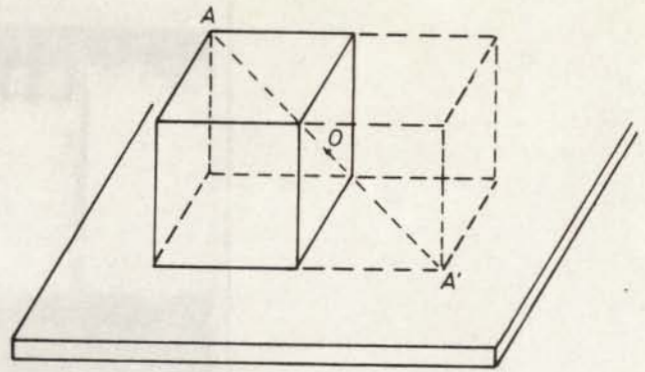
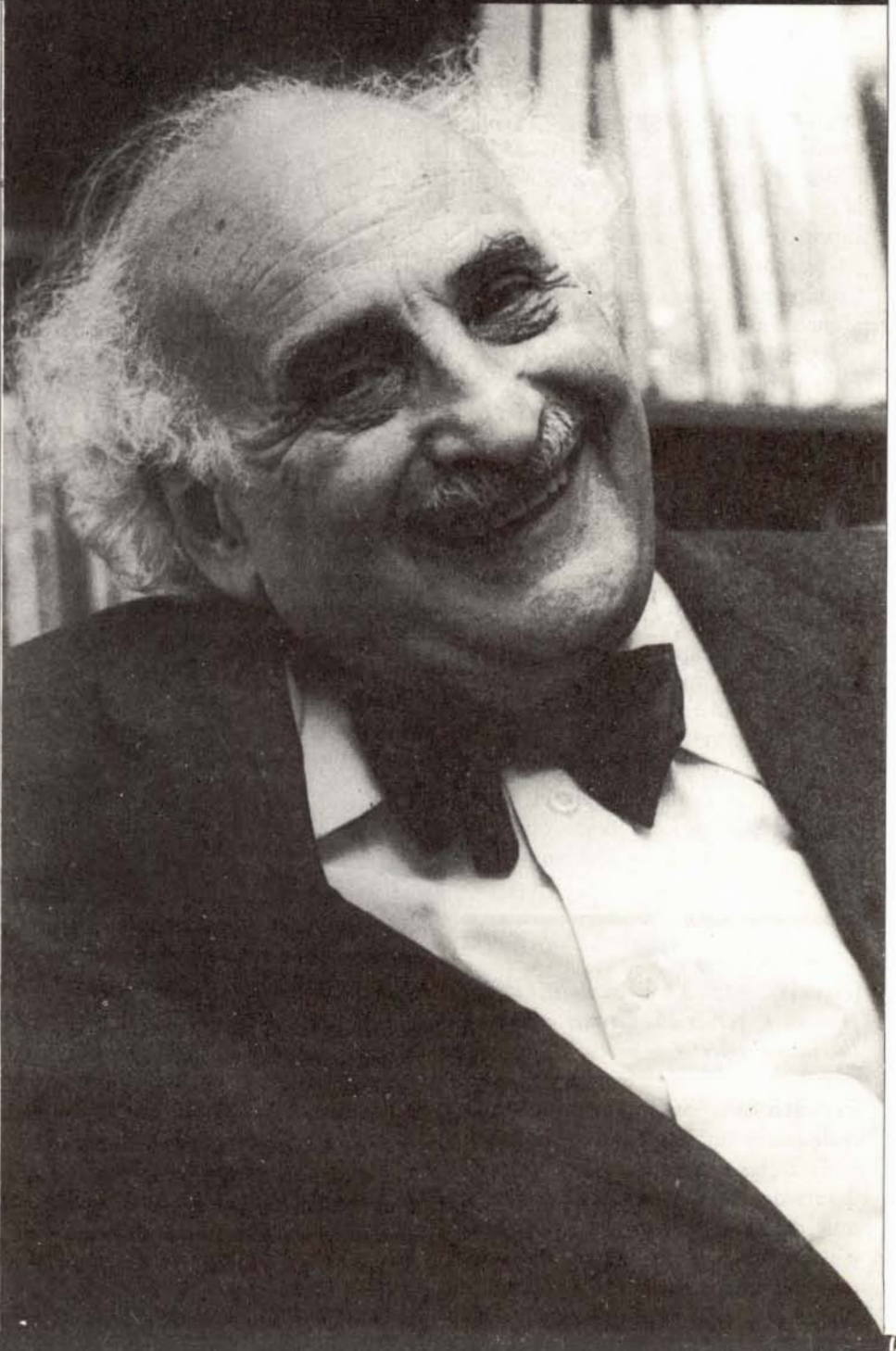


Fig. 4.- Solució al problema de la Fig. 3.  
La recta  $A'O$  i l' $AO$  són coincidents. És a dir  $A'=X$

nyen de la mateixa manera que ells van aprendre. És, per tant, un procés molt lent aquest de la transformació del sistema educatiu. Els que volien implantar les matemàtiques modernes no ho van tenir en compte. És un treball de generacions. De tota manera jo sóc optimista perquè molts dels llibres de text a Holanda han estat influenciats pels nostres mètodes. Les matemàtiques sovint són massa formalistes i no tenen en compte el treball del nen. Un dels defectes corrents és que la gent aprenen matemàtiques, però no saben aplicar-les. Això és degut que les matemàtiques s'ensenyen fora d'un context real. És molt millor ensenyar-les dins d'un context en el qual es puguin aplicar. Aquest és el nostre mètode. No es tracta d'ensenyar les operacions als estudiants com si fossin màquines. Cal que els alumnes entenguin el que estan fent i sàpiguen fer ús dels ordinadors per fer els càlculs pesats. Posem un exemple: Hem de viatjar una distància de 120 km i en portem 87. Quants ens en resten? La major part dels estudiants, fins i tot a l'edat de 16 anys, no efectuen la subtracció, sinó que fan el problema pel compte de la vella i van provant, fent sumes, fins a obtenir el resultat. Aquest mètode funciona, però naturalment si no sabem que l'operació a efectuar és una resta, no podrem utilitzar la calculadora encara que en disposem d'una. Una cosa de similar succeeix amb la divisió: els estudiants no saben quan aplicar-la i tracten de resoldre els problemes a base de sumes i productes. De manera que no poden utilitzar les calculadores perquè no saben quin botó prémer per obtenir la resposta. S'han d'aprendre



les matemàtiques dins d'un context per entendre la situació. Això, quant al mètode. Pel que fa a la matèria, nosaltres hem comprovat que per als estudiants d'escola secundària que no han après bé l'aritmètica, la solució és la geometria. En la geometria hi ha un suport físic, les figures. Després s'han de fer coses sense els dibuixos, però haurà estat gràcies a aquest suport que el nen es podrà, de mica en mica, independitzar de les figures. La geometria, presa d'aquesta manera, com un mètode per raonar, ens obre un camí. Desafortunadament, la geometria s'identifica sovint amb el sistema euclidià d'hipòtesi, teorema i demostració. Jo opino que la geometria s'ha de fer d'una forma més informal. Per altra banda jo també sóc partidari que els nens treballin en petits grups de, per exemple, quatre nens, perquè, aleshores, l'un aprèn de l'altre. Enraonant l'un amb l'altre també desenvolupen les seves capacitats lingüístiques. Això comporta fer algunes modificacions a l'aula i canvia el paper del mestre, però jo he pogut observar que funciona molt bé fins amb nens de nivells diferents.

**(ciència):** *—En altres paraules, el que proposeu és portar l'escola més a prop de la realitat exterior.*

**Freudenthal:** *—Sí, més a prop de la realitat. Naturalment, la realitat pot tenir diversos significats. Per als estudiants dotats, els nombres també són una realitat. Però per a la majoria d'estudiants, la realitat és una altra cosa i és important que ells aprenguin matemàtiques dins d'un context real*



que puguin entendre bé.

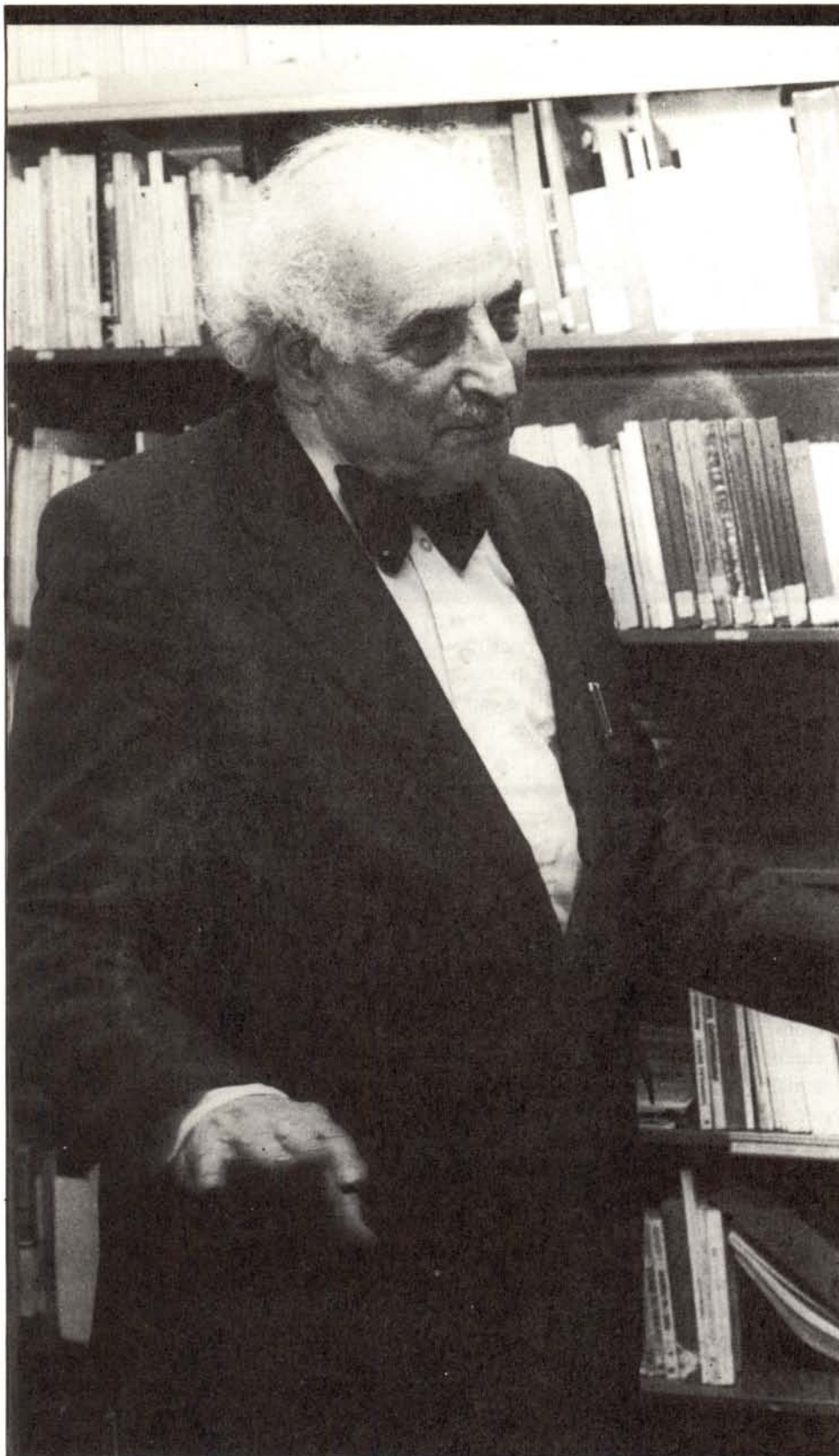
**(ciència):** *—Aleshores, a Holanda, la major part de les escoles segueixen el vostre mètode?*

**Freudenthal:** *—No, solament algunes. Ja he dit que es tractava d'un procés molt lent.*

**(ciència):** *—Però el govern deu fixar els*

*programes d'estudi i això deu dificultar l'adopció dels vostres sistemes.*

**Freudenthal:** *—No, a Holanda el govern no fixa els programes i cada escola té la llibertat d'escollir-los segons les seves necessitats i conveniències. Hi ha, això sí, un examen a nivell nacional al final del període obligatori d'escolaritat, que és als setze anys. També hi ha un test no obligatori al final de l'escola primària que serveix perquè una escola secundària decideixi acceptar o no un nen o una nena. Jo*



desembre 1983/Volum 3/757 45

escola que no és gaire bona s'hauran de conformar amb una escola de les mateixes característiques.

(ciència): *—Així a Holanda no va prendre cos el moviment de les matemàtiques modernes que tant de furor va fer a França, per exemple?*

Freudenthal: *—En l'educació primària no va existir en absolut aquest moviment ja que la nostra comissió va tenir prou força per impedir que es formés. En la secundària ja no vàrem tenir tant d'èxit ja que alguns editors, per l'afany de fer diners, van publicar alguns textos, però de tota manera el moviment va ser molt més moderat que en altres països.*

(ciència): *—El IOWO també s'ocupa de l'ensenyament de les matemàtiques al nivell universitari?*

Freudenthal: *—No, les universitats són molt independents. Tampoc no tenen un programa prefixat per l'Estat, si bé n'hi ha d'estatals i també de privades. L'Estat ajuda totes les escoles i universitats que compleixen uns requisits mínims, com per exemple, els que fan referència a nombre d'alumnes per professor, etc. En el segle XIX només existien universitats públiques, però a poc a poc, les diverses sectes i religions van anar establint escoles i universitats privades. L'Estat va començar ajudant les escoles primàries per acabar finançant les escoles i les universitats a tots els nivells.*

no tinc gaire bona opinió d'aquests tests, però sí que m'agradaria assenyalar que les escoles que utilitzen el nostre mètode se situen només una mica per sobre de la mitjana nacional en aritmètica, però obtenen uns resultats excel·lents en llenguatge. Jo crec que això és degut que els nostres problemes són plens de text i per fer-los els alumnes han d'entendre aquest text, que molt sovint és com una petita historieta. Voldria afegir que en darrer terme el caràcter de l'educació ve determinat pels manuals que els mes-

tres utilitzen i no hi ha dubte que aquests han anat canviant en els darrers anys. Totes les institucions de formació de mestres per a l'escola primària treballen amb els nostres llibres i el mateix podem dir a les que formen els mestres per a l'escola secundària. Crec que la influència dels nous mestres es començarà aviat a notar. Hem de canviar moltes coses del nostre sistema escolar, però. Estic en contra de la selecció que es fa en acabar l'escola primària, ja que els nens de famílies pobres que han anat a una



John von Neumann, un dels més grans matemàtics del segle XX.

(ciència): —Com creieu que els ordinadors afectaran l'ensenyament?

**Freudenthal:** —De fet jo no he estudiat aquest tema a fons. Nosaltres fa catorze anys que donem cursos d'informàtica i hem treballat amb centres que no disposaven d'un ordinador i ens enviaven a nosaltres les targetes per ésser processades. Hem tingut algunes bones experiències. Devem haver treballat amb unes tres-centes escoles amb alumnes sobretot en l'edat dels quinze a setze anys que agafaven l'assignatura com una opció més entre altres. Jo suposo que d'aquí a pocs anys aquesta assignatura serà obligatòria. Deixant aquest aspecte de banda tenim l'ensenyament assistit per ordinador, el qual jo crec que, de moment, no ha progressat gaire. Si un no és ambiciós em sembla que es poden obtenir alguns resultats en aquest camp, però molt menys del que preconitzen algunes indústries americanes. Fins i tot es poden fer algunes coses interessants amb calculadores de butxaca. Ara bé ensenyar per mitjà d'un ordinador em sembla ciència-ficció.

(ciència): —Però l'ordinador pot ser una ajuda valuosa per fer càlculs tediosos.

**Freudenthal:** —Sí, gràcies a l'ordinador es pot treballar en problemes reals, amb dades complicades, la qual cosa era impossible abans. També és veritat que alguns alumnes es familiaritzen molt bé amb el sistema decimal

gràcies a les calculadores. En pocs minuts s'adonen que en dividir per deu la coma decimal es mou un lloc cap a l'esquerra i als nens els agrada jugar amb les calculadores.

(ciència): —Quin és el lloc de la història en l'educació matemàtica?

**Freudenthal:** —Quasi cap. El problema és que els mestres no en saben prou, d'història. Què poden ensenyar? Com a màxim el que han llegit en alguns llibres que s'ocupen d'aquest tema, la majoria dels quals tenen moltes incorreccions. Per descomptat, si el mestre té un bon coneixement del tema aleshores estic a favor que ho inclogui dins del programa. En cas contrari és millor no fer-ho. A la Universitat d'Utrecht hem tingut en els darrers anys un bon nombre de tesis sobre història de les matemàtiques perquè allí tenim un equip de gent que coneix bé el tema. La majoria de gent només sap el que ha llegit en llibres i aquests no són massa fiables. Ens diuen, per exemple, que els egipcis construïen angles rectes utilitzant el triangle de costats 3,4 i 5. Això és un disbarat perquè els egipcis no coneixien el teorema de Pitàgores. Fins i tot les coses que semblen correctes, nosaltres les hem comprovat i han resultat ser equivocades.

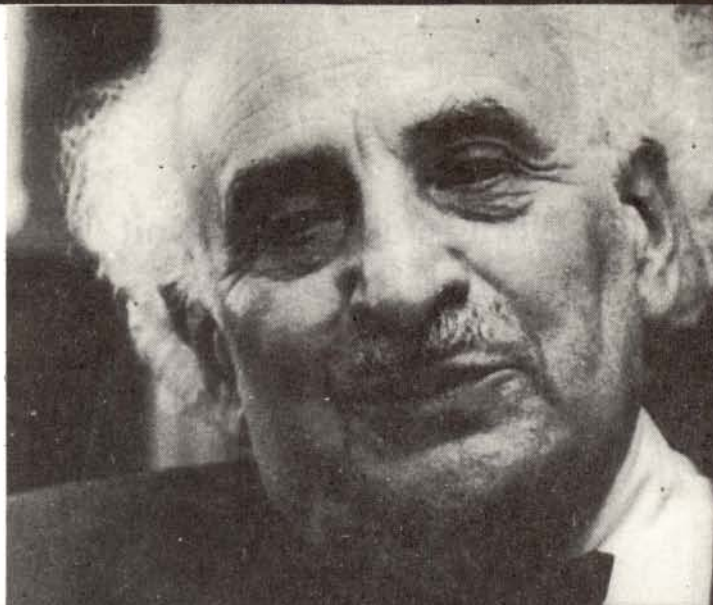
(ciència): —En els vostres llibres, parleu de "la inversió didàctica", és a dir, del fet pel qual en els llibres de text de matemàtiques es posa sovint com a punt de

partida el que en la realitat ha estat un resultat assolit després d'anys d'esforç. Molts dels articles de recerca de matemàtiques s'escriuen així avui dia i és difícil de saber com l'autor ha tingut aquella idea feliç.

**Freudenthal:** —El que és més curiós és que fins i tot els estudiants s'han contagiats d'aquesta manera de fer i és difícil, a vegades, d'entendre el raonament que han fet perquè l'escriuen al revés. El que és cert és que no sempre s'han escrit els articles d'aquesta manera. Arquímedes, per exemple, va descobrir un cert nombre de fórmules de volums de cossos i ho va fer per mitjans mecànics, amb palanques, etc. Ell explica tot això, si bé després en fa una demostració utilitzant el que avui en diríem càlcul. Un dels pocs matemàtics contemporanis que ha explicat com obtenia els seus resultats és Van der Waerden; per exemple, en el cas de la demostració de la hipòtesi de Baudet. És una llàstima que no hi hagi més publicacions d'aquest estil ja que gràcies a la història podem saber com s'han desenvolupat les coses, però no com aquest desenvolupament ha tingut lloc dins de la ment dels individus.

(ciència): —Creieu que això seria un aspecte important i que caldria insistir-hi?

**Freudenthal:** —Sí, crec que s'hauria de demanar als matemàtics que ho fessin. No és que digui que s'ha d'ensenyar així, però sí que es poden aprendre moltes coses d'aquest procés de des-



Una anècdota de Freudenthal que il·lustra que poc sabem aplicar les matemàtiques que estudiem a l'escola:

(ciència 33

desembre 1983/Volum 3/759) 47

*L'anècdota té lloc davant d'una finestreta a la qual vaig per enviar un telegrama a l'estranger. La tarifa és de 17 cèntims (de florí) per paraula. El funcionari compta les paraules i li'n surten 23, multiplica hàbilment sense equivocar-se 17 per 23, revisa algunes vegades l'operació i troba que està bé. Li pago. Però llavors s'adona que, d'acord amb el reglament, dues d'aquestes paraules han de ser comptades com una de sola i que, per tant, només he de pagar 22 paraules. El funcionari es submergeix de nou en l'aritmètica, multiplica 22 per 17 i resta el resultat del primitiu, obtenint una diferència de 17 cèntims que em van ser tornats amb tota cortesia''.*

envolupament d'una idea o d'una demostració. Al mateix temps, el matemàtic que reflexioni sobre com obté els seus resultats serà un millor professor.

(ciència): —Vós que heu conegut tants matemàtics deveu conèixer moltes anècdotes i de fet jo n'he llegit algunes de les que heu publicat en el "Mathematical Intelligencer", per exemple, la del matemàtic i enginyer grec Caratheodory que va ser detingut a la frontera turca perquè portava un llibre que es titulava La machine que fait cent revolutions par minute. Ens en podríeu explicar alguna

d'inèdita?

Freudenthal: —Bé, doncs... Sí, ara recordo que quan jo era a Berlín feiem una conferència-col·loqui els dimarts a les 7.30 de la tarda. L'anècdota és sobre John Von Neumann. Jo era aleshores estudiant i ell era *privatdozent*. Per cert, que malgrat que només em portava tres anys jo vaig aprendre molt d'ell. És clar que era un prodigi. Bé, doncs, com deia, ens reüníem els dimarts un petit grup d'estudiants i professors ajudants. Hi havia establerta la tradició que el conferenciant només podia parlar fins a les nou. Per cada cinc minuts que es retardés havia de comprar una ampolla de conyac. Pel contrari, si acabava abans, per cada cinc minuts tenia dret a una copa

de conyac d'una botella que el grup guardava per a aquestes ocasions. Doncs bé, quan parlava Von Neumann acabava a les 8.30, de manera que engolia 6 copes de conyac, una darrera l'altra i després estava suficientment serè per continuar la discussió en una taverna a la qual solíem anar un cop finalitzada la xerrada.

(ciència): —Era Von Neumann un bon conferenciant?

Freudenthal: —Era un excel·lent conferenciant que explicava les coses de forma que tots les enteníem. Recordo la seva xerrada sobre grups lliures per explicar aquest fenomen descobert per Hausdorff pel qual es pot descompondre l'esfera en tres parts congruents, de manera que, ajuntant-ne dues d'elles s'obté altra vegada l'esfera.<sup>1</sup> Per descomptat es tracta de conjunts patològics. La demostració es basa en el fet que el grup de l'esfera no és commutatiu.

1.- Nota de l'entrevistador: Es tracta d'una famosa paradoxa, relacionada amb la paradoxa de Banach-Tarski. Els conjunts en què es divideix l'esfera són conjunts no mesurables, per la qual cosa, dissortadament, aquest teorema no ofereix cap possibilitat d'augmentar la productivitat als fabricants de pilotes. La paradoxa de Banach-Tarski ve a dir que el Sol i una bola de billar són equivalents en el següent sentit: el Sol és una unió disjunta d'un nombre finit de conjunts (no mesurables)  $S_1, \dots, S_n$  que per rotació i translació es transformen en  $B_1, \dots, B_n$  (respectivament) els quals, en unir-los, formen la bola de billar. Això no és cap contradicció ja que als conjunts  $S_1, \dots, S_n$  no se'ls pot assignar cap mesura. Per altra banda les matemàtiques donen tan sols models de la realitat (generalment continus) i des de la teoria atòmica se sap que la realitat és discontinua.