

## L'espai i el temps en la física moderna

L'estudi i la capacitat de transformació del món físic abasta aspectes molt diversos, des de la ciència aplicada (ciència de materials, meteorologia, holografia, producció d'energia,...) fins a les ciències teòriques (caracterització dels constituents de la matèria, concepció del "suport" de la matèria, definició de les inte-

raccions bàsiques que expliquen el moviment,...). Entre aquestes darreres, una de les qüestions que ha hagut de plantejar-se la física és la teoria dels suposats "suports" de l'existència material, l'espai i el temps. Des de l'inici, sobretot amb els plantejaments de Newton, les hipòtesis que calia fer sobre l'espai i

el temps han acabat sent molt importants per explicar la resta de l'edifici conceptual de la física. Einstein ha estat el principal protagonista de la revisió més important (i potser més intencionada) d'aquests conceptes.

L'espai i el temps són formes d'existència del món real, constituït per la matèria, i corresponen a les sensacions primàries d'extensió i canvi, respectivament.

Un individu pot ordenar totalment el conjunt de les seves experiències segons el criteri "A és anterior a B". Aquest conjunt l'anomenarem *temps individual* i els seus elements seran els *instants*. Postularem que el temps individual té la mateixa estructura que una recta, és a dir, és un continu unidimensional.

Un procés natural comença, es desenvolupa i s'acaba. Per poder comparar les duracions de dos processos necessitem una estructura més rica que l'anterior, que ens permeti de mesurar la duració de cada procés. És necessària la definició d'un *rellotge patró*, el qual consisteix en un sistema aïllat que retorna cíclicament a l'estat inicial. La duració de cada cicle defineix una unitat de temps. En conseqüència, acceptar un rellotge patró pressuposa acceptar que tots els seus cicles són idèntics. Aquest postulat es fonamenta en altres dos més elementals: l'homogeneïtat del temps i el principi de causalitat, dels quals es dedueix que la seqüència d'estats pels quals passarà el sistema rellotge abandonat a si mateix depèn exclusivament de l'estat inicial i no de quan el posem en funcionament. Un rellotge més la tria d'un "instant zero" permeten d'assignar un número a cada instant. D'aquesta manera es dota el temps individual de l'estructura de la recta numèrica real.

Si en un instant donat un individu observa el seu entorn i es troba voltat d'objectes, d'aquí neixen els conceptes primaris de "lloc d'una cosa" i de "distància".

Per descriure el moviment d'un cos A un observador ha de poder determinar les diferents posicions de A i per això utilitza cossos de referència, els quals, per definició,\* estan en repòs respecte de l'observador. De fet, la materialitza-

ció de l'espai de referència d'un observador és el sistema de cossos materials que per definició estan en repòs respecte d'ell.

Un altre observador tindrà un altre espai de referència, el qual possiblement no coincidirà amb l'anterior. Un cos que estigui en repòs respecte del primer observador no ho estarà en relació amb el segon. No té sentit, doncs, parlar de repòs ni d'espai en abstracte, sinó de repòs respecte d'un observador i del seu espai de referència.

Per mesurar distàncies entre dos llocs cal definir prèviament una *regla patró* i una manera d'operar amb ella: la distància entre dos llocs P i Q és el mínim nombre de replicacions de la regla patró que, en repòs respecte de l'observador, cal afegir per unir P a Q. Aquesta manera de mesurar distàncies pressuposa que la regla patró no canvia si la traslladem o en variem l'orientació, suposició basada en els postulats més elementals d'homogeneïtat i isotropia de l'espai.

A la pràctica usual de mesurar distàncies entre llocs que estan en repòs respecte a la superfície de la terra amb una regla rígida, la distància entre dos llocs qualssevol no varia amb el pas del temps. Aquest fet condueix a l'abstracció, comuna a la física pre-relativista i a la teoria especial de la relativitat, que existeixen espais de referència *rígid*s i aquests són els "bons".

Així, doncs, en aquestes dues teories, cada observador està dotat d'un espai de referència *rígid*. Una altra abstracció, que parteix de l'experiència sobre dominis de l'espai relativament petits, consisteix a acceptar que les relacions mètriques entre els seus punts són consistents amb els postulats de la geometria euclidiana.

La introducció per part de Descartes (segle XVII) del mètode de coordenades va permetre d'aplicar l'àlgebra a l'estudi de la geometria. Aquest mètode identifica cada punt de l'espai de referència d'un

observador mitjançant tres coordenades cartesianes (x,y,z), que són les distàncies interceptades per les projeccions ortogonals del punt sobre un sistema de tres eixos ortogonals. En aquesta representació la distància entre dos punts P i Q ve donada per la relació pitagòrica:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$$

L'existència de sistemes de coordenades cartesianes, en els quals la distància entre dos punts satisfà aquesta relació, equival a postular el caràcter euclidià de l'espai. Així, doncs, tant a la física pre-relativista com a la relativitat especial, el lloc d'un cos en un cert espai de referència ve indicat per tres coordenades cartesianes. Si el cos està en moviment la seva posició canviarà seguint una determinada trajectòria. Queda encara el problema d'assignar una coordenada temporal al pas del mòbil per cada punt de la trajectòria. La solució de la física pre-relativista (i de la nostra experiència quotidiana) consisteix a assignar-li el temps que marca el *rellotge* de l'observador quan ho veu.

Aquesta manera ingènua de resoldre el problema es fonamenta en el caràcter absolut del temps i de la simultaneïtat a la física pre-relativista. Des del punt de vista d'aquesta, dos esdeveniments són *simultanis* quan un observador els veu al mateix temps. Donat que la velocitat de la llum és desmesuradament gran si la comparem amb les velocitats típiques de la vida quotidiana, la cinemàtica pre-relativista està fonamentada en el caràcter instantani de la propagació de la llum. És conseqüència d'això que el criteri de simultaneïtat definit més amunt doni el mateix independentment de l'observador que l'apliqui,\* donant peu a la següent abstracció: la relació de *simultaneïtat és absoluta* (independent de l'observador). D'aquesta manera el conjunt m de tots els esdeveniments es presenta intrínsecament estratificat, i cada full correspon a una classe d'esdeveni-

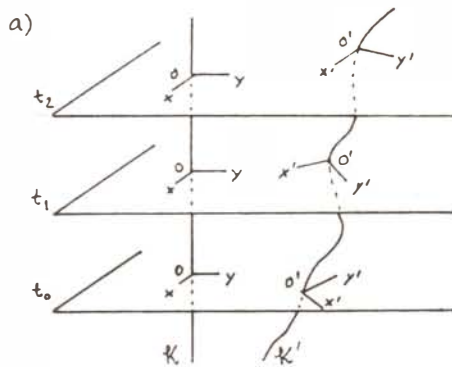
## per Josep Llosa i Carrasco

*Jospe Llosa i Carrasco (Vilanova i la Geltrú, Garraf, 1951) és doctor en física per la Universitat de Barcelona des del 1978. És professor del departament de física teòrica de la mateixa universitat. Actualment treballa sobre dinàmica relativista de partícules amb interacció a distància i relativitat general.*

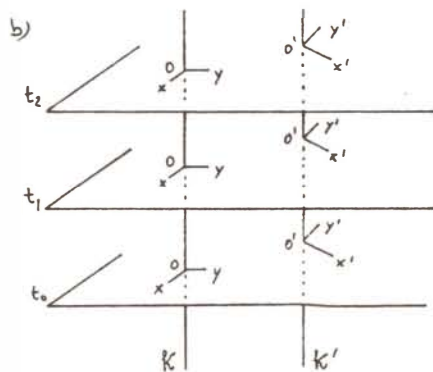
Figura 1

Es representen els espai-temps pre-relativistes, suprimint la dimensió z perquè la figura sigui intel·ligible:

A) Model de Leibniz-Huygens: el moviment relatiu de translació dels orígens i de rotació dels eixos per a dos observadors K i K' no està sotmès a cap restricció.

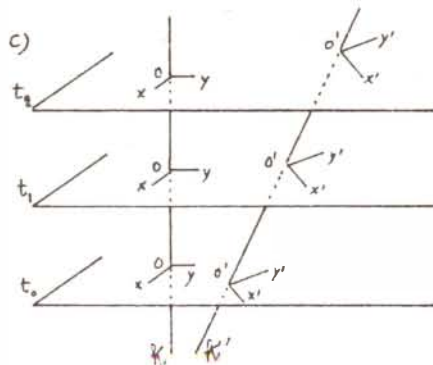


B) Model d'Aristòtil-Newton: els orígens de coordenades de dos observadors estan en repòs absolut (i per tant relatiu); a més, els eixos no giren.



C) Model de Galileu-Newton: els eixos coordenats no tenen moviment de rotació relatiu, però els orígens es desplacen amb moviment relatiu uniforme i rectilini.

Els plans  $t_0$ ,  $t_1$  i  $t_2$  representen fulls d'esdeveniments simultanis, en cada un dels models. A cada full es representen les posicions dels orígens de coordenades i eixos de K i de K'.



ments simultanis entre si i constitueix una mena d'instància del món. El fet que la "història" d'un observador estigui formada per una seqüència d'esdeveniments, un sobre cada full, permet que cada observador amb el seu rellotge pugui assignar una coordenada temporal a cada full.

Aquesta estratificació intrínseca del conjunt  $m$  que anomenarem espai-temps correspon a l'estructura causal de la física pre-relativista, en la qual el full d'un esdeveniment Z (el seu present) separa el seu futur causal ( $t > t_Z$ ) del seu passat causal ( $t < t_Z$ ). El fet que passat i futur tinguin una frontera comuna, el present, és una conseqüència de la hipòtesi segons la qual és possible transmetre senyals tan ràpids com vulguem. Hipòtesi implícita, per altra part, en l'abstracció que ens ha menat a acceptar el significat absolut de la simultaneïtat.

En el marc pre-relativista és perfectament consistent la concepció que el món real evoluciona en el temps. La distribució de la matèria i els esdeveniments continguts en un full determinat representen objectivament l'estat del món present i l'evolució temporal ve donada per la seqüència ordenada dels diferents fulls.

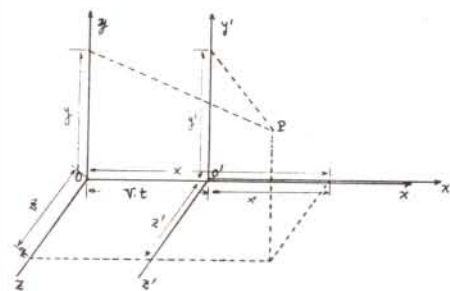
### Els models d'espai-temps de la física pre-relativista

D'acord amb la posició presa davant del concepte *repòs absolut* podem distingir els models d'Aristòtil-Newton  $m_{AN}$ , de Leibniz-Huygens  $m_{LH}$ , i de Galileu-Newton  $m_{GN}$ .

A— Segons Huygens i Leibniz no té sentit preferir cap dels espais de referència que es pot construir a partir dels diferents sòlids, és a dir, no n'hi ha cap per al qual l'estat de repòs presenti uns







$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0$$

es transforma en

$$(x' - x'_0)^2 + (y' - y'_0)^2 + (z' - z'_0)^2 - c^2 (t' - t'_0)^2 = 0$$

Aquesta condició restringeix la forma de les matrius  $(A^{\mu}_{\nu})$  a les anomenades matrius de Lorentz. La transformació de Lorentz; entre dos sistemes inercials com els representats a la figura 2, que tenen moviment relatiu orientat segons l'eix OX, té la forma senzilla següent:

$$x' = \frac{x - V \cdot t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} ; \quad t' = \frac{t - x \cdot V/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

$$y' = y ; \quad z' = z$$

La qual presenta la peculiaritat interessant de coincidir aproximadament amb la transformació de Galileu corresponent en el límit de petites velocitats ( $V$  molt més petit que la velocitat de la llum).

La figura representa el canvi de coordenades entre dos observadors inercials en el model de Galileu-Newton, en el cas senzill que els dos orígens coincideixin a  $t = 0$ , que l'orientació dels eixos sigui la mateixa i que el moviment relatiu sigui en la direcció de l'eix OX.

A la transformació de Galileu general ens trobem amb la complicació addicional següent: i) els orígens de coordenades no coincideixen per  $t = 0$ ; ii) els eixos coordenats no tenen per què tenir la mateixa orientació; iii) la velocitat relativa no està orientada segons un dels eixos.

Conseqüència de la transformació de Galileu és la llei de composició de velocitats: si  $(v_x, v_y, v_z)$  és la velocitat d'un mòbil respecte a K i  $(V_x, V_y, V_z)$  és la velocitat de K' relativa a K, llavors la velocitat del mòbil relativa a K' és:

$$v'_x = v_x - V_x, \quad v'_y = v_y - V_y, \\ v'_z = v_z - V_z$$

En el marc de la relativitat restringida els sistemes inercials es caracteritzen per:

a) El moviment de les partícules lliures és rectilini i uniforme (Llei d'inèrcia). Per tant, els canvis de coordenades entre dos referencials inercials K i K' han de convertir rectes en rectes, és a dir, han de ser lineals:

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=1}^4 A^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + B^{\mu}$$

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = t$$

essent  $(A^{\mu}_{\nu})$  una matriu  $4 \times 4$  i  $(B^{\mu})$  quatre nombres constants.

b) La condició de constància i isotropia de la velocitat de la llum per a tots els observadors implica que aquestes transformacions han de conservar la forma de l'equació dels rajos de llum:

*riment de la galleda:* "Si d'una corda llarga hi pengem una galleda, la fem girar fins que la corda estigui ben retorçada i l'omplim bé d'aigua, mantenint-la en repòs junt amb l'aigua, quan la deixem anar, per l'acció sobtada d'una altra força la galleda començarà a girar en sentit contrari, i mentre la corda recupera el seu estat primitiu, la galleda persistirà durant un cert temps en aquest moviment; al començament, la superfície de l'aigua serà plana, tal com era abans que la galleda comencés a girar; després, però, la galleda, en anar comunicant el seu moviment a l'aigua, l'obligarà a iniciar un moviment de rotació i a allunyar-se del centre de mica en mica i a pujar per les parets, prenent la forma d'una figura cònca, i com més ràpid sigui el moviment més amunt pujarà l'aigua, fins que per fi, fent les seves revolucions al mateix ritme que la galleda, estarà en repòs relatiu respecte d'aquesta". Aquest experiment (realitzat efectivament per Newton) posa de manifest que el repòs respecte de l'espai absolut però moviment relatiu a un "fals" espai de referència (la galleda girant) no té efectes físics; en canvi, l'estat de repòs respecte del "fals" espai de referència, estat de moviment absolut, per tant, sí que en té (la superfície lliure de l'aigua no és horitzontal).

Així com(1) és un fals criteri, perquè no té cap valor mentre no sapiguem identificar "el centre del sistema del món", el criteri(2) sí que és operatiu —un experi-

ment de la mateixa espècie és el del pèndol de Foucault, que posa de manifest la rotació diària de la Terra. En conseqüència, és possible identificar els moviments de rotació absoluts, però no el de translació. La conclusió immediata és que, si bé  $m_{AN}$  té una estructura massa restrictiva, la de  $m_{LH}$  ho és massa poc.

C— L'espai-temps de Galileu-Newton  $m_{GN}$  és el de la mecànica newtoniana i adopta una posició intermèdia. No hi ha un espai privilegiat  $\xi$  sinó tota una família (espais de referència *inercials*) definida per la *llei d'inèrcia*: en relació amb un espai inercial un cos abandonat a ell mateix continua en estat de repòs o de moviment uniforme i rectilini.

Des del punt de vista de la mecànica no hi ha cap experiment que privilegiï cap dels espais de referència inercials (principi de relativitat de Galileu).

Cal fer notar que mentre a l'espai-temps  $m_{AN}$  el repòs tenia un significat absolut, en aquest model  $m_{GN}$  és el moviment uniforme i rectilini (trajectòries de les partícules lliures) qui té significat independent de l'observador inercial. Observem, per altra part, que a  $m_{LH}$  parlar de trajectòries rectilínies no vol dir res si no especifiquem l'espai de referència (si un cos es mou en línia recta respecte d'un cert espai, tindrà una trajectòria complicada vist des d'un espai que tingui un moviment de rotació respecte del primer).

trets especials observables experimentalment. En conseqüència, no té sentit parlar de repòs absolut, tant pel que fa al moviment de translació com al de rotació.

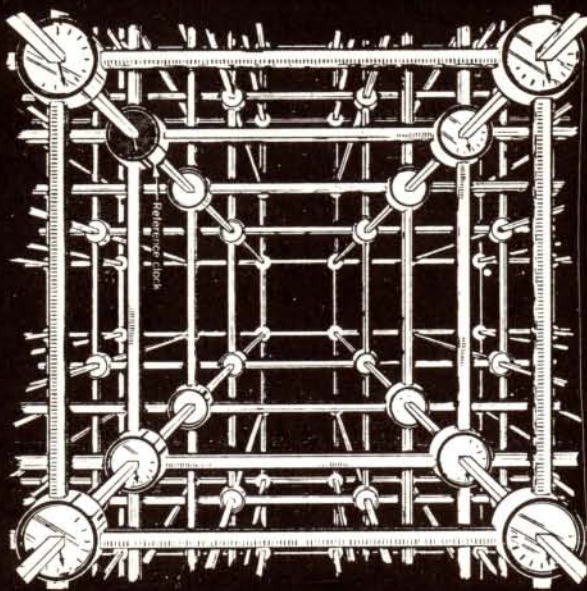
Els canvis de coordenades entre dos observadors han de respectar únicament: a) l'estratificació temporal definida per la simultaneïtat i l'ordenació dels fets, i b) l'estructura euclidiana dels espais de referència. És a dir, si  $(t, x, y, z)$  i  $(t', x', y', z')$  són les coordenades d'un esdeveniment segons dos observadors K i K', tindrem que t' és una funció monòtona creixent de t (la forma de la qual dependrà de la marxa relativa dels rellotges de K i de K') i que  $(x', y', z')$  està relacionat amb  $(x, y, z)$  per una rotació dels eixos de coordenades i un desplaçament de l'origen, tots dos dependents del temps t.

B— En el model d'Aristòtil-Newton hi ha un espai de referència privilegiat, l'espai absolut  $\xi$ . En aquest model i independentment de l'observador, a cada esdeveniment li correspon un instant en el temps absolut T i un lloc a l'espai  $\xi$ . Tots els observadors compatibles amb aquest model prenen com a espai de referència i es diferencien, a tot estirar, en els orígens de coordenades i en la diferent orientació dels eixos, els quals estan en repòs relatiu, a diferència del que passava en el model anterior  $m_{LH}$ . Pel que fa a la mesura del temps, aquests observadors es poden dotar de rellotges idèntics, els quals, com que estaran en repòs relatiu, tindran la mateixa marxa. Podrem escriure, per tant:  $t' = t$ .

Newton va proposar els següents fets observables que diferencien l'estat de repòs absolut de l'estat de repòs respecte d'un espai de referència que no és:

1) "El centre del sistema del món està en repòs absolut" i, en conseqüència, el moviment de translació respecte d'aquest punt serà moviment de translació absolut.

2) Per identificar el moviment de rotació absolut va proposar el conegut *expe-*



## L'espai-temps de la teoria especial de la relativitat

Durant la segona meitat del segle XIX, el coneixement de la interacció electromagnètica va progressar considerablement, i va culminar en el camp teòric amb les equacions de Maxwell del camp electromagnètic i en el camp experimental, amb el descobriment de les ones hertziànes. El fet que la teoria de Maxwell assignés a aquestes una velocitat de propagació  $c = 300.000$  km/s igual a la determinada per a la llum va portar que aquesta fos considerada com un senyal electromagnètic més.

La nova teoria va entrar aviat en conflicte amb el principi de relativitat de Galileu, perquè les equacions de Maxwell no conserven la seva forma després d'una transformació de Galileu. Entre altres anomalies, hi hauria un sistema de coordenades  $K_0$ , respecte del qual les ones electromagnètiques es propagarien amb la mateixa velocitat  $c$  en totes les direccions, i, per a qualsevol altre  $K'$  que es mogués amb velocitat  $V$  respecte a  $K_0$ , la llei de suma de velocitats implicaria una dependència de la velocitat de propagació  $c'$  en funció de l'angle  $\theta$  format per la direcció d'emissió i el moviment relatiu, segons la llei:

$$c'(\theta) = V \cdot \cos\theta + \sqrt{c^2 - V^2} \cdot \sin^2\theta$$

Un dels problemes importants de la física a finals del segle XIX consistia a intentar resoldre la contradicció entre aquesta llei  $c'(\theta)$  i el resultat nul de l'experiment de Michelson (1881 i 1887), el qual no va detectar cap anisotropia en la velocitat de propagació de la llum respecte d'un laboratori terrestre.

La solució més senzilla va ser la donada per la teoria de la relativitat d'Einstein (1905). A grans trets, la seva manera de raonar és la següent: la llum i els senyals electromagnètics es propaguen isotropa-

ment per a tots els observadors inercials, i si la llei de suma de velocitats de Galileu és incompatible amb aquest principi cal revisar la cinemàtica galileana.

D'entrada ems adonem que la relació de simultaneïtat absoluta de la física pre-relativista no és operativa, ja que, atès que la velocitat de la llum és finita, la simultaneïtat de dos esdeveniments dependrà de la situació de l'observador. Per la mateixa raó ja no serà suficient un rellotge per observador per assignar coordenades temporals (els temps estarien afectats d'un retard que dependria de la distància al rellotge). Els observadors de la cinemàtica relativista necessitaran un equip de rellotges (un a cada lloc del seu espai de referència) sincronitzats i idèntics. Cada rellotge servirà únicament per assignar temps als esdeveniments que passen al lloc que ell ocupa.

Cal definir una manera operativa de sincronitzar rellotges o, el que és el mateix, una relació de simultaneïtat (dos rellotges sincronitzats assignen el mateix temps a dos esdeveniments simultanis). Direm que dos esdeveniments situats als llocs A i B de l'espai de referència d'un observador K són *simultanis segons K* si són vistos al mateix temps des del punt mitjà del segment AB. Aquest criteri de simultaneïtat no és absolut: dos esdeveniments simultanis segons K i que passen a llocs diferents A i B del seu espai de referència no són en general simultanis per a un altre observador K'. Encara més, si el moviment de K' respecte de K està orientat en el sentit de A cap a B, es pot demostrar que, segons K', B és anterior a A. En conseqüència, al contari del que passava en els models pre-relativistes, l'espai-temps  $m_M$  (Minkowski) no admet una descomposició absoluta en fulls d'esdeveniments simultanis.

Tampoc no tindran un valor absolut les mesures de longitud i de temps. Si un observador K' mesura la duració d'un procés que es mou respecte d'ell a velo-

citat  $V$  obtindrà un resultat  $t'$  més gran que la duració  $t$  que mesuraria un observador K en repòs respecte del procés. La relació entre els dos resultats ve donada

$$\text{per: } t' = \frac{t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} > t. \text{ Aquesta}$$

dilatació de les duracions no és deguda al fet que el moviment respecte de K afecti la marxa dels rellotges de K', sinó que, mentre que K mesura  $t$  amb un rellotge, K' en necessita dos, el del lloc on s'inicia el procés i el d'allà on acaba. Per tant, les mesures de temps necessiten el concepte de sincronització, el qual depèn de l'observador i d'aquí que diferents observadors obtinguin diferents resultats.

Una cosa semblant passa amb les mesures de longituds. Quan un observador K' mesura la longitud d'una barra que es mou longitudinalment respecte d'ell amb velocitat  $V$ , obté un resultat  $L'$  que sempre serà més petit que la longitud  $L$  mesurada per un observador K que estigui en repòs respecte de la barra:

$$L' = L\sqrt{1 - V^2/c^2} < L.$$

Aquesta contracció de longituds en la direcció del moviment no és associada a unes forces moleculars que encongirien la barra a causa que aquesta es mou, sinó més aviat que l'operació de mesurar una longitud implica utilitzar el concepte de simultaneïtat, el qual no significa el mateix per a K que per a K'.

Així, doncs, les mesures de longitud i de temps no tenen un sentit absolut, en canvi sí que val el mateix per a tots els observadors inercials l'*interval entre dos esdeveniments*, definit per la forma quadràtica de Minkowski:

$$s^2_{AB} = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - c^2 \cdot (t_A - t_B)^2$$

Segons el signe de  $s^2_{AB}$  tindrem:

- i) si  $s^2_{AB} < 0$ , existeix un observador per al qual A i B ocorren al mateix lloc ordenats temporalment i, per tant, hi pot haver connexió causal entre A i B.
- ii) si  $s^2_{AB} > 0$ , per a algun observador A



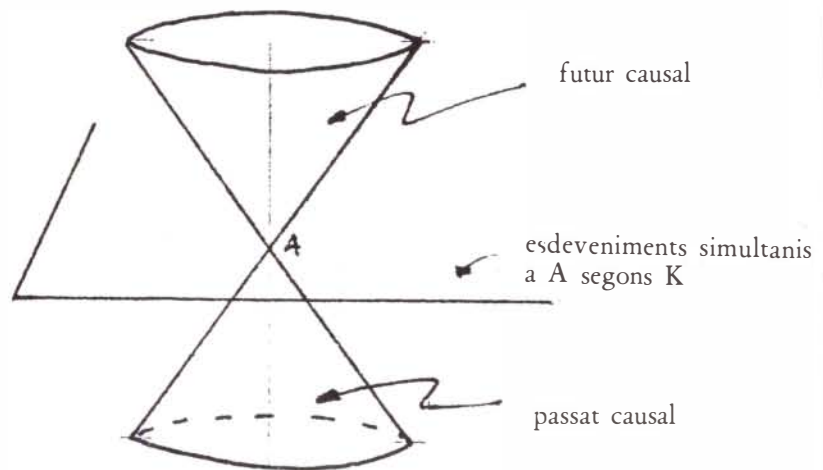


Figura 3

i B són simultanis i passen a diferents llocs, per tant no hi ha cap connexió causal entre ells.

iii)  $s^2_{AB} = 0$  implica que hi ha un senyal electromagnètic que connecta A i B i, per tant, també és possible una relació causal.

En conseqüència, l'estructura causal de l'espai-temps  $m_M$  queda determinada per la forma quadràtica de Minkowski. Aquesta assigna a cada esdeveniment A el con de llum  $\Gamma_A$ , format per aquells esdeveniments B tals que  $s^2_{AB} \leq 0$ . Com que l'interval és un absolut, el con de llum dona un criteri objectiu per distingir el passat i el futur causal i el present d'un esdeveniment.

La figura 3 presenta un esquema del con de llum d'un esdeveniment A (per poder-ho representar només agafem dues dimensions d'espai). El full superior representa el futur causal i l'inferior, el passat. Les generatrius del con són rajos de llum emesos en l'esdeveniment A. Observem el contrast amb els casos pre-relativistes on passat i futur tenien una frontera comuna que constituïa el present de A.

### L'espai-temps de la teoria general de la relativitat

La teoria especial de la relativitat va descartar definitivament la idea de repòs absolut però va deixar encara una categoria privilegiada de sistemes de referència, els inercials. El moviment uniforme "absolut" no porta associats efectes observables però sí que en té el moviment amb acceleració absoluta.

Els sistemes de referència inercials estan caracteritzats per la coneguda "lei d'inèrcia": una partícula lliure té moviment rectilini i uniforme respecte de qualsevol referencial inercial. Però, quan és lliure una partícula?; quan està prou allunyada de la resta de cossos. I quan és

suficient aquest allunyament?; quan la partícula té moviment rectilini i uniforme respecte d'un sistema inercial. El cercle viciós de la definició és obvi.

Es podria raonar, però, que l'experiment de la galleda de Newton que hem comentat abans posava de manifest efectes observables associats a l'acceleració absoluta (respecte del sistema inercial de les estrelles fixes). No obstant això, a finals del segle XIX i des d'un punt de vista més relativista, Ernst Mach va interpretar el resultat d'aquest experiment d'una altra manera: no és la rotació respecte d'un hipotètic sistema inercial (en relació amb el qual les estrelles fixes estarien casualment en repòs) la causa que la superfície de l'aigua de la galleda sigui cònca, sinó la rotació relativa a la mitjana de les masses de l'univers. En el nostre cas domina la presència de les estrelles fixes, però ningú no sap quin seria el resultat de l'experiment si la massa i el gruix de les parets de la galleda augmentessin fins que l'efecte d'aquests fos comparable al de les estrelles llunyanes.

Un fet aparentment inconnex amb aquest problema, que incideix però en la mateixa qüestió, és la igualtat de les masses inercial i gravitòria ( $m_i$  i  $m_g$ ). A començaments del segle (Eötvos, 1905), aquesta igualtat havia estat establerta amb una precisió de  $\frac{|m_g - m_i|}{m_i} \leq 10^{-9}$  i

actualment (1971) aquesta cota ha estat millorada per Braginski ( $\leq 10^{-12}$ ). Una igualtat numèrica tan manifesta no pot ser fruit d'una casualitat i ha de tenir alguna raó física, perquè la definició de les dues magnituds és ben diferent:  $m_i$  és la raó de la força agent a l'acceleració produïda, mentre que  $m_g$  és la càrrega amb la qual el cos s'acobla a un camp gravitatori.

Conseqüències importants d'aquesta igualtat són les següents:

i) Podem eliminar  $m_i$  i  $m_g$  de les equacions del moviment d'un cos sotmes a

un camp gravitatori únicament. Tots els cossos cauen amb la mateixa acceleració.

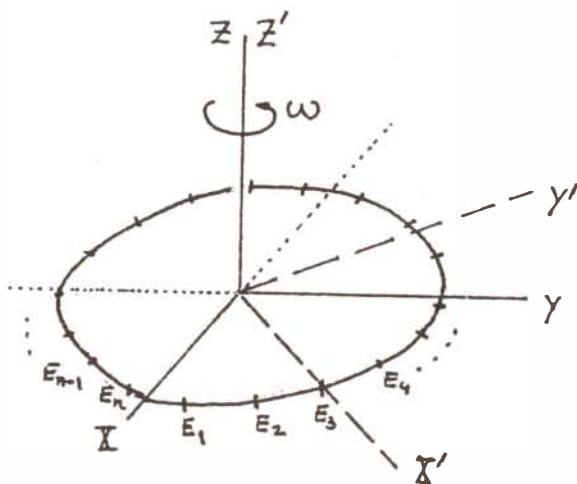
ii) El moviment d'un cos en un camp gravitatori uniforme no es pot distingir del moviment d'un cos lliure descrit per un referencial no inercial.

iii) En el si d'un camp gravitatori uniforme els cossos que estan sotmesos només a l'acció del camp es mouen amb moviment rectilini i uniforme respecte d'un sistema de referència en caiguda lliure.

Aquesta semblança dels efectes gravitacionals i els de la inèrcia dona peu a enunciar el *principi d'equivalència*: "En el si d'un camp gravitatori, per a cada lloc i instant, existeix un sistema de referència per al qual les lleis de la física tenen la mateixa forma que tindrien en un sistema inercial en absència de gravitació".

La conclusió que es desprèn del principi d'equivalència i de la inoperativitat de la definició de referencial inercial és que tots els observadors han de ser igualment bons. A partir d'aquí perdem bona part de l'estructura geomètrica de l'espai-temps  $m_M$  de la relativitat especial. Aquesta pressuposava l'existència d'uns referencials privilegiats, els inercials, cada un dels quals estava dotat d'un equip de rellotges estacionaris i sincronitzats que li permetien de mesurar el temps, i d'un espai de referència euclidià (i per tant també unes coordenades cartesianes amb un significat mètric senzill). Aquestes eines -espai de referència i equip de rellotges- i les seves propietats eren compatibles amb les transformacions de coordenades que relacionaven cada parella d'observadors inercials. A continuació veurem com són incompatibles amb transformacions més complicades.

Suposem que K és un observador dotat d'un espai de referència euclidià i d'un sistema de rellotges sincronitzats. Sigui K' un observador tal que el seu espai de referència gira amb velocitat angular W



al voltant de l'eix Z en relació amb K (els eixos Z i Z' coincideixen en tot moment). Veurem com suposar que la relació de simultaneïtat està ben definida a K' porta a inconsistència i, també, que la geometria euclidiana no val a l'espai de K:

Figura 4

Considerem una circumferència sobre el pla XY de l'espai de referència de K centrada en l'origen de coordenades. Per simetria, aquesta figura serà vista per K' també com una circumferència. Imaginem una seqüència d'esdeveniments  $E_1, E_2, \dots, E_n$  que ocorren sobre la circumferència i que els seus llocs respectius estan ordenats de manera que, segons el sentit de la rotació,  $E_1$  passa davant de  $E_2$ , aquest davant de  $E_3, \dots$  i  $E_n$  davant de  $E_1$ , tancant el cercle. Suposem que aquests esdeveniments són simultanis segons K'. En tal cas, com que  $E_1$  va per davant de  $E_2$  en el sentit del moviment, tindrem que segons K,  $E_1$  és anterior a  $E_2$ . Per la mateixa raó,  $E_2$  serà anterior a  $E_3$ , segons K, ... i per fi,  $E_n$  serà anterior a  $E_1$ . Per transitivitat arribarem a l'absurd:  $E_1$  és anterior a  $E_1$  segons K. La conclusió és que a K' no podem disposar d'una cadena tancada d'esdeveniments simultanis envoltant l'eix de rotació. En conseqüència, K' no pot disposar d'un equip de rellotges estacionaris sincronitzats en cada punt del seu espai.

Imaginem ara que cada observador vol mesurar la relació perímetre/diàmetre per a l'esmentada circumferència. K col·loca  $N_p$  regles patró sobre la perifèria i  $N_d$  sobre el diàmetre i obté  $N_p/N_d = \pi$ . Ara bé, quan K' col·loca les seves regles sobre la perifèria, K veu que aquestes estan afectades per la contracció relativista (factor  $\sqrt{1-v^2/c^2}$ ) a causa del seu moviment longitudinal i veu com K' necessita més regles patró  $N'_p > N_p$  per abraçar tot el perímetre. Aquesta contracció no afecta les regles que K' emprà per mesurar el diàmetre, ja que, segons K, es mouen transversalment, per tant,

$N'_d = N_d$ . En conseqüència, la relació que obté K' és:  $N'_p/N'_d > \pi$  i per tant, l'espai de K' no és euclidia.

Les conclusions d'això que hem comentat fins ara són les següents:

i) No hi ha referencials privilegiats *a priori* per descriure l'espai-temps  $m$ .

ii) Les coordenades que un observador assigna a un esdeveniment ja no tenen el significat mètric senzill que tenien en els models anteriors.

iii) Gràcies al principi d'equivalència,  $m$  serà un marc adequat per fer una teoria relativista de la gravitació.

iv) En cada lloc i instant (per a cada esdeveniment E de  $m$ ) el camp gravitatori assigna un *paper privilegiat* als observadors en caiguda lliure, els quals, en un entorn infinitesimal de E, descriuen la física de la manera "senzill" com ho faria un observador inercial en absència de gravitació.

Si en un d'aquests referencials les coordenades de E són  $(T, X, Y, Z)$  i  $(T + dT, X + dX, Y + dY, Z + dZ)$  són les d'un esdeveniment P infinitament proper, l'interval entre E i P és:

$$ds_{EP}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - c^2 dT^2,$$

però per a un referencial més general ja no tindrà aquesta expressió minkowskiana senzill, sinó:

$$ds_{EP}^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j,$$

on els coeficients  $g_{ij}$  són funcions de les coordenades de E.

Les funcions  $g_{ij}$  (tensor mètric) determinen completament l'estructura geomètrica de l'espai-temps  $m$ , entenent per aquesta:

i) les trajectòries de les partícules lliures (sotmeses només a un possible camp gravitatori) les quals tenen la propietat que l'interval entre dos punts qualssevol és mínim (se'n diuen *geodèsiques* i són una generalització de les trajectòries rectes de l'espai-temps  $m_M$ ), i

ii) el con de llum a cada punt de  $m$ , el qual té a nivell infinitesimal la mateixa

forma que a  $m_M$ .

A la teoria general de la relativitat (i a les altres teories geomètriques de la gravitació) la geometria de l'espai-temps depèn del seu contingut material a través de les equacions d'Einstein del camp gravitatori. En aquest punt queda parcialment recollida la intuïció de Mach (1883), que entenia que els sistemes de referència eren determinats per la matèria present a l'univers a gran escala, i també el que havia apuntat Riemann a la seva dissertació doctoral (1854) segons el qual potser calia pensar si la geometria de l'espai podia ser influïda per la matèria present.

Josep Llosa

#### Material de lectura

- 1.- Einstein, A., Gunbaum, A. et al.: *La teoria de la Relatividad* Alianza Universidad, n.º 62 (Madrid, 1973)
- 2.- Einstein, A. *The meaning of Relativity* Princeton University Press (Princeton, N.J., 1969)
- 3.- Mach, E.: *The Science of Mechanics* Open Court Publishing Company (La Salle, Ill., 1974)
- 4.- Sánchez-Ron, J.M.: *Relatividad Especial, Relatividad General (1905-1923): Orígenes, desarrollo y recepción por la comunidad científica* UAB-HEF-D1 I.C.E. Universitat Autònoma de Barcelona (Barcelona, 1981)
- 5.- Weyl, H.: *Space, Time and Matter* Dover Publishers Inc. (New York, N.Y., 1922)
- 6.- Ehlers, J.: *The Nature and Structure of Space-time* "Jornades d'homenatge a A. Einstein" publicat per l'Institut d'Estudis Catalans (Barcelona, 1981)

\* Tinguem en compte que aquest "mateix resultat" està condicionat tant per la precisió de les mesures de l'època com pel conjunt de fenòmens que pretenia descriure el marc de la dinàmica pre-relativista.