Els conjunts difusos

Entre els temes en què se centra la recerca matemàtica d'avui hi ha els conjunts difusos. Foren introduïts pel matemàtic Lofti Zadeh el 1965 i a poc a poc han anat estimulant grups de recerca a tot arreu del món. Els conjunts difusos són un marc teòric que permet de treballar amb conjunts definits per propietats poc definides. Això té unes implicacions lògiques i metodològiques fonamentals per a les ciències i branques de la ciència que es veuen obligades a tenir objectes de recerca poc precisos, tant per les seves mateixes característiques com pel nivell de recerca en què es troben. D'aquesta manera els conjunts difusos troben aplicacions molt útils en les ciències "toves" (sociologia, lingüística, etc.), en el reconeixement de formes, en la teoria de la classificació, en l'aprenentatge amb ordinador o en la robòtica, etc.

24 (352/Volum 3/juny 1983 ciència 28)

1. Un repàs senzill a alguns aspectes de la teoria clàssica

És clar que per definir un conjunt s'han de considerar dues coses que han de ser ben clares i explícites: l'una és un univers de discurs, compost d'objectes (persones, coses, atributs, etc.), que cal que estigui prèviament definit sense ambigüitat; l'altra és una propietat clarament definida que sigui potencialment aplicable als objectes de l'univers. Que una propietat sigui "clarament definida" vol dir, per nosaltres, que sempre sigui possible, a la vista d'un objecte concret de l'univers, dir si aquest presenta o no presenta la propietat. Per entendre'ns, anomenem X l'univers (o "referencial"), x els objectes de X, i $p(x)$ la propietat. Direm que x pertany (respectivament no pertany) al conjunt A i escriurem $x \in A$ (resp. $x \notin A$). Per exemple, si tenim en compte la població de Catalunya i considerem que la propietat $p(x)$ = "ser lector de (ciència)" és clarament definida (per exemple considerant "lector" tot aquell que llegeix més de mig exemplar més del 50 per cent dels números), aleshores, segons això, podem definir el conjunt A dels lectors de (ciència). En funció d'aquest conjunt direm que un cert individu x pertany a A si és lector de (ciència), i recíprocament; en símbols:

$x \in A$ ssi $p(x)$ és veritat (és a dir ssi* és lector de (ciència).

Tot conjunt A en un referencial X defineix automàticament un *complementari*, escrit $\bar{A}$, compost per definició de tots aquells objectes que no pertanyen a A; en símbols:

$$x \in \bar{A} \quad \text{ssi} \quad x \notin A.$$

A partir de dos conjunts A i B ja definits podem definir-ne fàcilment dos de nous:

–el conjunt *intersecció* (escrit $A \cap B$) és el format per tots els objectes de l'univers que pertanyen a l'un i a l'altre simultàniament; en símbols:

$x \in A \cap B$ ssi $x \in A \wedge x \in B$ ($\wedge$ es llegeix "i")

–el conjunt *unió* (escrit $A \cup B$) és es format per tots els objectes de l'univers que pertanyen a l'un o a l'altre; en símbols:

$x \in A \cup B$ ssi $x \in A \vee x \in B$ ($\vee$ es llegeix "i/o")

* *ssi* vol dir *si i només si* (equival al *iff* anglès, al *ssi* francès i al *sii* castellà)

Igualment, la relació entre les connectives lògiques *i* ($\wedge$), *i/o* ($\vee$) *si... aleshores* ($\rightarrow$) i *ssi* ($\leftrightarrow$), d'una banda, i les operacions i relacions conjuntístiques $\cap, \cup, \subset$ i $=$, de l'altra és senzilla. Així, per exemple:

1) $A = X$ ssi (per a tot $x \in X$) $x \in A$
2) $A = \emptyset$ ssi (per a tot $x \in X$) $x \in A$
3) $A \cap B = \emptyset$ ssi (per a tot $x \in X$) $x \notin A \wedge x \in B$ és fals
4) $A \cup B = X$ ssi (per a tot $x \in X$) $x \in A \vee x \in B$ és veritat
5) $A \subset B$ ssi (per a tot $x \in X$) si $x \in A$ aleshores $x \in B$
6) $A = B$ ssi (per a tot $x \in X$) $x \in A$ ssi $x \in B$

La regla 6 és l'anomenat **Principi d'extensió**. De l'aplicació de les regles 5, 3 i 4, respectivament, tenim:

I) Com que $A \subset A$, tenim que (per a tot $x \in X$) $x \in A \rightarrow x \in A$ (**Principi d'identitat**).

II) Com que $A \cap \bar{A} = \emptyset$, tenim que (per a tot $x \in X$) $x \in A \wedge x \in \bar{A}$ (**Principi de no-contradicció**: un mateix objecte no pot estar alhora en un conjunt i en el seu complementari).

III) Com que $A \cup \bar{A} = X$, tenim que (per a tot $x \in X$) $x \in A \vee x \in \bar{A}$ és veritat (**Principi del tercer exclòs**: un objecte només pot estar en un conjunt o en el seu complementari, i no existeix una tercera possibilitat).

Ara introduïm la *funció característica* o de *pertinença* φ_A associada al conjunt A, de la manera següent: $\varphi_A: X \rightarrow [0,1]$ tal que

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ ssi } x \notin A \\ 1 \text{ ssi } x \in A \end{cases}$$

És clar que aquesta funció ens dóna la mateixa informació sobre la pertinença de cada objecte x (de X) al conjunt A que el conjunt A mateix. En lloc d'una llista (si és possible fer-la) dels objectes $x_i \in A$ de la forma $[..., x_i, ...]$ (en què només figuren els x de A) tindrem simplement una llista de parells $[..., (x_i, A(x_i)), ...]$ (en què figuren tots els x_i de X i on $\varphi_A(x)$ és 0 o 1 segons que s'escaigui). A cada conjunt A correspon així una única funció característica que el descriu. En termes més precisos, això vol dir que hi ha una correspondència biunívoca $\varphi_A \leftrightarrow A$ entre cada conjunt i la seva funció característica (sempre, però, referit tot a un univers X donat i explícit). Aprofitant aquest fet alleugerirem a partir d'aquí la notació escrivint A en lloc de φ_A i així tindrem la funció característica $A: X \rightarrow [0,1]$ i els seus valors

$$A(x) = \begin{cases} 0 \text{ ssi } x \notin A \\ 1 \text{ ssi } x \in A \end{cases}$$

Observem de passada que si fem la convenció de dir que la proposició "$x \in A$" presenta un "valor de veritat" igual a 1 (resp. 0) quan, i només quan, $x \in A$ (resp. $x \notin A$) és veritat, llavors el valor de la funció característica A (x) per a un x donat coincideix amb el "valor de veritat" de la proposició "$x \in A$"; aquesta assimilació intuïtiva de dues idees aparentment disconnexes (la veritat d'una proposició i el valor d'una funció) ens serà força útil més endavant.

Les operacions conjuntístiques que hem definit abans resulten reformulables, en termes de funcions característiques, de la següent manera:

per Teresa Riera i Ton Sales

Teresa Riera Madurell (Barcelona, 1950) és llicenciada en ciències per la Universitat de Barcelona. Va ser Research Associate al departament de Computer Science a la Universitat de Califòrnia i el 1981 es doctorà en informàtica per la Universitat del País Basc. Actualment és professora adjunta de matemàtiques a la Facultat d'Informàtica de Barcelona.

Ton Sales (Lleida, 1945) és enginyer industrial i doctor en informàtica. Després de treballar en control de processos i informàtica general, primer com a professional a IBM i després com a usuari, va tornar a la Universitat, on ha ensenyat informàtica teòrica, lògica i matemàtiques. Actualment és professor ajunt de matemàtiques de la Facultat d'Informàtica de Barcelona.

$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$, funció característica del complementari,
$(A \cap B)(x) = \text{mín}\,(A(x), B(x))$ funció característica de la intersecció,
i $(A \cup B)(x) = \text{màx}\,(A(x), B(x))$ funció característica de la unió,
encara que d'altres fórmules haurien donat els mateixos valors; per exemple, en lloc de la segona, podem posar:
$(A \cap B)(x) = A(x).B(x)$
i encara
$(A \cap B)(x) = \text{màx}\,(0, A(x) + B(x) - 1)$
Sigui la que sigui la fórmula utilitzada, el conjunt P(X) de tots els diferents conjunts A definibles en X presenten, respecte a les operacions $\cap$, U i $-$, la coneguda estructura d'una àlgebra de Boole.

2. El pas a la trivalència

La situació explicada als paràgrafs anteriors correspon a allò que explica la teoria de conjunts, que a partir d'ara anomenarem *teoria clàssica* de conjunts. La lògica que hi ha al darrera és la *lògica clàssica* o *binària,* caracteritzada, entre altres coses, pel *principi de bivalència,* segons el qual tota proposició digna de consideració només pot ser vertadera o falsa. Clàssicament, les proposicions que no compleixen aquesta condició són, simplement, no tingudes en compte; naturalment, tampoc no poden originar conjunts en un referencial. En la lògica clàssica, els tres principis aristotèlics citats d'identitat, no-contradicció i tercer exclòs són teoremes immediatament deduïbles dels axiomes.
La lògica clàssica de què parlem és la configurada als *Principia mathematica,* de Russell i Whitehead, el 1910-13 i és la vigent actualment en gairebé tots els camps de la ciència. Ara bé, Russell mateix no es va estar de dir que el supòsit d'estar usant símbols precisos i proposicions binàries és una idealització de la realitat. Això fa que la lògica tradicional, segons ell, parli "no d'aquesta vida terrestre sinó d'una imaginada existència celestial".
Si bé això no invalida necessàriament la lògica binària (merament diu que hi pot haver proposicions no binàries —i per tant no analitzables dins la teoria— que són interessants o realistes), sí que reflecteix en canvi un cert estat d'insatisfacció dels lògics davant de la posició d'excloure aquelles proposicions que no compleixin estrictament el principi de bivalència. L'anàlisi de proposicions no bivalents, i tanmateix interessants, i de les conseqüències que llur admissió en la lògica comportaria va ser fet tot seguit ni més ni menys que des de quatre terrenys diferents: el filosòfic, el físic, el dels matemàtics intuïcionistes i el dels formalistes, que passem a veure breument.

a) La crítica de Łukasiewicz

El 1920 el lògic polonès Jan Lukasiewicz, comentant les proposicions contingents de futur que Aristòtil tracta a *De interpretatione,* deia que aquest tipus de proposicions no podia tenir només dos valors de veritat. Així la proposició "demà hi haurà una batalla naval" no pot ser certa ni falsa (perquè implicaria una predeterminació) sinó que cal admetre-hi un tercer cas. Fent-ho així, i tractant aquesta nova situació com si hi hagués un valor nou, intermedi entre la veritat i la falsedat, Łukasiewicz obria el camí a la lògica ternària o trivalent.
Per Łukasiewicz, el tercer valor era l'*indeterminat,* que l'autor interpretava ònticament ("no *és* cert ni fals") i que certes interpretacions posteriors han tractat epistèmicament ("no *sabem* si és cert o fals"). A partir d'aquestes premisses, Łukasiewicz va elaborar tota una lògica (o potser fóra més apropiat de dir una semàntica) que, si bé incloïa la lògica clàssica (binària) com a cas particular, tenia noves regles per combinar valors de veritat a través de les connectives habituals.

b) La crítica dels físics

El principi d'indeterminació de Werner Heisenberg, del 1927, afirmant que mai no podem saber simultàniament la posició i l'impuls d'una partícula, introduïa un exemple real d'allò que en Łukasiewicz era una simple possibilitat: que una proposició fos inherentment indeterminada en el seu valor de veritat.

c) La crítica dels matemàtics intuïcionistes

Els intuïcionistes, especialment en el treball de l'holandès Arend Heyting sobre "lògica intuïcionista" del 1930, afirmaven que per tractar entitats infinites les regles del raonament actual deixaven de ser aplicables. En particular: 1) la negació d'una negació no equivalia a la simple afirmació (sinó que tenia un valor més feble) i 2) el tercer exclòs no valia en casos infinits (i per tant tots els raonaments fets per reducció a l'absurd eren invàlids en aquests casos). La crítica intuïcionista, si bé no anava adreçada directament contra la lògica clàssica sinó contra l'ús que en feien els matemàtics formalistes (que la consideraven aplicable sense dificultat als casos en què intervenia l'infinit), va contribuir a posar en dubte la suposada o pretesa validesa universal dels mètodes clàssics.

d) La crítica dels matemàtics formalistes

La descoberta per Gödel el 1931 i per Turing i Church el 1936 de l'existència de proposicions matemàtiques indecidibles va donar força a la consideració de Łukasiewicz d'un tercer valor. Així Kleene, un lògic americà de l'escola formalista, va proposar el 1938 una lògica

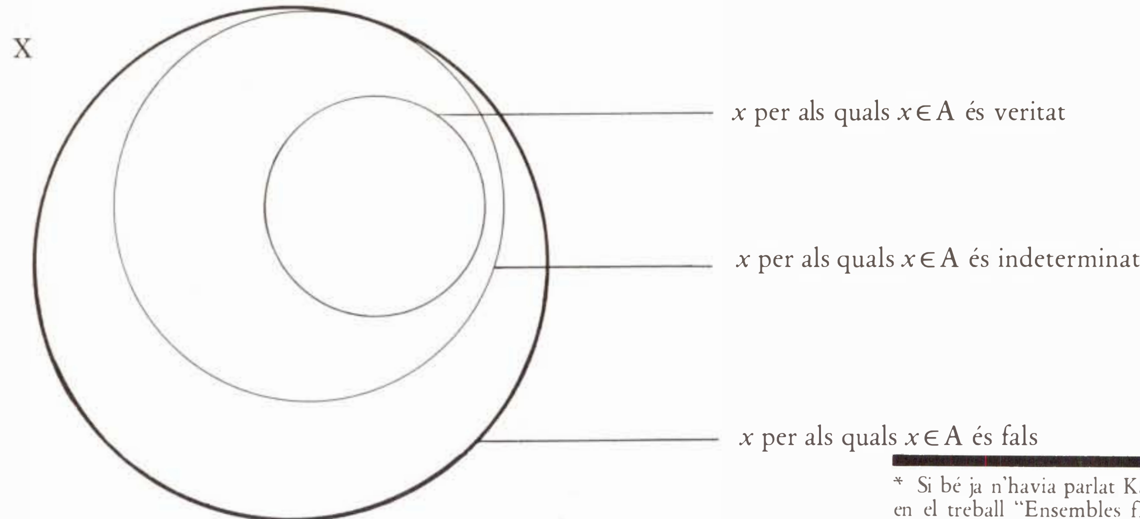

Figura 1

* Si bé ja n'havia parlat Karl Menger l'any 1951 en el treball "Ensembles flous et fonctions aléatoires" (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences), 232-22, París.

trivalent en què el tercer valor ("*indecidible*") tenia, com en Lukasiewicz, un caràcter intermedi entre "cert" i "fals" i un tractament ambigu, alhora òntic i epistèmic. Com ell, Kleene va construir una lògica ternària amb taules de valors segons les connectives habituals que, en la versió que ell anomenava "forta", coincidien amb les de Łukasiewicz pel que fa a $\wedge$ i v, però en discrepaven pel que fa a la implicació.

Posem-nos ara en la situació d'una lògica trivalent, ja sigui de Łukasiewicz o de Kleene o qualsevol de les variants que n'han sorgit des d'aleshores. Si hi apliquéssim l'analogia que hem vist al començament entre propietats i conjunts, en aquesta nova situació tindríem una cosa semblant a la següent: donat un referencial X, com que una propietat pot ser, en aquesta perspectiva, *certa, falsa* o *indeterminada* (o "indecidible", "intermèdia", etc.), tenim, seguint l'analogia, objectes que pertanyen a un conjunt, d'altres que no i uns tercers la pertinença dels quals és indeterminada. Dibuixant-ho en forma de diagrama de Venn, els objectes del referencial X ens resulten classificats en tres zones:

Figura 1

A partir d'aquestes consideracions elementals ja es pot intuir allò que més endavant definiríem com a conjunt difús.

3. El pas a la multivalència

Va ser el mateix Łukasiewicz qui el 1930, amb Tarski, va generalitzar la seva lògica trivalent al cas de tota una gamma ordenada de valors indeterminats entre el vertader i el fals. Łukasiewicz proposava una valoració de la veritat proposicional en l'interval [0,1] dels nombres reals. Obtenia així una lògica d'infinits valors que incloïa la lògica bivalent clàssica i la seva pròpia lògica trivalent i on es definien les regles semàntiques associades a cada connectiva lògica de la manera següent:

$p \wedge q \;=\; \text{mín}\ (p,q)$

$p \vee q \;=\; \text{màx}\ (p,q)$

$p \rightarrow q \;=\; \text{mín}\ (1, 1-p+q)$

en què cal entendre que el primer membre, en totes tres expressions, és el valor de veritat de la proposició composta ("$p \wedge q$", etc.) que hi figura i no pas aquesta última, i també que els operands p i q de la dreta són els valors de p i de q i no les proposicions mateixes.

La posició de Łukasiewicz i Tarski és de considerar admissibles proposicions amb un o més graus de veritat indeterminats, que la lògica clàssica considera inadmissibles o intractables, i tractar-les formalment amb independència de l'origen de la indeterminació, que pot ser inherent a l'objecte (com en el cas de la indeterminació de Heisenberg o de la indecidibilitat de Gödel) o lligada al nostre coneixement de l'objecte (que és el cas de la incertesa en l'observació d'objectes o fenòmens potencialment decidibles) o bé lligada a la formulació lingüística de les proposicions (que és el cas de la *vaguetat* lingüística).

Aquest últim cas, el de la formulació *vaga* dels objectes i de les proposicions, ha estat estudiat separadament dels altres, sobretot d'ençà del 1923, en què Russell presentava el problema com a rellevant per als lògics, i del 1937, en què Max Black proposava, indirectament, una lògica multivalent d'infinits valors per resoldre proposicions com ara "això és vermell": la proposició seria veritat en certs casos, indeterminada (amb nombrosos graus) en d'altres i falsa en uns tercers. La vaguetat en la formulació lingüística és també interessant per nosaltres perquè és en aquest context que s'ha desenvolupat la teoria dels conjunts difusos.

4. Els conjunts difusos

Partim ara d'una lògica multivalent com la de Łukasiewicz i, donat un univers X i una certa propietat $p(x)$, intentem definir-hi conjunts. Com en la teoria clàssica, diguem que $x \in A$ ssi $p(x)$ és veritat, i que $x \notin A$ si la propietat $(p(x)$ és falsa. Hi haurà casos admesos ara en la teoria en què la veritat de $p(x)$ per a certs objectes $x \in X$ és indeterminada; en aquests casos convenim que els objectes x afectats pertanyen a A en una certa mesura α, que anomenarem "grau de pertinença", que valorarem amb un nombre de l'interval real [0,1] i que farem igual al valor de veritat de $p(x)$ per a aquest objecte. El resultat és un "conjunt" d'objectes x (de X), que escrivim $\underset{\sim}{A}$, en què cada objecte té associat un nombre α que descriu la pertinença $x \underset{\alpha}{\in} \underset{\sim}{A}$ de l'objecte al "conjunt". Anomenem tal "conjunt" *conjunt difús*. En símbols:

$x \underset{\alpha}{\in} \underset{\sim}{A}$ si $p(x)$ és veritat en grau α.

Naturalment, en el cas particular en què A és un conjunt clàssic els únics valors de α són 0 i 1, i llavors $x \underset{1}{\in} \underset{\sim}{A}$ i $x \underset{0}{\in} \underset{\sim}{A}$ són allò que en la notació clàssica és expressat per $x \in A$ i $x \notin A$, respectivament. Gràficament, i prenent com a referència el diagrama de Venn que hem usat anteriorment per al cas trivalent (fig. 1), el conjunt difús és aquella zona del referencial en què els objectes pertanyen plenament a A i també aquella altra en què els objectes hi pertanyen de manera indeterminada; només que aquí no hi ha una única indeterminació sinó tota una gamma, cosa que vol dir que la zona intermèdia s'ha difuminat en una gradació de pertinences.

El concepte de conjunt difús (en anglès *fuzzy set*) va néixer històricament els anys 1960 (la primera formulació apareix a Zadeh 1965*) per consideracions d'ordre divers i com a representació intuïtiva, "conjuntística", de diverses rea-

Revistes

Actualment hi ha tres revistes internacionals especialitzades en el tema dels conjunts difusos: "Fuzzy Sets and Systems", publicada per North Holland; "Busefal", publicada a Tolosa; i una de xinesa titulada, segons sembla, "Conjunts difusos" (si no ens han entabanat!!).

Activitats

Són molts els congressos internacionals que inclouen una part de lògica multivalent i conjunts difusos; concretament, en les actes dels International Symposiums on Multiple-Valued Logic (ISMVL) que se celebren anualment hi ha una bona part de treballs sobre aquests temes. Aquests congressos es van celebrar als Estats Units fins al 1979, en què es va fer a Europa (a Bath, Anglaterra), i des d'aleshores s'han anat celebrant alternativament als dos llocs; l'any que ve se celebrarà, però, al Japó (per primer cop).
També el Segon Congrés Internacional de Matemàtiques al Servei de l'Home, que ha tingut lloc a la Universitat Politècnica de Las Palmas (Canàries), va tenir una bona colla de sessions sobre conjunts difusos, en les quals va intervenir L.A. Zadeh, actualment professor de la Universitat de Califòrnia (Berkeley), introductor de la teoria.
Cal destacar que dins la Universitat Politècnica de Barcelona hi ha un grup de recerca (repartit entre els departaments de matemàtiques de l'ETS d'Arquitectura i la Facultat d'Informàtica) que, dirigit per Enric Trillas, treballa molt activament en aspectes teòrics de les ciències cognitives, emprant una metodologia basada essencialment en les tècniques difuses. Aquest grup, esmentat per alguns autors de diversos països com a Escola catalana, es reuneix un cop a la setmana en un seminari on, ultra exposar-hi i discutir-hi els seus treballs, s'han hostatjat destacades figures internacionals d'aquest camp que han passat per Barcelona.
També des de l'any 1974 es fan cursos de doctorat sobre temes avançats de la teoria, de la qual ja s'han elaborat a Barcelona tesis de llicenciatura i doctorals.
A l'àmbit espanyol cal també anomenar el Prof. Azorín Poch de la Universitat Autònoma de Madrid, president de l'Instituto de Estadística, que treballa sobre el tema molt preocupat per les aplicacions a l'estadística. També a Madrid, en el grup del Prof. Ríos, s'han fet tesis doctorals aplicant tècniques d'aquesta teoria a la teoria de la decisió. Internacionalment funcionen, a Europa i Amèrica respectivament, el European Working Group on Fuzzy Sets i el North American Fuzzy Information Processing Group amb reunions periòdiques. Actualment la Xina resulta un dels països més actius en el tema.

litats analitzables per la lògica multivalent. En particular: *a*) en la teoria de qüestionaris (on les respostes no són mai taxatives, i si ho són representen una decisió forçada, prematura i no-significativa); *b*) en la teoria del control (en què, com en els qüestionaris, sovint cal matisar les entrades i les sortides); *c*) en el reconeixement de formes (en què les classes no tenen límits precisos o els objectes no presenten plenament cap característica adequada per classificar-les); o *d*) en l'estudi del llenguatge natural (on són habituals les frases vagues, com ara "en Joan és alt" i moltes altres).
Així, a l'exemple enunciat al començament, la propietat $p(x) \equiv$ "ser lector de (ciència)" pot analitzar-se en un context més realista com una propietat imprecisa (= no clarament definida). En efecte, tot i que la propietat esmentada pot ser comprovada de lector en lector, aplicant-hi la definició que hem donat ("lector de més de mig exemplar més del 50 per cent dels números") o qualsevol altra, normalment el criteri que s'aplica no està mai tan ben definit. D'aquesta manera, el conjunt originat per aquesta $p(x)$ és automàticament un conjunt difús, en què els que són clarament percebuts com a lectors de (ciència) pertanyen plenament al conjunt, i els casos intermedis esmentats en són objectes fronterers, amb graus de pertinença diversos (i en general diferents de 0 i 1).
Una altra il·lustració adequada podria ser aquesta: el conjunt de peixos és, des del punt de vista de la taxonomia científica, un conjunt dels que hem dit "clàssics". Ara bé, en la taxonomia popular la paraula *peix* es refereix a una propietat que, aplicada a l'univers d'animals, dóna individus que són "peixos" en grau variable; així el conjunt difús dels peixos de la cultura popular inclou "peixos" com ara el dofí, la foca o la balena i potser també certs rèptils, amfibis i crustacis més o menys pisciformes; en canvi és possible que una assignació espontània doni un valor de pertinença relativament baix a peixos poc característics, com ara les anguiles i els cavalls marins.
Es pot apreciar, en els dos exemples citats, com l'aplicació d'un criteri $p(x)$ als objectes d'un univers X (un país o el regne animal) defineix classes. Aquestes classes poden ser precises o no. Si ho són, tenim el cas clàssic (que és un cas particular del difús, més general). Si no, la classificació perd en precisió allò que guanya en realisme (i acostament als usos quotidians dels conceptes). En tot cas, però, amb l'ajuda de la noció de conjunt difús la matemàtica pot continuar analitzant les classes sorgides i tractar-les amb el rigor que li és propi. Es comprèn l'interès que una ampliació d'horitzons com aquesta pot tenir per a la matemàtica, pel poder descriptiu i modelitzador de la realitat que s'exigeix d'ella, i per a la ciència en general. No cal dir que en casos més senzills la utilitat d'aquesta noció es evident i immediata; així, en el tractament de qüestionaris, en la teoria de control, en el reconeixement de formes i, per dir-ne un altre cas, en el diagnòstic mèdic.
Anàlogament al cas clàssic, tot conjunt difús $\underset{\sim}{A}$ en un referencial X defineix automàticament un complementari, escrit $\overline{\underset{\sim}{A}}$, compost per definició de tots els objectes de *X*, però cada un amb un grau de pertinença que és el complementari a 1 del grau de pertinença a $\underset{\sim}{A}$; en símbols:

$$x \in_{1-\alpha} \overline{\underset{\sim}{A}} \quad \text{ssi} \quad x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A}$$

Igualment a partir dels conjunts difusos A i B ja definits podem definir-ne dos de nous:
– el conjunt (difús) *intersecció* (escrit $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$) és el format per tots els objectes de l'univers però cada un amb el mínim grau de pertinença comuna; en símbols:
$x \in_{\gamma} \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ ssi $x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A} \wedge x \in_{\beta} \underset{\sim}{B}$, on $\gamma = \min(\alpha,\beta)$
– el conjunt (difús) *unió* (escrit $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$) és el format per tots els objectes de l'univers però cada un amb el màxim grau de pertinença de l'objecte a tots dos conjunts; en símbols:
$x \in_{\gamma} \underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$ ssi $x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A} \vee x \in_{\beta} \underset{\sim}{B}$, on $\gamma = \max(\alpha,\beta)$.
Igualment com fèiem amb els conjunts clàssics, definim aquí una "funció característica" (o "de pertinença") generalitzada $A: X \rightarrow [0,1]$, associada al conjunt difús A de la manera següent:
$A: X \rightarrow [0,1]$ tal que $A(x) = \alpha$ ssi $x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A}$
Això és, evidentment, una generalització del que hem dit abans, parlant dels conjunts "clàssics". Ara bé, aquí apareixen dues petites diferències:
1) Entre la representació d'un conjunt per enumeració (si és possible) dels seus elements i la seva representació per mitjà de la funció característica, que són, totes dues, representacions habituals dels conjunts clàssics, aquí per contra usem gairebé sempre la representació del conjunt difús per la seva funció característica, ja que una llista dels seus elements sense especificar-ne el grau de pertinença no tindria sentit (i sí, en canvi, la funció característica, que dóna automàticament aquesta informació).
2) La correspondència biunívoca entre funció característica i conjunt aquí no existeix o, si més no, no és tan clara com abans. En efecte, molts consideren que, atesa l'arbitrarietat d'assignació de graus de pertinença a un conjunt difús (qui és que gosa discutir que un element hi pertany 0,71 i no 0,72, per exemple?), un conjunt difús correspon, més que a una sola funció característica, a tota una família de funcions característiques que discrepin poc entre elles i puguin representar doncs una mateixa situació amb el grau de precisió suficient.
Analitzats el complementari, la intersecció i la unió en termes de la funció característica, resulten reformulables de la següent manera:

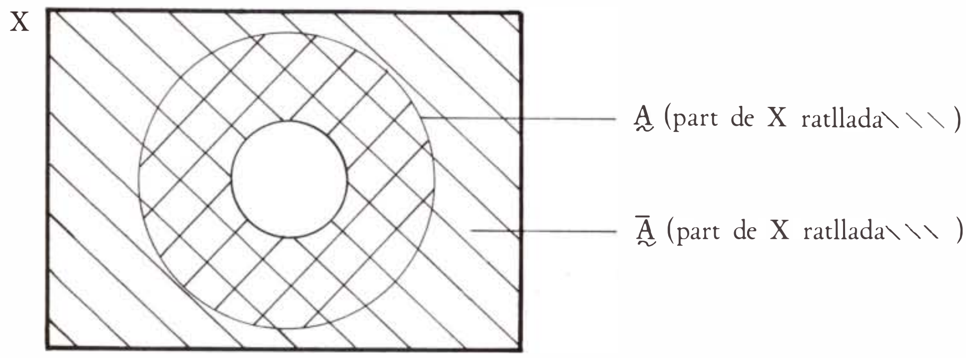

Figura 2

$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$

$(A \cap B)(x) = \text{mín}\,(A(x),\ B(x))$

$(A \cup B)\,(x) = \text{màx}\,(A(x), B(x))$

que són les expressions que havíem posat al començament per al cas clàssic, només que ara els valors de totes les funcions de pertinença pertanyen a l'interval $[0, 1]$ i no solament al conjunt $\{0, 1\}$.

Cal dir que en determinades versions o usos de la teoria es fan servir connectius com

$(A \cap B)\,(x) = A\,(x) \cdot B\,(x)$

i encara

$(A \cap B)\,(x) = \text{màx}\,(0, A\,(x) + B\,(x) - 1)$

que també són generalitzacions de les fórmules binàries ja citades, però que aquí no coincideixen en valor numèric ni entre elles ni amb el mínim.

Igualment podem formar el conjunt de tots els diferents conjunts difusos $\underset{\sim}{A}$ definibles en un mateix referencial X, que escrivim $\underset{\sim}{P}(X)$. Si les operacions $\cap, \cup$ i $-$ es defineixen per mitjà de la funció característica i el primer joc de fórmules (del màxim, mínim i complement a 1, respectivament), aleshores $\underset{\sim}{P}(X)$ presenta, respecte a aquestes operacions, l'estructura d'una àlgebra distributiva però no complementada (i per tant més feble que la de Boole), anomenada àlgebra de De Morgan.

En el cas difús, la inclusió és definida per:

$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$ i només si (per a tot $x \in X$) $x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A}$, $x \in_{\beta} \underset{\sim}{B}$, i $\alpha \leqslant \beta$, o bé, en termes de la funció de pertinença:

$\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{B}$ si i només si (per a tot $x \in X$) $\underset{\sim}{A}(x) \leqslant \underset{\sim}{B}(x)$

També tenim les següents propietats:

I) Com que $\underset{\sim}{A} \subset \underset{\sim}{A}$, tenim que (per a tot $x \in X$) $x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A} \rightarrow x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A}$.
(principi d'identitat)

II) Com que $x \in_{\gamma} A \cap \bar{A}$ vol dir que $x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A}$, $x \in_{1-\alpha} \bar{\underset{\sim}{A}}$ i $\gamma = \text{mín}\,(\alpha, 1-\alpha)$, resulta que en general $\gamma \neq 0$ (tret del cas particular en què $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$, que és el clàssic). Dit d'una altra manera: en general $A \cap \bar{A} \neq \emptyset$ (excepte en el cas clàssic).

III) Com que $x \in_{\gamma} A \cup \bar{A}$ vol dir que $x \in_{\alpha} \underset{\sim}{A}$, $x \in_{\beta} \underset{\sim}{B}$ i $\gamma = \text{màx}\,(\alpha, 1-\alpha)$, resulta que en general $\gamma \neq 1$ (tret del cas particular en què $\gamma = 0$ ó $\gamma = 1$, que és el clàssic). Altrament: en general $A \cup \bar{\underset{\sim}{A}} \neq X$ (excepte en el cas clàssic).

Els paràgrafs II i III ens diuen que els principis aristotèlics de no-contradicció i tercer exclòs només es compleixen en el clàssic, però no en general. Per il·lustrar-ho tornem als nostres dos exemples: suposem que $\underset{\sim}{A}$ és la classe dels lectors de (ciència) en el sentit difús que hem explicat (o el conjunt dels peixos de la classificació popular); a la frontera difusa de $\underset{\sim}{A}$ hi haurà evidentment els lectors habituals d'un sol article per número, d'una banda, i els que llegeixen (ciència) perquè la troben a la sala d'espera del dentista (per exemple) de l'altra (o anguiles i cavalls marins, i dofins i balenes, respectivament). Al complement $\bar{A}$ hi haurà tots aquells que no són lectors de (ciència) (o que no són peixos) —és a dir, els que no ho són gens!— i els que hem dit, amb grau de pertinença igual a 1 per als primers, i igual a 1 menys el que tenien $\underset{\sim}{A}$, per als segons.

Gràficament: fig. 2

A la figura, el cercle central correspon als elements de A que tenen grau de pertinença 1, i la corona que l'envolta és la frontera difusa (els elements amb grau de pertinença entre 0 i 1); els exteriors pertanyen evidentment al complementari $\bar{A}$ (i amb grau 1). Fàcilment es veu que la frontera difusa de A coincideix amb la de $\bar{A}$ i és igual a la intersecció $A \cap \bar{A}$. Aquesta només és buida quan A i $\bar{A}$ són conjunts clàssics. fig. 3

Es pot concebre fàcilment un trànsit de la primera situació (la de la figura 2) a la segona (la de la figura 3) que consisteix en un procés de *precisió* (o *revisió* o *refinament*) del concepte popular de lector de (ciència) o de peix que decanti cada objecte en un sentit o en l'altre: així els lectors casuals i les anguiles passen definitivament a A, mentre que els lectors assidus d'un sol article i les foques perden totalment la seva pertinença a A i es queden, doncs, en el complementari $\bar{A}$. Un cop acabat aquest procés, el raonament que tracti els objectes de X i la propietat associada a A pot ser ja perfectament bivalent.

La ciència ha motivat sovint aquest trànsit o refinament de conceptes. El cas dels peixos n'és un exemple. Refinant la propietat *p(x)* definidora del conjunt A fins que aquesta propietat només pugui ser —quan s'aplica als objectes considerats— veritat o no (i res més), la nova classificació de X en A i $\bar{A}$ permet aplicar-hi raonaments binaris i deduir-ne conclusions pel principi de no-contradicció i del tercer exclòs. Una altra cosa completament diferent és que la classificació final sigui útil o pertinent o respongui a cap idea intuïtiva o a cap realitat pràctica.

5. Les conseqüències del paradigma conjuntístic difús.

És notori que la ciència pretén explicar les coses amb *rigor* i amb *realisme,* i també que, fins fa poc, ho feia per mitjà de dos recursos complementaris:

a) restricció dels objectes o de les propietats a considerar, de manera que els conjunts que en resultin siguin allò que aquí hem anomenat "clàssics", i

b) ús d'un raonament rigorós, basat en l'aplicació del principi de bivalència (que implica el de no-contradicció).

Tos dos aspectes van junts ja que, com s'ha dit al començament d'aquest article, si s'admeten més de dos valors possibles de veritat (contra el principi de bivalència) i se suposa vàlida aquesta situació al moment de definir "conjunts" a partir

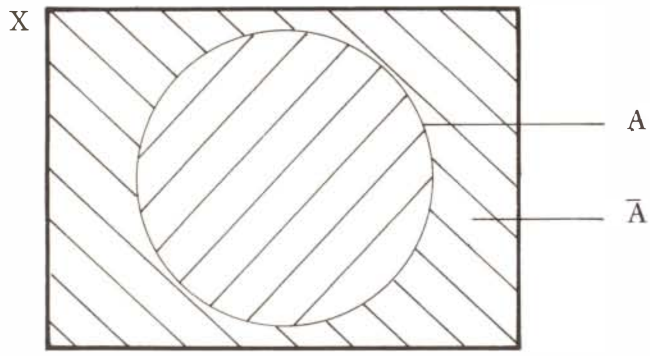

Figura 3

d'un univers X i una propietat *p(x)* donats, el "conjunt" definit no és clàssic sinó difús. I a l'inrevés: si admetem conjunts difusos és que admetem implícitament que certes propietats *p(x)* aplicades a certs universos X poden donar valors de veritat altres que 0 i 1.

Històricament, però, allò que ha passat és que la ciència ha hagut de renunciar a fer certes classificacions, i ha hagut doncs de restringir certs conceptes, perquè si no ho feia així no podia aplicar-hi raonaments bivalents. Això ha estat bo perquè ha obligat a precisar molts conceptes, però també, en la mesura en què certs conceptes han estat restringits més enllà d'un límit raonable, en força casos s'ha arribat a un empobriment, ja que la classe resultant –feta precisa– resultava poc realista o massa allunyada de l'ús habitual del concepte corresponent. I així, la ciència s'ha mostrat tradicionalment bastant incapaç de tractar amb desimboltura casos com els esmentats i altres en què intervenen mesures imprecises, valoracions consensuals o discrepants de resultats d'experiments, descripcions lingüístiques (sempre vagues en menor o major mesura), qüestionaris on resulta irreal fer definir-se l'enquestat, situacions en què cal prendre decisions amb informació escassa, etc. De vegades la matemàtica ha tractat aquests casos amb l'instrumental de la teoria de la probabilitat, l'aplicació de la qual és adequada, i fèrtil i tot, en aquests casos, però hi presenta problemes d'interpretació.

El formalisme dels conjunts difusos, en canvi, permet atacar tota classe de problemes sense esperar que les classes utilitzades siguin prou precises; en alguns casos perquè no ho seran mai (per la mateixa indefinició lingüística o perquè, com als qüestionaris, tota definició és una situació forçada que s'invalida ella mateixa), o bé perquè cal actuar immediatament sense esperar la validació de les dades (que és el cas del control o de moltes teories científiques basades en hipòtesis més o menys contrastades).

No és estrany, per això, que la teoria sigui perfectament aplicable al camp de les ciències "toves" (la sociologia, la lingüística, etc.), en què molt sovint un refinament dels conceptes i classes emprats produeix un empobriment del seu poder descriptiu sense guany aparent en el rigor (i cal no oblidar que en aquestes ciències l'exactitud descriptiva és tan important com el rigor).

Un dels terrenys més ben estudiats de la teoria és el de les relacions difuses, que ha permès posar les bases d'una teoria realista de la classificació en condicions generals, molt útil en el reconeixement de formes, l'aprenentatge amb ordinador o la robòtica. Encara hi ha altres camps interessants de la teoria, com ara l'estudi de l'entropia no probabilística dels conjunts difusos, la semàntica difusa dels llenguatges naturals, l'anàlisi de l'adverbi i altres modificadors lingüístics com a funcionals difusos, etc. Encara que cada tema requeriria ben bé tot un article.

Apèndix de terminologia

L'expressió catalana "conjunt difús" com a traducció de l'anglesa *fuzzy set* sembla especialment apropiada. En efecte, segons el *Fabra*, "difús" vol dir en català "difós a través, no circumscrit", i també, figuradament, "que deixata o allargassa el pensament ultra mesura". Aquesta definició, juntament amb l'exemple que Fabra proposa ("llum difusa" = la deguda a la reflexió irregular), encaixa bé amb la noció de conjunt amb un nucli central d'elements precisos i una corona d'elements fronterers de pertinença parcial, i també s'acorda amb la definició anglesa de *fuzzy*, que segons l'*Oxford Dictionary* s'aplica a la roba gastada pels caires, al borrissol que cobreix una superfície o als límits imprecisos d'una idea. Els francesos ho han traduït per *sous-ensemble flou* on "sous" ve a compte del fet que, més que de conjunts, es tracta de subconjunts d'un referencial, i on "flou" es deu potser menys a la correcció del terme que al respecte reverencial per Karl Menger, el primer que el va usar en una versió primitiva del concepte (i en francès!, detall aquest que els francesos li agraeixen eternament). En castellà, l'expressió utilitzada és *conjunto borroso*. En italià, tot i l'expressió oficial *insieme diffuso*, tothom en diu *fuzzy set*.

Teresa Riera i Ton Sales

Material de lectura

D'ença del 1965 (la data de l'article fundacional de Zadeh) s'ha produït una gran quantitat de publicacions sobre el tema a tots els nivells.

–F. Azorín: *Algunas aplicaciones de los conjuntos borrosos a la estadística*, Pub. Instituto Nacional de Estadística, 1979.
–R. Bellman i L.A. Zadeh: *Local and Fuzzy Logics* a *Modern Uses of Multiple-Valued Logic*, Ed. Dunn i Epstein, Reidel Pubs, Holanda, 1977.
–M. Black: *Vagueness*, "Phil of Science", 4, 1937, pàgs. 427-455.
–D. Dubois i H. Prade: *Fuzzy Sets and Systems. Theory and Applications*, Academic Press, 1980.
–J.A. Goguen: *L – Fuzzy Sets*, "Jour. Math. Analysis and Applic." 18, 145, 174, 1967.
–J.A. Goguen: *The Logic of Inexact Concepts*, "Synthese", 19, 325-373, 1968-69.
–A. Kaufmann: *Théorie des Sous-ensembles Flous* (4 volums), Mason, París, 1972.
–C.V. Negoita i D. Ralescu: *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Birkhäuser Verlag, 1975.
–B. Russell: *Vagueness*, "Australasian Journal of Philosophy" 1, 84-92, 1923.
–T. Sales: *For and Undogmatic View of Logic*, Proc. I Reencontro sulla Epistemologia de la Scienza, Nàpols, 1981.
–E. Trillas: *Conjuntos borrosos*, Ed. Vicens-Vives, 1980.
–E. Trillas: *Matemáticas y vaguedad*, "L'Escaire" 8, 5-8, i *Una conversa imaginària*, "L'Escaire" 8, 11-21, 1981.
–E. Trillas, i T. Riera: *Towards a representation of "Synonyms" and "Antonyms" by Fuzzy Sets*. "Busefal" 5, 30-45, 1981.
–L.A. Zadeh: *Fuzzy Sets*, "Information and Control" 8, 338-353, 1965.