

Sobre el moviment d'objectes en fluids

L'objectiu d'aquest article de divulgació és la introducció de les expressions bàsiques de les forces hidrodinàmiques que actuen sobre els objectes que es mouen en el si d'un fluid (gas o líquid).

En cada cas, es presenten alguns exemples de diversos camps d'interès en les ciències o en la vida quotidiana.

1. Introducció

L'experiència quotidiana ens demostra que quan un objecte es mou en el si d'un fluid (gas o líquid) experimenta una força de resistència que s'oposa al seu moviment. Lamentablement, aquest fet tan habitual no té cabuda en els programes dels nostres estudiants que, en conseqüència, n'acostumen a ignorar la formulació i les diverses aplicacions. L'objectiu d'aquest article és contribuir a la divulgació d'unes lleis físiques que poden resultar de gran utilitat en moltes ocasions i que permeten ampliar amb molt poc esforç el camp de la física que s'estudia a les escoles o a diverses facultats amb una variada sèrie de fenòmens totalment familiars.

Abans de començar aquest article convé presentar un esquema que ens permeti clarificar al màxim el desenvolupament del nostre tema. Quan un objecte es mou amb velocitat U en un fluid en repòs, experimenta en general dues forces hidrodinàmiques (o aerodinàmiques). Una d'elles és la *força de resistència*, que té la mateixa direcció i sentit oposat a la velocitat. L'altra força, que anomenarem *força de sustentació*, es presenta en el pla perpendicular al vector velocitat, quan els objectes tenen forma asimètrica (vegeu figura 1).

El segon factor que tindrem en compte serà la velocitat: quan és *baixa*, predominen els efectes de *fricció* de l'objecte amb les capes contigües del fluid; quan és *elevada*, l'efecte dominant és la *succió de l'estela*. Finalment, un tercer factor a tenir en compte és si la massa del fluid que considerem té una *extensió infinita o finita*. En aquest darrer cas, cal considerar la força deguda a la *interacció amb els límits* del fluid, com per exemple les parets del recipient o la superfície lliure del fluid. Una bona part de la resistència al moviment amb què es troben els vai-

xells es deu precisament a l'efecte de les ones que creen en la seva proa (i d'aquí provenen, precisament, per disminuir aquest factor, les modernes proes de bulb dels superpetrolers). En aquest article no considerarem aquest factor, essencialment per manca d'espai.

2. Viscositat i nombre de Reynolds

Per remenar un vas d'aigua cal menys esforç que per remenar-ne un de mel. En el llenguatge quotidià diríem que la mel és més "espessa" que l'aigua. Parlant amb propietat, cal dir que la mel és més "viscosa" que l'aigua. La *viscositat* és una propietat de les substàncies fluides (gasos o líquids), tan característica i important com, per exemple, la densitat, la compressibilitat o la calor específica, ja estudiats en els programes elementals. La viscositat expressa de forma quantitativa la força per unitat de superfície entre dues capes contigües de fluid que es mouen a diferents velocitats. En contrast amb el cas de la fricció entre sòlids, la "fricció" entre fluids depèn de la diferència de velocitats de les capes esmentades, i de la distància entre elles. Com més gran és la diferència de velocitats, hi ha més força. La unitat habitual de la viscositat es denomina *poise* (en honor del físic i metge francès Poiseuille), que val $1 \text{ poise} = 1 \text{ dina. segon/centímetre}^2$. En la taula 1 presentem la viscositat de diverses substàncies. Com podem veure, en els líquids la viscositat disminueix quan augmenta la temperatura (per això, si un líquid no raja, l'escalfem per fer-lo rajar). En els gasos, al contrari, augmenta en augmentar la temperatura.

Tot objecte té, segons el principi d'inèrcia, una tendència a mantenir el seu estat de moviment (el seu moment lineal, o el seu ímpetu, o el producte massa x velo-

Taula 1.
Viscositat de l'aire i d'alguns líquids a diverses temperatures. La unitat emprada és el centipoise (1 centipoise = 0,01 poise)

Material	0° C	20° C	40° C
Aire	0,017	0,018	0,019
Aigua	1,79	1,01	0,66
Mercuri	1,68	1,55	1,45
Etanol	1,77	1,20	0,83
Oli d'oliva	138,00	84,01	36,32
Sang	—	3,01	2,08
Glicerina	12.110,0	1.490,0	410,0

citat). Aquesta tendència es veu oposada per la força de fricció amb el fluid. Per al tema que considerem és de gran importància saber què predomina. El quocient força d'inèrcia/força de fricció viscosa es pot expressar de forma molt simple pel *nombre de Reynolds* (físic anglès de meitats del segle passat), definit com

nombre de Reynolds =

$$\frac{\rho U R}{\eta} \quad (1)$$

on ρ és la densitat del fluid (massa/volum), U la velocitat de l'objecte, R una de les seves dimensions característiques i η la viscositat del fluid. El nombre de Reynolds, quocient de dues forces, no té dimensions.

Haurem de distingir en aquest treball entre el cas de petit nombre de Reynolds (menor que la unitat) i alt nombre de Reynolds (unes mil o deu mil vegades la unitat). Es aquest criteri el que ens permetrà dir si una velocitat és baixa (Reynolds petit) o elevada (Reynolds gran). En el primer cas, predomina la força viscosa, la "fricció". En el segon, dominen les forces inercials o bé, en d'altres paraules, la "succió de l'estela"

per David Jou i Mirabent

David Jou i Mirabent (Sitges, 1953) és doctor en ciències físiques i professor adjunt al departament de termologia de la Facultat de ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona. Ha estat publicat diversos llibres de poesia, un extret dels quals va ser

publicat al número 22, desembre 1982. Al número 9, setembre 1981, va publicar l'article que va mereixer el primer premi "Divulga": Per què el cel és blau, el sol vermell i els núvols blancs?

(Figura 2). Ja amb aquests conceptes, podem començar el nostre estudi de les forces hidrodinàmiques.

3. Força de resistència a petit nombre de Reynolds: llei de Stokes

Suposem una esfera de radi R que es mou en un fluid de densitat ρ i viscositat η a una velocitat U . Hem triat l'esfera perquè és la forma més simple i és susceptible d'anàlisi quantitativa. Si el radi, la velocitat o la densitats són petites, o si la viscositat és gran, de tal manera que el nombre de Reynolds (1) sigui menor que la unitat, la resistència es deura a la "fricció" entre l'objecte i les capes adjacents de fluid, i a la "fricció" entre les esmentades capes de fluid. (Vegeu figura 2a). El càlcul matemàtic de la força, bastant complex, es veu recompensat amb una expressió simplíssima

$$F_{\text{resistència}} = 6\pi\eta R U \quad (2)$$

Aquesta expressió es denomina *lleï de Stokes*, en honor del físic i matemàtic anglès que vers l'any 1860 la va descobrir. Veïem que la força de resistència (de sentit oposat a la velocitat, no ho oblidem) és proporcional a la velocitat, al radi i a la viscositat. Observem que no depèn de la massa de la partícula.

Aquesta fórmula varia lleugerament si en lloc d'una esfera haguéssim considerat un cos d'alguna altra forma (un el·lipsoide, per exemple). En el cas general passaria a ser $F_{\text{res}} = B\eta R U$, on B dependria de la forma (del valor dels eixos major i menors en un el·lipsoide), i R seria un d'aquests eixos, o una altra longitud característica de l'objecte. La força, però, seguiria essent proporcional a la velocitat. Una altra petita modificació es presenta en el cas que l'esfera, en

lloc de ser sòlida, sigui gasosa (bombolla). En aquest cas, el factor 6 de l'equació (2) es transforma en un 4. Si la partícula esfèrica tingués una certa càrrega elèctrica, polaritzaria l'aigua del seu voltant, i això augmentaria una mica el seu radi R aparent. Malgrat aquestes modificacions, la lleï de Stokes resumeix i condensa una gran quantitat d'informació física.

En quins casos podem aplicar la lleï de Stokes? Quan el nombre de Reynolds és petit, hem dit. Podem calcular el nombre de Reynolds en una situació típica, per a orientació del lector. Suposem una cèl·lula esfèrica de radi $R = 5 \times 10^{-4}$ cm movent-se en aigua, de viscositat $\eta = 1,0 \times 10^{-2}$ poises i densitat $\rho = 1$ g/cm³, a velocitat $U = 3 \times 10^{-3}$ cm/s. Amb aquestes dades, bastant típiques del moviment de cossos unicel·lulars, obtenim un nombre de Reynolds igual a $1,5 \times 10^{-4}$, i per tant la lleï de Stokes és perfectament aplicable. En canvi, ja no seria aplicable a la caiguda d'una gota de pluja, posem per cas, ni al moviment d'una pilota. Observem de passada que perquè el moviment de natació d'un ésser humà tingués el mateix nombre de Reynolds que el de la cèl·lula, i, per tant, fos dinàmicament comparable al moviment cel·lular, l'ésser humà hauria de nedar en un líquid tan viscos com el quitrà! No podem extrapolar les nostres idees intuïtives de natació al cas de les cèl·lules!

Aplicacions: Sedimentació

L'equació (2) és molt útil per als geòlegs, metges i biòlegs. Imaginem una petita esfera suspesa en un fluid. Sobre ella actuen tres forces: a) la de la gravetat, que val $F_g = (4/3)\pi R^3 \rho g$, on ρ és la densitat del material de l'esfera i $(4/3)\pi R^3$ és el seu volum. Aquesta força fa baixar l'esfera (vegeu figura 3). b) La força d'Arquimides, ja sabuda de física elemental, ajuda a sostenir l'esfera. El

seu valor és igual al pes del fluid desplaçat. El seu valor és, doncs, $F_{\text{Arq}} = (4/3)\pi R^3 \rho g$, on ρ és la densitat del fluid i g l'acceleració de la gravetat. c) La força de Stokes o de resistència, que és proporcional a la velocitat i ve donada per (2). Al principi, la partícula està immòbil i la força de Stokes és nul·la. A mesura que augmenta la seva velocitat, però, la força de Stokes creix fins que arriba un moment en què la suma de les forces cap amunt (Arquimedes més Stokes) és igual a la força cap avall (gravetat). En aquest cas, com sap tot estudiant, el moviment ja no s'accelera (segons la lleï de Newton), sinó que segueix cap avall amb velocitat uniforme. Aquesta *velocitat de sedimentació* ve donada (igualeu $F_{\text{Arq}} + F_{\text{res}} = F_g$) per

$$U_{\text{sedimentació}} = \frac{2R^2}{9\eta} (\rho' - \rho) g \quad (3)$$

Aquesta fórmula ens dona la velocitat de sedimentació de glòbuls rojos (anàlisi de sang!), de macromolècules (bioquímica, o física de polímers!), de plàncton (ecologia!), de fangs i sorres (geologia!), o la velocitat d'ascens de bombolles en el xampany o la cervesa (amb la modificació lleugera i secundària que hem indicat abans). Es, per tant, una fórmula molt útil! Podem posar dos exemples de la seva aplicació, que donaran una idea d'ordres de magnitud:

a) Velocitat de sedimentació d'un glòbul roig de radi $R = 5 \times 10^{-4}$ cm i densitat $\rho = 1,3$ g/cm³ en plasma sanguini (que considerarem, per simplificar, de la mateixa densitat i viscositat que l'aigua). Com que $g = 980$ cm/s², tenim finalment $U_{\text{sedimentació}} = 1,6 \times 10^{-3}$ cm/s. Aquesta velocitat és molt baixa! Per això, si volem estudiar la sedimentació, ja no de glòbuls rojos, sinó fins i tot de macromolècules, cal recórrer a la centrifugació, que substitueix la gravetat per l'acceleració centrífuga, unes mil o deu

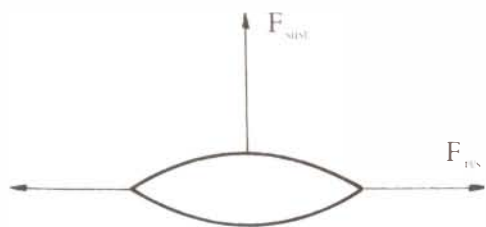


Figura 1.
Grafic de les forces hidrodinàmiques sobre un cos en moviment. U és la velocitat del cos respecte del fluid, F_{res} és la força de resistència i F_{sist} la força de sustentació.

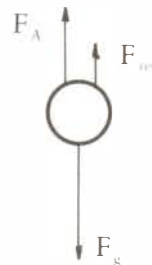


Figura 3.
Sobre una partícula que se sedimenta actuen tres forces (a) F_g el pes; (b) F_A la sustentació d'Arquimedes o sustentació estàtica; (c) F_{res} la resistència hidrodinàmica. Quan $F_g = F_A + F_{res}$, la velocitat de sedimentació resta constant.

mil vegades superior, segons la centrífuga. Això ens permet reduir mil o deu mil vegades la durada de l'experiment!

b) Variació anual de la velocitat de sedimentació del plàncton. La viscositat de l'aigua a l'hivern (5°C) val $\eta = 1,52 \times 10^{-2}$ poise i a l'estiu val (25°C) $\eta = 0,90 \times 10^{-2}$ poise. Suposem, encara que no sigui totalment cert, que la densitat no varia. Aleshores, la relació de les velocitats de sedimentació a l'estiu i a l'hivern val $U_{estiu}/U_{hivern} = \eta_{hivern}/\eta_{estiu} \approx 1,7$. És a dir, com que la velocitat de sedimentació és inversament proporcional a la viscositat, la sedimentació és més ràpida a l'estiu que a l'hivern. Cal advertir el lector, però, que hi ha d'altres factors que influeixen en la sedimentació de plàncton, com l'estat de turbulència o els corrents de convecció. En concret, la microturbulència deguda a moviments induïts pel vent o per efectes tèrmics pot fer que la viscositat aparent sigui unes cent o mil vegades superior a la viscositat habitual. Això, és clar, juga a favor de la supervivència del plàncton, que si no, s'enfonsaria ràpidament a zones fora de l'abast de la llum solar.

4. Força de resistència a alt nombre de Reynolds: coeficient de resistència aerodinàmica

Quan el nombre de Reynolds és elevat (de l'ordre de mil o deu mil), la força de resistència ja no és proporcional a la velocitat, sinó al quadrat de la velocitat. En aquestes circumstàncies, el fenomen responsable de la resistència no és la "fricció". Com que el nombre de Reynolds expressa el quocient força inercial/força viscosa, el fet que sigui molt més gran que la unitat indica que la viscositat és molt menor que no pas els

efectes inercials. Aquests efectes inercials comuniquen energia cinètica a les partícules del fluid i creen una estela de moviment caòtic, ràpid, turbulent, en una paraula. L'energia de l'estela prové, és clar, de la del cos, que així va perdent la seva energia cinètica i, per tant, la seva velocitat (Figura 2b).

La forma de la llei de la força de resistència hidrodinàmica (o aerodinàmica) és ara

$$F_{res} = \frac{1}{2} \rho U^2 A_x C_x \quad (4)$$

Aquesta llei no es pot deduir rigorosament, però el seu significat és fàcil de comprendre. Segons l'equació de Bernoulli, $(1/2) \rho U^2$, és proporcional a la pressió en la zona de l'estela (pressió que xucla el cos i el frena). Si multipliquem aquesta pressió per A_x (àrea frontal de l'objecte), tindrem una força (força = pressió x superfície). El coeficient C_x depèn de la forma de l'objecte, i hi intervien molts fenòmens complexos. La densitat ρ és, recalquem-ho, la densitat del fluid, no la de l'objecte! Aquesta llei ens permetria d'obtenir, seguint el procediment del paràgraf anterior, una expressió per a la velocitat de caiguda de, per exemple, una gota de pluja, de pedres o de paracaigudistes, o, fins i tot, i exagerant una mica la seva validesa, ens permetria d'obtenir la calor produïda en el "Columbia" i altres naus de l'espai quan entren a l'atmosfera!

Subratllem algunes aplicacions, a més de les que acabem de suggerir:

Aplicacions.

1) El coeficient de resistència aerodinàmica.

Segurament el lector voldrà més detalls respecte del coeficient C_x . Quin és exactament el seu significat? Una ràpida inspecció a algunes revistes d'automobilisme ens ho aclarirà. Cada cotxe (cada avió, cada peix, cada ocell) tenen el seu coeficient C_x (sense dimensions), que indica la força que han de fer per mantenir

Taula 2.

Coeficient de resistència aerodinàmica d'una esfera, d'alguns models d'automòbil i d'animals marins. Cal tenir present que, en realitat, el factor C_x disminueix lentament a mesura que augmenta el nombre de Reynolds

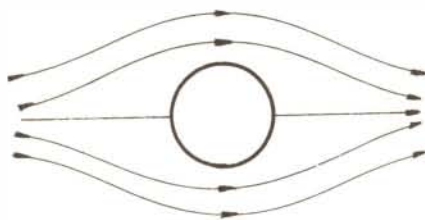
Esfera	0,48
Opel Corsa	0,36
Ford Sierra	0,34 (berlina)
Ford Sierra	0,32 (coupé)
Audi 100	0,30
Peixos	0,25-0,05
Dofí	0,06

una determinada velocitat. En la taula 2 he recollit alguns exemples de factors C_x d'alguns cotxes i d'alguns animals marins.

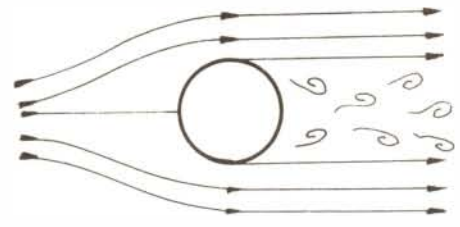
El factor C_x és, doncs, un dels interessos dels enginyers i dissenyadors d'automòbils! Minimitzar el C_x d'un cotxe vol dir, evidentment, estalviar combustible. Per disminuir-lo, cal donar a l'estructura una forma aerodinàmica, és a dir, convé reduir al màxim la formació d'estela, evitant, per exemple, les variacions brusques de perfil. Una bona part del factor C_x dels cotxes es deu a la interacció entre el cotxe i la capa d'aire inferior, entre ell i el paviment. Els peixos, que naden en un volum pràcticament il·limitat de fluid, no tenen aquest problema, i, per la seva forma especial, aconseguen un C_x molt més petit que no pas els cotxes.

2) Potència dels vaixells.

Suposem que una barca, amb un motor de 15 CV, navegués a 5 nusos (5 milles/hora). Quina potència haurien de tenir els seus motors per poder duplicar la velocitat? De primer antuvi, hom se sent temptat de dir: dupliquem la potència. Però no és cert. Recordem que



(a)



(b)

Figura 2.
(a) Moviment a petit nombre de Reynolds: la força és essencialment viscosa, de "fricció" entre les lamines fluides. (b) Moviment a alt nombre de Reynolds: la resistència és deu basicament a l'estela turbulenta.

potència = força x velocitat. Així, doncs,

$$\text{Potència} = (1/2) \rho A_x C_x U^3 \quad (5)$$

Això ens diu que la potència no és proporcional a la velocitat (com és el cas de la fricció entre sòlids: neumàtics-quitrà), sinó al cub de la velocitat. Es a dir, per duplicar la velocitat cal multiplicar la potència per $2^3 = 8$! Per tant, a la barca li caldrien 120 CV, i no simplement 30 CV! Això ens ajuda a comprendre els problemes del moviment dels vaixells —i això que no comptem la resistència d'ona! I també ens permet veure les limitacions de la regla de tres...

5. Força de sustentació a alt nombre de Reynolds

Quan un cos asimètric es mou en un fluid, actua sobre d'ell, a més de la força de resistència, una força de sustentació (vegeu figura 1). El mateix cas es presenta quan el cos és simètric, però gira mentre avança. Aquest és el cas de l'"efecte" que experimenten les pilotes de futbol, o els glòbuls rojos en la sang, que s'acumulen per aquest efecte en el centre dels vasos sanguinis! Aquesta força es deu essencialment a la succió d'una zona de baixa pressió sobre l'objecte en qüestió. En l'ala d'un avió, la baixa pressió es produeix a la part superior, i per això l'avió se sosté en l'aire. Naturalment, si la pressió fos la mateixa en les dues bandes (ala simètrica), no hi hauria força vertical. Anàlogament a la força de resistència hidrodinàmica, la força de sustentació hidrodinàmica (o aerodinàmica) ve donada per

$$F_{\text{sust}} = \frac{1}{2} \rho U^2 A_y C_y$$

on ara A_y és la superfície horitzontal de l'objecte (de l'ala de l'avió, posem per



Taula 3.

Coefficient de sustentació aerodinàmica per a alguns animals voladors. En aquest cas, s'agafa com a velocitat U en l'equació (6) la velocitat mitjana de vibració de les ales. En els avions, C_y és també de l'ordre de la unitat.

	C_y	Nombre de Reynolds
mosquits	0,8-1,0	770-1.000
abelles	0,8-1,2	4.200-4.500
escarbats	0,5-0,7	3.000-4.300
colibrí	1,9-2,0	6.400-7.500

cas) i C_y és el coeficient de sustentació hidrodinàmica.

Aplicació. Càlcul de la velocitat de creuer d'un avió.

Si un avió té una massa m (i per tant un pes mg), i si les seves ales tenen una àrea horitzontal A_y (cadascuna), i un coeficient C_y , quina serà la seva velocitat de creuer? Per resoldre aquest problema hauríem d'igualar la força de sustentació

total (dues ales) al pes de l'avió. Per tant, obtindriem $U_{\text{creuer}} = \sqrt[3]{mg/\rho A_y C_y}$. Aquesta fórmula és, evidentment, molt simplificada. El càlcul veritable és un dels temes bàsics de les assignatures d'enginyeria aeronàutica. Però ja ens dona prou informació! Els avions de caça tenen ales petites i velocitat elevada. Els de transport, ales grans i velocitat relativament petita. Si introduïssim la U_{creuer} en l'equació de la potència (5) podríem calcular la potència dels motors que necessita l'avió! Naturalment, aquestes consideracions elementals no són en absolut aplicables quan l'avió s'acosta a la velocitat del so.

6. Conclusions

Només hem esbossat una introducció elemental, però útil, em sembla, a aquest tema apassionant i quotidià. Queden encara molts qüestions. ¿Per què les pilotes de golf tenen superfície puntejada i no llisa? Si la tinguessin llisa recorrerien una distància menor en un 30% a la que ara corren! Per què? Perquè la turbulència en aquesta capa límit disminueix l'àrea de l'estela. Per què onegen les banderes? Quina força fa el vent sobre els objectes? Per què...? Aquesta senzilla panoràmica, basada en dues fórmules trivials, (2) i (4), presenta força aplicacions pluridisciplinars. I ens permet comprendre per què no podem jugar a futbol amb un globus i sí amb una pilota. Senzillament: perquè la força de resistència aerodinàmica sobre els dos és la mateixa i, per tant, l'acceleració de frenat del globus, de massa inferior, és gran, mentre que la de la pilota, de massa superior, és petita, com ja sabem dels nostres jocs des que érem criatures.

David Jou