Els quadrats màgics

Fa molts segles que els quadrats màgics fan part del tresor cultural de la humanitat. Els homes de tots els temps han apreciat, amb més o menys intensitat, les seves característiques màgiques, simbòliques i matemàtiques.

Conta la llegenda xinesa que, un dia que el rei Yu es trobava a la vora del riu Groc (i això hauria estat als voltants de l'any 2200 aC), li van cridar l'atenció les estranyes marques en forma de punts que una tortuga mostrava a la closca. En mirar-la amb més deteniment, va observar que els punts en qüestió formaven nou grups disposats en tres files i tres columnes. Però el més sorprenent era que la suma de cada fila, de cada columna, i de les dues diagonals era sempre quinze. A la figura 1 veiem l'antic disseny xinès, el *Loh-shu* o pergamí del riu Loh, en què "els nombres imparells estan expressats com cercles blancs, és a dir, símbols *yang*, l'emblema del cel, mentre que els parells són cercles negres, és a dir, símbols *yin*, l'emblema de la terra." (Paul Carus, *Reflections on Magic Squares*, a la ref. [1]).

Així acabava de ser descobert el primer quadrat màgic de què tenim notícia. De la Xina, la troballa va passar –lentament, com es movien els coneixements en aquells temps– a l'Índia i el Japó. Els quadrats màgics eren coneguts allí molt abans del nostre segle I, i van arribar finalment a Europa, que els va incorporar ràpidament a la seva cultura. Coneguts possiblement d'abans, el segle XV eren ja matèria per als estudiosos. L'alemany Heinrich Cornelius Agrippa (1486-1535) va publicar set quadrats màgics associats als "set planetes" del temps (Sol i Lluna compresos), i el famós gravat de Durer, *Melancolia I*, ens mostra, entre els objectes que envolten el savi melangiós, un quadrat màgic en el qual dues de les caselles componen, es creu que intencionadament, l'any del gravat: 1514 (vegeu fig. 2).

La igualtat de totes les sumes, característica sorprenent, inesperada en un arranjament de xifres que sembla capritxós, ha estat motiu que s'hagi atribuït a aquests quadrats virtuts sobrenaturals. Així, van guanyar el qualificatiu de màgics, i aquesta veneració ha arribat fins als temps moderns: no fa gaire s'utilitzaven encara com a amulets contra mals i desgràcies a l'Índia, el Tíbet, Sumatra...

Com es construeix un quadrat màgic

Comencem per unes definicions: l'*ordre* del quadrat és el nombre de files (i columnes) de què consta, de manera que el quadrat d'ordre 3 és el que té tres files i tres columnes, i per tant, nou *elements*. Si aquests elements són consecutius a partir del número 1, com és el cas normal, la *suma* del quadrat serà $1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$ i, estant disposats en tres files i tres columnes, la *constant* serà $45/3 = 15$; el que equival a dir que, al quadrat d'ordre 3, cada fila, columna i diagonal sumaran quinze.

Un quadrat d'ordre n tindrà n^2 elements, distribuïts en n files i n columnes, que sumaran, com les dues diagonals, $n(n^2+1)/2$, que és el valor de la seva constant, i que s'obté dividint per n la *suma* total dels elements, que és, com sabem, $n^2(n^2+1)/2$.

Passem de llarg el quadrat d'ordre 1, que no té sentit si no és per conveni, i el d'ordre 2, que, com fàcilment es veu, és impossible amb els enters 1, 2, 3, 4, i estudiem la construcció del d'ordre 3, simbolitzat a la figura 3a.

A la figura 3b hem dibuixat unes rectes que representen quatre de les sumes i que passen per tots els elements una vegada, i quatre vegades per l'element central. Sabem que la suma dels elements de cada una de les rectes ha de ser igual a la constant, és a dir, 15; i el fet que en total són quatre rectes ens permet escriure:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 4a_5 + a_6 +$

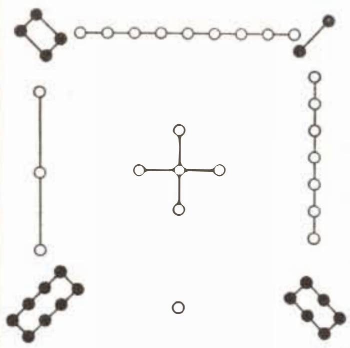

Figura 1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Figura 2

a1	a2	a3
a4	a5	a6
a7	a8	a9

Figura 3a

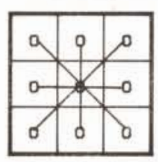

Figura 3b

	1	
	5	
	9	

Figura 3c

8	1	6
	5	
	9	

Figura 3d

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 3e

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2	7	6
9	5	1
4	3	8

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Figura 4

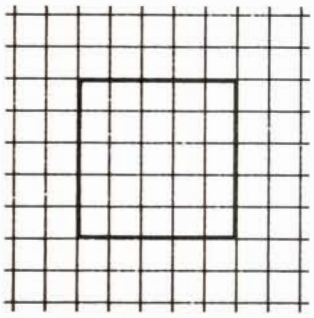

Figura 5a

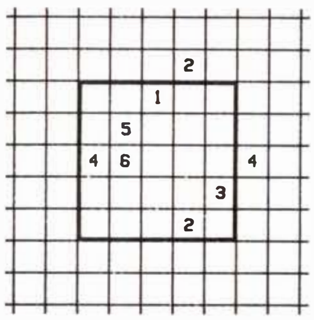

Figura 5b

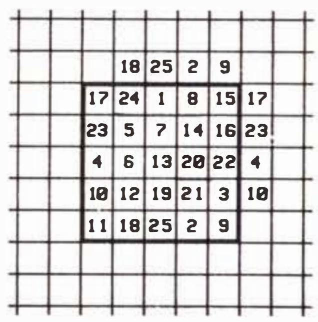

Figura 5c

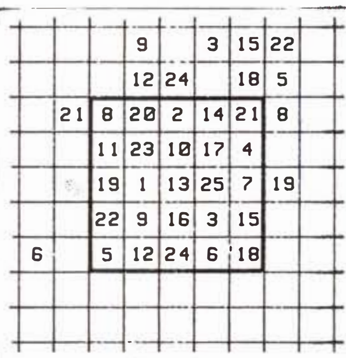

Figura 6

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Figura 7

$a_7 + a_8 + a_9 = 4 \cdot 15 = 60$

Però sabem també que la *suma* de tots els elements del quadrat és igual a $9\,(9+1)/2 = 45$, de manera que podem canviar així la igualtat precedent:

$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) + 3a_5 = 60$

$45 + 3a_5 = 60$

d'on $a_5 = 5$.

Veiem, doncs, que el cinc és l'element que ha d'ocupar la casella central. Cal dir que l'element central del quadrat és també, en la majoria dels quadrats d'ordre imparell, el número central de la sèrie dels elements. Aquesta circumstància va ser possiblement l'origen que els xinesos el respectessin tant i l'associessin a l'emperador i a un dels seus principals déus, i també que alguns manuscrits musulmans incloguin quadrats en els quals manca l'element central.

On col·locar els elements restants?

Demostrarem en primer lloc que el número 1 no pot ocupar un vèrtex: efectivament, si n'examinem un, per exemple l'a_1 (el raonament és similar per als altres), ens serà fàcil veure que:

$$a_1 + a_9 = a_4 + a_6$$
i també
$$a_1 + a_4 = a_8 + a_9$$

d'on

$$a_1 = a_4 + a_6 - a_9$$
i també
$$a_1 = a_8 + a_9 - a_4$$

i, sumant:

$$2a_1 = a_8 + a_6$$
d'on
$$a_1 = (a_8 + a_6)/2$$

és a dir, l'element que ocupa el vèrtex és la mitjana aritmètica de dos altres elements, cosa impossible per al número 1. Veiem, doncs, que el número 1 ha d'ocupar una de les caselles restants; per exemple, a_2.

Tenint fixats a_2 i a_5, l'assignació de a_8 és automàtica: cal posar-hi el número 9, a fi que la suma sigui 15 (figura 3c).

Tornem a fixar-nos en el número 1 i busquem, entre les xifres encara disponibles, una parella que sumi 14, de manera que la primera fila pugui arribar a quinze: l'única que compleix aquesta condició és la formada pel 6 i el 8, que col·locarem al seu lloc, després de decidir-nos per la successió 6-1-8 o la 8-1-6. La figura 3d ens mostra la situació després d'optar per la segona successió.

A partir d'aquest moment, la col·locació dels altres números ja està determinada: la diagonal que comença amb 6 i 5 ha de ser completada amb el 4, etc. (figura 3e).

L'elecció de la casella per al número 1 entre les quatre disponibles (a_2, a_4, a_6, a_8) determina quatre quadrats diferents per rotació, mentre que en decidir entre la combinació 6-1-8 i la 8-1-6 estem escollint també entre dues varietats: la diferència és ara per simetria. Combinant aquestes dues transformacions, obtindrem vuit quadrats d'aspecte diferent, però que deriven tots d'un d'ells (figura 4).

Quadrats d'ordre imparell més grans

El procediment que hem utilitzat per construir el quadrat d'ordre 3, malgrat la seva base matemàtica, no és un algorisme generalitzable per als ordres superiors. Invitem el lector que compongui quadrats d'ordre 4, 5, etc., i podrà observar que en molts moments es trobarà deturat, sense cap indicació del camí a seguir. Aleshores caldrà elegir a l'atzar, i són tants els punts d'indecisió, que donen origen a multitud de quadrats diferents. Ja Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675) va descobrir que el nombre dels d'ordre 4 és 880 (sense comptar transformacions); d'ordre 5 se'n coneixen més de mig milió, i es pensa que el nombre total pot passar de tretze milions. Donarem un consell al lector: que comenci per compondre quadrats *associats*, que són aquells en els quals qualsevol parella de caselles simètriques amb relació al centre del quadrat té una suma constant, igual precisament a la del primer i el darrer element; és a dir, $17 = 1 + 16$ per al quadrat d'ordre 4, $26 = 1 + 25$ per al d'ordre 5, etc.

Trobarem de vegades que l'elecció d'una via determinada haurà estat equivocada; i de vegades l'error no serà evident fins després d'una bona estona; això és particularment molest en quadrats d'ordre gran, perquè ens obliga a refer molta feina. És per això que és d'agrair l'esforç dels estudiosos i aficionats que, des de fa segles, han elaborat algorismes eficients que permeten omplir les caselles de forma mecànica, i deixen que la inspiració i la inventiva puguin ser aplicades al descobriment de quadrats cada vegada més curiosos, complexos o enginyosos.

Presentarem ara un mètode que és segurament el més utilitzat per a quadrats d'ordre imparell. Va ser descrit pel matemàtic i jesuïta francès del segle XVII De la Loubère, a qui va arribar de l'Índia. L'agorisme ha sofert modificacions amb el temps fins a arribar a les diverses versions actuals. Il·lustrarem el procediment amb un quadrat d'ordre 5.

Convindrà imaginar que el nostre

quadrat es repeteix en totes direccions (vegeu figura 5a, on el quadrat real està remarcat), i actuarem de la següent manera: col·locarem l'u a la casella central superior (després veurem que no és l'única possible) i escriurem els altres números per ordre, seguint la diagonal ascendent cap a la dreta (direm que el *pas* és d'una casella amunt més una casella a la dreta), tenint només en compte que, quan aquesta regla ens porti fora del quadrat remarcat, traspassarem el número que ha quedat fora a la casella real equivalent, i continuarem des d'aquesta.
Quan la casella on toqui inscriure el número es trobi ja ocupada, el col·locarem a la immediata inferior a la darrera que hem omplert (i direm que el *salt* és d'una casella avall). Aquesta situació s'il·lustra a la figura 5b. Continuarem així fins a omplir totalment el quadrat, que resultarà màgic (fig. 5c).
Aquest procediment no és més que un cas particular (amb un *pas* i un *salt* concrets, tal com hem vist) d'un altre més general, en el qual la casella inicial, el pas i el salt poden ser els que es vulgui, amb unes poques limitacions que deixem que el lector descobreixi per la pròpia experiència. Donem com a exemple la figura 6, que presenta un quadrat d'ordre 5 amb un pas equivalent a una casella a la dreta i dues amunt (el moviment del cavall d'escacs) i un salt de tres caselles a la dreta.
Hi ha altres mètodes de composició de quadrats, tant parells com imparells, alguns d'ells molt enginyosos i elegants, com el famós de Philippe De la Hire, un altre matemàtic francès (1640-1718), que és aplicable a qualsevol ordre; però no podem deturar-nos-hi ara, i passarem directament a la descripció d'alguns dels diferents tipus de quadrats.

77	1	2	3	4	72	71	70	69
76	62	17	18	19	58	57	56	6
75	61	51	29	30	48	47	21	7
74	60	50	44	37	42	32	22	8
9	23	33	39	41	43	49	59	73
14	27	36	40	45	38	46	55	68
15	28	35	53	52	34	31	54	67
16	26	65	64	63	24	25	20	66
13	81	80	79	78	10	11	12	5

Figura 8

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11

Figura 9

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

Figura 10

17	113	47
89	59	29
71	5	101

Figura 11

99	81	16	68
18	66	91	89
61	19	88	96
86	98	69	11

Figura 12a

11	69	86	98
96	88	61	19
68	16	99	81
89	91	18	66

Figura 12b

86	61	18	99
98	19	66	81
69	88	91	16
11	96	89	68

Figura 12c

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Figura 13a

2	4	3	6	9	(24)
6	5	2	7	3	(23)
1	9	9	4	2	(25)
3	8	8	6	4	(29)
5	3	3	1	5	(17)
(17)	(29)	(25)	(24)	(23)	

Figura 13b

Màgics, diabòlics i... satànics!

La imaginació i la perseverància dels qui s'han aplicat a l'estudi d'aquests curiosos arranjaments de números han donat com a fruit el descobriment de quadrats especials que, tot respectant en general les condicions bàsiques del quadrat màgic, mostren característiques addicionals que ens sorprenen i de vegades ens meravellen.
Hem parlat ja, encara que de passada, dels quadrats *associats:* són aquells en els quals la suma de qualsevol parella de caselles simètriques amb relació al centre és constant. Tenim com a exemple el ja citat quadrat de Durer (fig. 2); en canvi, el de la figura 7 és màgic, però no associat. Si elevem al quadrat els elements d'un associat poden descobrir-se també moltes altres particularitats, tasca que deixem al lector interessat.
El quadrat de la figura 8 és *orlat,* és a dir, està format per quadrats màgics concèntrics; un de central, de constant 123, i els altres tres que l'envolten successivament i es contenen mútuament, les constants dels quals valen, respectivament, 205, 287 i 369. Els xinesos van aprendre fa molts segles a construir quadrats d'ordre 5 i 7 prenent els nou números centrals de la successió 1, 2, 3, ...n^2 ($n = 5$, $n = 7$), organitzant-los en quadrat d'ordre 3, i orlant aquest quadrat amb els números restants.
Tenim també la possibilitat de construir quadrats màgics *compostos,* utilitzant altres quadrats d'ordre inferior, com el de la figura 9, d'ordre 9, format per nou quadrats màgics d'ordre 3. De vegades els quadrats constitutius no es disposen un al costat de l'altre, sinó que *s'ensolapen.*
El quadrat més perfecte de tots és el *diabòlic,* valgui la paradoxa, que té diversos noms, entre ells el de *màgicament màgic.* Oferim com a exemple el de la figura 10, en el qual pot trobar-se la constant màgica 34, a més de les 4 + 4 + 2 vegades habituals, en moltes més

1/19	,0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1
2/19	,1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2
3/19	,1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3
4/19	,2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4
5/19	,2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5
6/19	,3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6
7/19	,3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7
8/19	,4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8
9/19	,4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9
10/19	,5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0
11/19	,5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	3	6	1
12/19	,6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2
13/19	,6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3
14/19	,7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4
15/19	,7	8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5
16/19	,8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8	9	4	7	3	6
17/19	,8	9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7
18/19	,9	4	7	3	6	8	4	2	1	0	5	2	6	3	1	5	7	8

Figura 14

26	20	14	1	44	38	32
34	28	15	9	3	46	40
42	29	23	17	11	5	48
43	37	31	25	19	13	7
2	45	39	33	27	21	8
10	4	47	41	35	22	16
18	12	6	49	36	30	24

Figura 15

5	4	3
6	1	2
7	8	9

Figura 16

combinacions: per exemple, en els nou quadrats d'ordre 2 que conté i en molts altres grups de quatre caselles, com poden ser totes les diagonals truncades (2+3+15+14, 16+6+1+11, 11+10+6+7, ...), en els quatre vèrtexs, etc.

Hem fet esment d'una característica, la constància de la suma de les diagonals truncades, que és l'origen d'una propietat molt especial: si agafem un quadrat diabòlic d'ordre *n* i el repetim en totes direccions, de manera que enrajolem l'espai amb ell i les seves còpies, qualsevol quadrat d'ordre *n* que limitem dintre del mosaic de números que hem creat seguirà sent diabòlic.

No hi ha cap quadrat diabòlic d'ordre 3; d'ordre 4 se'n poden construir 48 de diferents, que, per rotació i simetria, es converteixen en 384.

Un quadrat és anomenat *satànic* quan és màgic i segueix sent-ho en ser elevats els seus elements a una mateixa potència. No es coneix cap quadrat satànic de potència dos que sigui d'ordre inferior a 8; pel que fa als de potència tres, és a dir, cúbics, es va creure molt de temps que no podien ser d'ordre inferior a 64, però W.H. Benson en va aconseguir un d'ordre 32 utilitzant un algorisme de la seva invenció.[4]

Capgirats, reflectits i altres curiositats

També es poden compondre quadrats màgics utilitzant exclusivament nombres primers: és clar que, en aquest cas, els elements no seran ja números consecutius. En tenim un exemple a la figura 11, que ens en mostra un d'ordre 3, de constant igual a 177. El gran creador de passatemps, l'anglès Henry Dudeney, va demostrar que la constant mínima és 111. Voleu intentar-ne la solució?

En el camp de les curiositats, citarem els quadrats *capgirables*, en els quals els números poden posar-se cap per avall sense que el quadrat perdi la condició de màgic; i els *reflexibles*, compostos per números que poden llegir-se seguint l'ordre normal dels dígits, d'esquerra a dreta, o bé l'ordre invers, de dreta a esquerra, com en un mirall, i de les dues maneres són màgics; com a exemple, tenim la figura 12a, que ens mostra un quadrat que és, al mateix temps, *capgirable* i *reflexible:* els resultats d'aquestes dues transformacions, figures 12b i 12c, segueixen sent, com pot comprovar-se, màgics.[3]

Citem també dos quadrats amb peculiaritats sorprenents: el primer, original de T.E. Lobeck, i citat per Martin Gardner,[2] va ser compost a partir d'un quadrat màgic normal d'ordre 5 (fig. 13a), substituint, en lloc de cada element, el dígit corresponent del número *pi:* 3,14159265358979323846264 3.

El quadrat resultant no és màgic, però, curiosament, la suma de cada fila és igual a la suma d'una de les columnes (fig. 13b).

L'altre quadrat curiós és el de la figura 14. A cada fila *i* figuren els decimals de la fraccio *i*/19. Va ser compost per H.A. Sayles (ref. [1]).

De la mateixa referència[1] reproduïm el *quadrat de losange* d'ordre 7 (fig. 15); pot apreciar-se que s'ha aconseguit que tots els nombres imparells quedin dintre del quadrat inscrit (que s'interpreta com a losange, és a dir, com un rombe dret), i s'han deixat els parells als triangles exteriors.

No podem acabar sense referir-nos a un quadrat que és el contrari de tot el que hem vist fins ara: el denominat *antimàgic*, en el qual les sumes de les files, les columnes i les dues diagonals *són totes diferents.* Un mètode de construcció consisteix a inscriure els números per ordre, començant al centre i seguint en forma d'espiral. Aquest ha estat el procediment per compondre el de la figura 16. ¿Sabríeu dissenyar-ne un altre en el qual, a més, cap de les sumes no fos quinze?

Josep M. Massó i Aguiló

Referències:

1. W.S. Andrews: *Magic Squares and Cubes* (1917), Dover 1960.
2. "Scientific American", setembre 1979.
3. John Lee Fults: *Magic Squares*, Open Court, 1974.
4. "Journal of Recreational Mathematics", vol. 7-1 (1974).

Per què un full de DIN-A4 fa 210 x 297 mm?

Els formats internacionals del paper van ser normalitzats segons la norma ISO 216 que dóna dues sèries, la A i la B, totes dues amb la propietat que si pleguem un full qualsevol d'aquestes sèries per la meitat i el tallem obtindrem dos fulls iguals, els costats dels quals guardaran la mateixa relació de proporcionalitat que els costats del full original. Com s'observa en el dibuix aquest factor alçada/amplada és aleshores necessàriament igual a $\sqrt{2}$.
La sèrie A s'obté a partir d'un full d'un metre quadrat de superfície. Un petit càlcul ens indica que les dimensions d'aquest full han de ser 1.189 mm i 841 mm (1,189 x 0,841 = 1 i 1.189/841 = 1,414). Si dividim aquest full en setze parts iguals, és a dir, si dividim els costats en quatre parts idèntiques s'obté el DIN A4.

Jaume Puigbò

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{(y/2)}$$

Si $x = 1$ $\qquad \frac{y^2}{2} = 1$

$y^2 = 2 \qquad y = \sqrt{2}$