El grup de renormalització i les transicions de fase

La construcció de la teoria física moderna exigeix cada cop més un esforç conceptual molt gran i un llenguatge, basat en matemàtiques cada cop més sofisticades, amb aspectes que poden interpretar-se com a esotèrics. Aquests fets són un aspecte de l'allunyament cada cop més gran per part del públic en relació amb els coneixements del món físic. Tothom sospita, de tota manera, que aquesta situació d'aïllament recíproc no ha estat resolta perquè, de retruc, beneficia les intencions de guardar en secret alguns dels coneixements, amb finalitats que podríem qualificar globalment com de benefici. Tanmateix, és cada cop més imprescindible, i més difícil, anar fent conèixer els progressos del saber de la física. Amb aquesta intenció, donada la ressonància mundial dels premis Nobel, hem sol·licitat la col·laboració d'Oriol Valls, actualment als EUA, perquè fes per als lectors de (ciència) una divulgació del premi de l'any 1982.

I.–El premi Nobel de física 1982

L'octubre passat el premi Nobel de física va ser atorgat a Kenneth Wilson, de la Universitat de Cornell, per (en les paraules de la Reial Acadèmia de Ciències de Suècia) "la seva teoria dels fenòmens crítics relacionats amb les transicions de fase". El mètode utilitzat per Wilson és el grup de renormalització.

La importància d'aquest mètode esdevé més evident quan recordem que és molt poc freqüent que una sola persona guanyi, tota sola, el premi Nobel de física. L'última vegada que va passar va ser l'any 1972, quan el guanyador va ser Dennis Gabor, l'inventor de l'holografia. De fet, la llista de les persones que han rebut un premi Nobel de física complet (no compartit) per un descobriment purament teòric és molt curta i molt impressionant. La llista és la següent:

J.W. Strutt (lord Rayleigh) (1904)
Max Planck (1918)
Albert Einstein (1921)
Niels Bohr (1922)
Louis-Victor de Broglie (1929)
Werner Heisenberg (1932)
Wolfgang Pauli (1945)
Hideki Yukawa (1949)
Lev Landau (1962)
Hans Bethe (1967)
Murray Gell-Mann (1969)

Tots els noms d'aquesta llista són ben coneguts de qualsevol persona amb algun coneixement de física moderna. Quasi tots els noms seran familiars a qualsevol persona culta, i molts són familiars a tothom. Els descobriments associats amb els noms de la llista es compten entre els avenços científics més importants d'aquest segle: la mecànica quàntica, l'energia nuclear,... i els "serveis a la física teòrica" (altre cop l'acadèmia sueca!) d'Einstein. Aquestes són coses clarament tan importants que molta gent pot haver pensat, llegint el diari l'octubre passat, que "les transicions de fase i el grup de renormalització" no pertanyen, potser, a la mateixa categoria. Aquesta impressió hauria estat falsa. Hauria estat com pensar, a principi de segle, que la qüestió de la radiació del cos negre o l'efecte fotoelèctric o la mesura de la velocitat de la llum per un observador en moviment eren qüestions esotèriques de poca importància. En aquest article intentaré explicar (amb grans simplificacions) en què consisteixen els descobriments de K. Wilson. La importància del problema de les transicions de fase es deriva, entre altres raons, del fet que és un exemple d'una classe de problemes la solució dels quals és matemàticament molt difícil. En relació amb aquesta classe de problemes, podem dir que les matemàtiques necessàries per resoldre'ls no existeixen i que són els físics teòrics els que les estan inventant. La situació en aquest aspecte no és pas nova en la història de la física. Els matemàtics arriben més tard. La teoria de catàstrofes, per exemple, aplicada a les transicions de fase és equivalent a una teoria introduïda pel físic holandès Van der Waals (fa més de cent anys!), que dóna resultats que només són una primera aproximació a la realitat. És interessant observar, en aquests casos, la relació entre la física teòrica i les matemàtiques.

II.–Les transicions de fase

Les transicions de fase no són pas fenòmens obscurs i complicats que s'observen només en el laboratori, sinó que són fenòmens familiars que podem veure cada dia: el vapor d'aigua es condensa i forma gotes líquides de boira o pluja. L'aigua líquida es transforma en glaçons al refrigerador o en vapor a la cuina. El magnetisme de certs metalls, com per exemple el ferro, és també un fenomen familiar. Els sòlids magnètics també presenten transicions de fase: a la temperatura ambient el ferro és magnètic, és a dir, un imant atrau el ferro. Però si escalfem un tros de ferro fins a una certa temperatura (uns 770 graus Celsius), el magnetisme desapareix. La temperatura a la qual el magnetisme desapareix és la temperatura crítica del ferro, T_c, o temperatura de Curie (en honor de Pierre Curie). En el cas dels gasos i líquids, la temperatura crítica T_c és la temperatura màxima a què el líquid pot existir: a temperatures més baixes és possible condensar el vapor simplement comprimint-lo (augmentant la pressió), mentre que començant amb el gas a temperatures més altes és impossible transformar-lo en un líquid sense refredar-lo primer.

Les propietats de qualsevol substància a una temperatura prop de T_c són extraordinàriament difícils de calcular. Considerem, per exemple, la compressibilitat d'un gas, C, o la susceptibilitat magnètica del ferro, S. És evident que, si la temperatura T és $T \approx T_c$, la compressibilitat serà infinitament gran: un canvi molt petit en la pressió produeix un canvi enorme en el volum, ja que el gas es transformarà en líquid, que té un volum molt més petit. De la mateixa manera, en el cas magnètic la susceptibilitat (que és, aproximadament, la magnetització dividida pel camp magnètic) és infinita: un camp magnètic infinitesimal produeix un canvi considerable en la magnetització. Resulta experimentalment que prop de T_c aquestes quantitats (S o C) són tals que:

$$S = A\,|T-T_c|^{-\gamma}$$

on A és una constant, i γ és un exemple d'"exponent crític": és un nombre posi-

per Oriol Valls

Oriol Valls (Barcelona, 1947) és doctor en física per la Universitat de Brown (1975) i professor de física a la Universitat de Minnesota. A les seves recerques en diferents problemes de mecànica estadística ha tingut ocasió d'utilitzar sovint els mètodes del grup de renormalització.

tiu, però no és normalment un nombre enter. Hi ha molts altres exponents crítics, que corresponen a altres quantitats que també son infinites. Equacions tals com la que hem escrit indiquen immediatament la dificultat del problema: les propietats de la matèria a prop del punt crític no poden ser descrites per mitjà de funcions analítiques, cosa que produeix grans dificultats matemàtiques.

Aquests problemes van ser estudiats, fa temps, per Van der Waals (gasos i líquids) i per P. Curie i P. Weiss (magnetisme). Aquests investigadors van fer les mateixes aproximacions, però sense adonar-se'n, ja que ningú no s'havia adonat encara de la similaritat entre els dos problemes. Van trobar, amb les aproximacions que van fer, que, per exemple, $\gamma = 1$, cosa que els experiments demostren que no és certa. Més tard, fa trenta o quaranta anys, Landau va demotrar que les teories de Curie-Weiss i de Van der Waals són equivalents, tal com hem dit, i que per aquesta raó arriben als mateixos resultats incorrectes.

Mentrestant va haver-hi progrés en una altra direcció. L'any 1932 el físic alemany Ising va proposar un model molt simplificat per al magnetisme. Aquest model, que també pot reinterpretar-se per al cas de la transició gas-líquid, no és físicament gaire realista, pero és molt simple matemàticament i es pot aplicar aproximadament a certs sòlids molt anisòtropics. La importància del model d'Ising deriva del fet que l'any 1944 Lars Onsager va trobar-ne la solució exacta (encara que en el pla, no en l'espai de tres dimensions). El mètode d'Onsager és molt complicat i dóna el resultat que, com tothom esperava, els exponents crítics del model d'Ising són diferents dels que s'obtenen utilitzant les aproximacions de Curie-Weiss i de Van der Waals (per exemple, $\gamma = 7/4$ enlloc de $\gamma = 1$). La importància de la solució d'Onsager és que és matemàticament exacta, encara que per a un model físicament molt simplificat. Qualsevol mètode aproximat general pot avaluar-se aplicant-lo primer al model d'Ising i comparant els resultats amb la solució exacta. Si el mètode passa aquesta prova satisfactòriament, llavors pot ser utilitzat per resoldre altres models més complicats i més realistes. Per aquesta raó el model d'Ising és molt útil.

Tal com hem vist fa un moment, la solució d'Onsager és vàlida només en un pla (dues dimensions). És relativament fàcil demostrar que els resultats (tals com els exponents) en tres dimensions serien diferents. Per contrast, en el mètode de Curie els exponents són completament independents de la dimensió. Sabem ara, de fet, que si el món tingués quatre dimensions (o més), en comptes de tres, el mètode de Curie seria exactament correcte! El fet que la dimensionalitat és important és bàsic en els mètodes de Wilson.

III.– Invariància d'escala i universalitat

Un dels conceptes físics més importants en l'estudi de les transicions de fase és la idea d'invariància d'escala, introduïda l'any 1965 per B. Widom. Aquesta idea es pot explicar breument així: a prop d'una transició de fase, que és naturalment un fenomen visible en una escala macroscòpica (un tros de metall, una ampolla de líquid,..), però no al nivell microscòpic (si tenim només sis àtoms, no podem dir si formen un sòlid, un líquid o un gas), els detalls de les interaccions del sistema al nivell microscòpic, és a dir, al nivell molecular, no són importants. L'única cosa que hem de saber és la diferència entre la temperatura actual del sistema i la temperatura crítica.

Aquesta idea, que pot expressar-se matemàticament com una propietat de les funcions termodinàmiques, va ser refinada més tard per Leo Kadanoff. La formulació matemàtica que Kadanoff va donar a la idea d'invariància d'escala va constituir un pas molt important cap a la solució final del problema. Kadanoff va considerar el cas magnètic. A prop de la temperatura de Curie, en lloc d'examinar les interaccions entre tots els moments magnètics de cada àtom, podem dividir el sistema en blocs d'una certa mida i considerar el sistema format pels blocs. Les propietats crítiques d'aquest sistema han de ser essencialment les mateixes que les del sistema molecular, amb la diferència només que la temperatura i el camp magnètic (si n'hi ha cap) depenen de la mida i de l'escala dels blocs. És a dir: les propietats del sistema microscòpic a una temperatura T, prop de la temperatura crítica, i camp magnètic H són equivalents a les propietats d'un sistema format per blocs de mida l, a una certa temperatura T (l) i camp H (l). Els arguments de Kadanoff van ser basats en l'estudi de la termodinàmica: examinant el que li passa a l'energia lliure d'un sistema quant l'escala canvia. (L'energia lliure és una funció que es fa servir en termodinàmica per determinar l'estat d'equilibri d'un sistema, donades certes condicions de temperatura, etc.) No és possible en un article d'aquest nivell donar més detalls. El lector ben informat deu haver notat ja fa estona que en aquest article el rigor és completament absent. En la bibliografia al final de l'article hi ha llibres que el lector interessat pot consultar.

De la idea d'invariància d'escala se'n segueix una conseqüència important: és la idea d'universalitat. Com hem vist fa un moment, les propietats d'un sistema al nivell microscòpic no són importants en relació amb les transicions de fase (hi ha una excepcio molt important, però: la

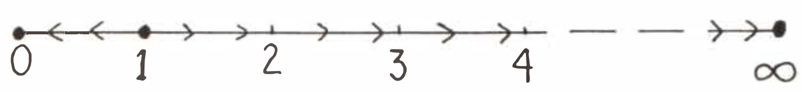

Figura 1:
Representació esquemàtica de la relació de recursió $y' = y^2$, discutida a la secció IV.

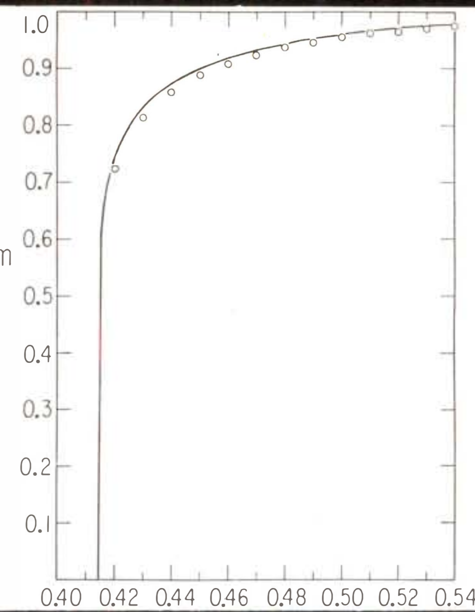

Figura 2:
Un exemple real, tret de la "Physical Review", d'una relació de recursió amb dues variables, R i a. Hi ha tres punts fixos, dos dels quals són trivials.

simetria queda determinada per les propietats al nivell molecular). En el llenguatge que utilitzen els especialistes per assegurar-se que ningú no els entén, de les variables que no compten se'n diuen "irrellevants", mentre que, per exemple, la temperatura és "rellevant". Per consegüent, poden haver-hi molts sistemes físics diferents al nivell microscòpic, que, això no obstant, tenen les mateixes propietats crítiques. I això pot passar, i passa, fins i tot quan la naturalesa mateixa de la transició de fase és diferent. Per exemple, les propietats crítiques de la transició entre líquid i vapor en l'anhídrid carbònic (el gas de les bombolles de cervesa) són precisament les mateixes que les propietats crítiques de la transició entre l'estat ferromagnètic i l'estat normal del ferro: en particular l'exponent γ de la susceptibilitat del ferro té el mateix valor que l'exponent crític de la compressibilitat del CO_2. Aquests fets remarcables estan ben comprovats experimentalment i es poden demostrar sense gaires dificultats a partir de la formulació de Kadanoff. El fet que tantes coses completament diferents tenen les mateixes propietats és al que ens referim quan parlem d'universalitat. Amb una mica de rigor, però no gaire, podem dir que el concepte d'universalitat és que les propietats crítiques depenen només de la simetria del sistema al nivell microscòpic i també de la dimensionalitat (com hem vist al final de la segona part), però no depenen de res més.

Aquestes idees, com ara veurem, van ser molt importants en el consegüent desenvolupament del grup de renormalització.

IV.– El grup de renormalització

En aquesta secció provaré d'explicar, encara que d'una manera molt aproximada i imprecisa, el que és el grup de renormalització. Per entendre com funciona, retornem al concepte d'invariància d'escala i, en particular, als "blocs" de variables de Kadanoff. En general, les propietats internes del sistema físic es poden descriure per mitjà de certes energies d'interacció, un conjunt de nombres $[J_i]$, amb unitats d'energia. És convenient dividir aquestes energies per la temperatura (recordem que la temperatura és sempre equivalent a una energia) i d'aquesta manera s'obté un nou conjunt $[K_i]$, on les quantitats K_i són nombres sense dimensions. Les quantitats K corresponents als blocs podem designar-les per $[K(l)]$. Les propietats del sistema format pels blocs de mida l poden expressar-se com a funcions de $K(l)$. L'existència de les propietats d'universalitat i invariància d'escala prop del punt crític significa que, en aquell punt, la transformació $K(l)$ deu tenir certes propietats especials, com aviat veurem. Al mateix temps, la qüestió de quines són les funcions $K(l)$, donat que aquestes funcions existeixen, s'ha de resoldre. No és el mateix demostrar que una funció existeix i saber com calcular-la.

El mètode de Wilson, és a dir, el mètode del grup de renormalització, permet escriure una relació entre les funcions $K(l)$ a l'escala l i les mateixes funcions a una altra escala més gran $l' \to 1$. Les noves funcions son $K'(1')$. Naturalment, no és possible explicar, al nivell d'aquest article, com es calcula aquesta transformació. El lector pot ben imaginar-se que aquest no és un punt fàcil i trivial. Diré només dues paraules dirigides als experts: el pas més difícil és l'eliminació de tots els modes normals amb longituds d'ona més petita que l'.

Ara bé, el lector deu haver notat que tot el que el grup de renormalització dóna és una transformació que connecta $K'(l')$ i $K(l')$, cosa que podem escriure simbòlicament:

$$K' = F(K).$$

D'aquest tipus de transformació se'n diu una relació de recursió. Començant amb un valor donat de K (per exemple, el valor microscòpic) i imaginant que doblem l'escala del sistema, la transformació ens donaria K', el valor de K per a un sistema en el qual totes les longituds estan doblades. Però, ¿què podem fer-ne d'aquesta relació entre dues quantitats possiblement desconegudes? La invariància d'escala ens dóna la resposta: al punt crític quan canviem l'escala no ha de passar res. Matemàticament això vol dir que el punt crític ha de ser un "punt fix" de la transformació.

El que és un punt fix podem veure-ho en un exemple. Considerem la transformació:

$$y' = y^2.$$

Començant amb un cert nombre y, obtenim primer el quadrat. Si després continuem aplicant la transformació, obtenim la quarta potència del nombre inicial, i després, successivament, la vuitena, etc., potències, si apliquem aquesta simple transformació cada vegada al resultat anterior. Clarament, si comencem amb un nombre més gran que 1, $y > 1$, els resultats successius seran cada vegada més grans; per exemple, si comencem amb $y = 2$, obtenim 4, 16, 256, 65.536, etc., mentre que si comencem amb un nombre positiu més petit que 1, els resultats successius es van fent més i més petits. Però, si comencem amb $y = 1$, ens quedem clarament plantats a 1, ja que 1 elevat a qualsevol potència dóna 1.

El valor $y = 1$ és un "punt fix" de la transformació. Notem que zero i infinit també són punts fixos. Però zero i infinit són diferents del cas $y = 1$. Si comencem a qualsevol valor, exceptuant només 1, acabarem a zero o infinit, mentre que l'única manera d'acabar a 1, és començant-hi. Zero i infinit són

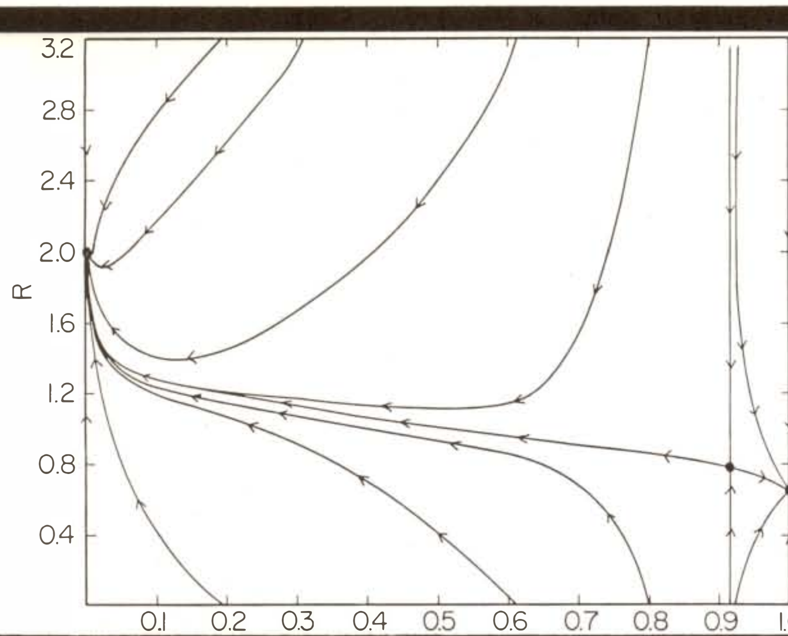

Figura 3:
La magnetització espontania del model d'Ising: la corba és el resultat exacte i els cercles son els resultats obtinguts amb el grup de renormalització. El valor critic de la variable u es $u=\sqrt{2}-1$.

exemples de "punts fixos trivials", mentre que 1 és un exemple de punt fix que no és trivial.
Resulta que les relacions de recursió que s'obtenen amb el grup de renormalització són del tipus de la que hem vist. Naturalment, hi ha més variables i complicacions. A la figura 1 podem veure la representació gràfica de l'exemple que hem discutit, amb les fletxes que marquen les direccions del canvi en el valor de y. A la figura 2 (treta de la "Physical Review", volum 25B, pàgina 7.001), veiem la representació gràfica d'un cas real amb dues variables.
En general, els punts fixos trivials corresponen a una temperatura de zero graus absoluts o a un sistema sense interaccions. Els altres punts fixos són els punts crítics. En el nostre exemple tindríem un punt crític a y = 1 i dues fases corresponents a y = zero i y = infinit.
Les propietats crítiques del sistema es calculen, com va demostrar Wilson, examinant el que passa molt a prop d'un punt fix no trivial. En el nostre exemple, si comencem amb y = 1 + 0'000001, hi haurà clarament molt poca diferència entre y' i y. Els exponents crítics, per exemple, poden calcular-se fàcilment partint de les variacions de les quantitats K' quan les quantitats K' prenen valors molt a prop dels valors corresponents al punt fix, és a dir, el punt crític.
Tot això sembla relativament simple i ho és, encara que els detalls poden ser extraordinàriament complicats. Naturalment, les demostracions matemàtiques dels resultats que s'han mencionat aquí no són senzilles.
Finalment, el lector amb algun coneixement de matemàtiques deu haver notat que el grup de renormalització no és un grup en el sentit matemàtic de la paraula: la transformació sempre va d'una escala més petita a una escala més gran i en aquest procés s'eliminen quantitats i variables (d'aquesta eliminació en resulta la universalitat). Per conseqüent, la transformació inversa no pot definir-se: no podem renormalitzar "al revés" i, per tant, el grup de renormalització no és un grup.

V.–Conseqüències i conclusions

Del que hem vist a les seccions anteriors sembla deduir-se'n que el grup de renormalització pot utilitzar-se només a prop d'un punt crític, on tenim les propietats d'universalitat i d'invariància d'escala. Posant-ho en altres paraules: en el procés d'iteració, és a dir, en el procés d'utilitzar repetidament les relacions de recursió entre l'escala l i l'escala l', es perd informació, ja que s'eliminen aquelles propietats del sistema que no són universals.
Es possible, això no obstant, recobrar aproximadament aquesta informació. La idea és essencialment que la part eliminada pel procés de renormalització correspon a una escala coneguda de distàncies i temps. Es possible calcular aproximadament aquesta contribució considerant un sistema de mida finita: un sistema amb un nombre relativament petit de constituents. Naturalment, aquesta contribució no és universal: depèn de quin sistema (quin gas, líquid o metall) estem estudiant.
De certa manera, que pot expressar-se rigorosament, el grup de renormalització es una projecció en el sentit corrent de la paraula. La part que el grup de renormalització no projecta pot calcular-se aproximadament.
Com a exemple, a la figura 3 podem veure la magnetització (imantació) m del model d'Ising. La variable u està relacionada amb la temperatura i amb les interaccions. El valor de u al punt crític és $u=\sqrt{2}-1$, i u = 1 correspon a temperatura T = 0 (absolut). La línia representa el resultat exacte, obtingut per C.N. Yang seguint el mètode d'Onsager (Onsager va escriure el resultat a la pissarra en un congrés, però, excèntric com era, no va publicar-ne mai la prova). Els cercles representen el resultat obtingut amb el grup de renormalització i el mètode de projecció, el qual, com podem veure, quasi coincideix amb el resultat exacte (la diferència és de menys del 2 per cent a qualsevol temperatura), però és molt més fàcil d'obtenir.
Amb aquestes i altres extensions, el grup de renormalització ha esdevingut ja un mètode que molts físics utilitzen i que tot físic teòric ha de saber. No és, segons el meu parer, més difícil d'aprendre que altres mètodes matemàtics que s'estudien en els cursos més avençats al nivell de llicenciatura. Encra que no es pot endevinar quines altres conseqüències i aplicacions tindrà, ja podem veure que aquest mètode quedarà permanentment instal·lat en l'arsenal dels mètodes de la física teòrica.

Oriol Valls

Material de lectura

1.–S.K. Ma: *The Modern Theory of Critical Phenomena.* Reading (Massachusetts), Benjamin, 1976.
2.–P. Pfeuty i G. Toulouse: *Introduction to the Renormalization Group and to Critical Phenomena.* Nova York, Wiley, 1977 (traduït del francès).
3.–D.J. Amit: *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena.* Londres i Nova York, McGraw-Hill, 1978.
4.–T.W. Burkhardt i J.M.J. van Leeuwen, editors: *Real Space Renormalization.* Berlín i Nova York, Springer Verlag, 1982.

A més, revistes tals com "Nature", "Scientific American"., "Physics Today", "The New Scientist", etc., van publicar breus descripcions del grup de renormalització durant la tardor del 1982, en ocasió de la concessió del premi Nobel.