

5. Matemàtiques: a) El concepte de proximitat en matemàtiques, per Josep Guia (U. de València). b) Matemàtica i comunicació visual, per Claudi Alsina (UPB). A les classes van assistir una mitjana d'unes 30 a 35 persones, entre les quals hi havia enginyers, llicenciats en ciències, estudiants, però també gent amb formació humanística i, fins i tot, no universitària. Pels comentaris que es van fer en una de les darreres sessions sembla que tothom, en diferents graus, hi va treure el seu profit, per la qual cosa creiem que cal felicitar tots els professors i, en particular, el coordinador de la secció, Antoni Lloret, personalitat coneguda per tots els lectors de (ciència). En aquest petit debat entre professors i alumnes que, com ja he dit, va tenir lloc en una de les darreres sessions, es va posar de manifest la necessitat d'incrementar les pràctiques (ja siguin senzills experiments de laboratori o sortides al camp dirigides per un professor de biologia o de geologia), ja que a tothom li va interes-

sar molt les observacions amb telescopi fetes aquest any, en el transcurs de les quals vam poder veure i aprendre el nom dels astres més importants, des d'Andròmeda fins a la Lluna passant per Vega, Alcor i Júpiter amb un dels seus satèl·lits. En connexió amb el nom dels estels, un dels assistents va manifestar el seu interès que s'impartissin coneixements d'etimologia. També es va expressar el desig que es fes un curset sobre història de la ciència, sobre meteorologia, sobre informàtica, etc. És evident que en l'ambient flotaven les ganes de posar remei als defectes clàssics de l'educació en l'Estat espanyol, el principi dels quals és l'excés de teoria i l'escassetat de pràctiques, que porten a la dissociació de què fa poc ens parlava Peter Hilton en aquestes mateixes pàgines entre l'escola i el món exterior. El Dr. Giner-Sorolla, que des de la seva perspectiva americana no entenia com la universitat no era permanent (¿potser caldria fer una crida a la nostra burgesia perquè fes una contribució com la

que van fer els amos de la General Motors, Sloan i Kettering?), va remarcar que la nostra presència en el conjunt de la universitat era molt minsa: en qualsevol societat avançada la ciència hauria de constituir entre un 30 i un 40% de les seccions. Prada és una universitat oberta, la qual cosa vol dir que es pot entrar i sortir de classe quan es vol (amb discreció, és clar), curiosament en una secció diferent de l'habitual o en un dels debats que es fan a la tarda. Només a títol d'experiència personal citarem una classe de filosofia sobre l'altruisme a la qual vam assistir que, per la seva naturalesa participativa, no memorística, ens va fer lamentar la nostra escola (la de "los enemigos del hombre", "los reyes visigodos" i la llista interminable de noms de filòsofs i les seves doctrines). Entre els debats esmentarem el suscitat entorn del fenomen gai, per la preparació dels seus dirigents. Hem de dir que no vam poder assistir al convocat per les feministes ja que era exclusivament per a dones. En un altre dels debats, el

Dr. Sorolla, des d'una posició realista sobre les possibilitats d'una independència dels Països Catalans a curt terme, va invitar (citant exemples històrics) els catalans a participar més activament en diferents estaments de l'Estat espanyol, especialment en l'exercit i en l'administració.

Acabem, doncs, amb una decidida recomanació a tots els lectors de (ciència) a inscriure's en la propera edició de l'UCE. Això sí, porteu uns quants francs més per anar a sopar a fora de tant en tant, ja que el menjar al *lycée* de Prada és a anys llum de l'aliment espiritual que hi rebreu. Per altra banda, des de Les Antiquaires de Perpinyà fins a Can Planes de Sallagosa trobareu una bona dotzena de llocs on aprofundir (amb pràctiques incloses) en els vostres coneixements de gastronomia d'aquestes comarques de Catalunya Nord.

Nota: El telèfon dels Amics de l'UCE és el 254-5698.

( Jaume Puigbò )

# (jocs i entreteniments científics)

## MONEDES I BALANCES

### (CONCLUSIÓ)

per Josep M. Massó

Al número 19 de (ciència) vàrem presentar alguns problemes relacionats amb el pes de les monedes que havien de ser resolts amb un nombre limitat de pesades. Ara introduïrem en aquests problemes altres tipus de balances, que demanaran un tractament diferent.



Recordarem les dues definicions bàsiques que vàrem adoptar per simplicitat: mesuràvem la *indeterminació del sistema*, és a dir, del grup de monedes, pel nombre de solucions possibles; i la *informació* que proporcionava cada pesada, pel nombre de resultats que podia donar. Per als altres detalls remetem el lector al citat número 19, i aviseu que la numeració dels gràfics és continuació de la dels que apareixien allí.

Provem, doncs, de resoldre el primer dels problemes que vàrem deixar començats, que es presentava sota una forma que és potser la més corrent a la literatura d'aquest camp: donat un conjunt de dotze monedes, una de les quals pesa diferent de les altres

(en més o en menys), es demana detectar-la en tres pesades d'una balança de dos plats sense escala, és a dir, una balança que pot donar només tres resultats.

Sabem, per aplicació de la fórmula (1) de l'article anterior, que la solució és possible, ja que  $3^3 = 27 > 2(12 + 1) = 26$  (i no 25 com va aparèixer per error, que suposem descobert pel lector. També esperem que fos advertit que el *bit* és el logaritme de 2 en base 2, i no en base 1, el que no tindria sentit).

Dividirem les monedes en tres grups iguals, anomenant-les  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4$ . Després compararem el pes dels grups  $a_i$  i  $b_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Si els pesos s'equilibren, és clar que aquestes monedes són totes

bones, i la dolenta estarà entre les  $c_i$ . Això redueix el problema a trobar la dolenta entre quatre, amb l'ajuda d'una altra moneda auxiliar que sabem que és bona (que podrem agafar d'entre les vuit primeres), i aquest és un problema que ja sabem resoldre (vegeu fig. 3). Si l'equilibri no es dona, podem suposar, sense perdre generalitat, que les monedes  $a_i$  pesen més que les  $b_i$ . La situació serà aquesta: hi ha quatre monedes bones ( $c_i$ ) i, de les altres vuit, sabem que, si la dolenta és una  $a_i$ , ho serà per excés de pes, i, si és una  $b_i$ , ho serà per defecte. La *indeterminació* és de  $8 \times 1 = 8$  i la *informació* restant, de  $3^2 = 9$  (dues pesades); veiem, doncs, que tenim prou informació, si sabem (o podem) utilitzar-la.

Separem les monedes  $a_1, a_4$  i  $b_4$ , que no entraran de moment en la investigació. (Si arriba el cas, sabrem trobar la dolenta entre elles, ja que és un problema anàleg al de la figura 1). Afegim al grup  $a_i$  una moneda  $c_i$ , per tal que en tingui tres, com l'altre grup, i a més (aquesta és la felicitat ideal!), intercanviem  $a_4$  amb  $b_1$ . Podem ara comparar  $A = b_1 + a_3 + c_1$  amb  $B = a_1 + b_2 + b_3$  i obtindrem un dels tres resultats il·lustrats a la figura 5:

a) equilibri: vol dir que la dolenta estava entre les tres que hem apartat ( $a_1, a_3, b_1$ ).

b) el plat que contenia inicialment les  $a_i$  pesa ara menys: significa que una de les dues que hem intercanviat era la dolenta ( $a_1, b_1$ ).

c) el plat de les  $a_i$  segueix pesant

més: res del que hem fet no ha modificat la situació inicial; és a dir, la moneda dolenta és una de les que no s'han mogut ( $a_2, b_2, b_3$ ).

També en aquesta ocasió veiem que queda buit un dels terminals, que correspon a un final impossible, el qual equival a l'excés d'informació.

## I LA DOTZENA DE FRARE?

Haviem vist també que, segons la fórmula (1), no era possible resoldre el cas de 13 monedes, però ens demanàvem si podríem arribar-hi amb l'ajuda d'una catorzena moneda (bona), que simbolitzarem per  $k$ .

Anomenem les monedes sospitoses  $a_1, a_2, \dots, a_i, b_1, \dots, b_j, c_1, \dots, c_k$ , i pesem  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$  contra  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k$ . Si trobem equilibri, la dolenta està entre les  $c_i$ , i no hi ha cap diferència amb el cas de dotze monedes que ja hem vist. Si el plat de les  $a_i$  pesa més (l'altre cas és simètric), separarem  $a_1, a_2, a_3$ , i passarem  $a_4$  i  $a_5$  a l'altre plat, compensant-les per  $b_1$  i  $k$ , i per una  $c_i$ . Comparem ara el pes de  $A = a_1 + b_1 + c_1 + k$  i el de  $B = a_4 + a_5 + b_2 + b_3$ . La resta de la solució pot seguir-se a la figura 6.

Hem pogut veure que l'expressió (1) és una fórmula *técnica* que ens dona les condicions efectives del problema en el cas normal, tenint en compte les limitacions físiques de les pesades. Quan hi ha condicions addicionals, però, és útil referir el problema a les mesures d'*indeterminació* i *informació*, que marquen límits absoluts a la possibilitat de resolució.

## AQUELLA MICA D'ORDRE

L'altre problema que vàrem deixar a mig resoldre ens demanava ordenar pel seu pes set monedes en cinc pesades. Haviem fet ja quatre pesades, i havíem arribat a aquesta situació:

$$\begin{aligned} a_1 &> a_4 \\ a_1 &> a_2 > a_3 \\ a_2 &> a_5 \end{aligned}$$

Compararem ara  $a_1$  i  $a_3$ , i obtindrem un d'aquests resultats:

$$a_1 > a_3 > a_5 > a_4 \quad (3)$$

o bé

$$a_1 > a_5 > a_4 > a_3$$

Ens queda només intercalar  $a_2$ , i sabem que ocuparà un lloc a la dreta de  $a_1$ . Suposem que ens tro-

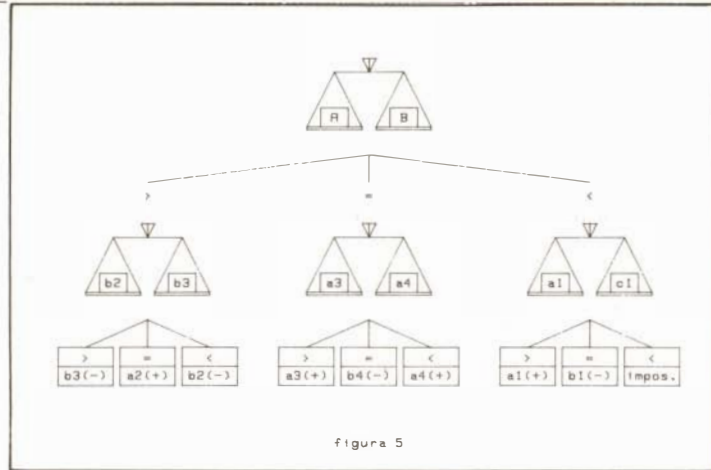


figura 5

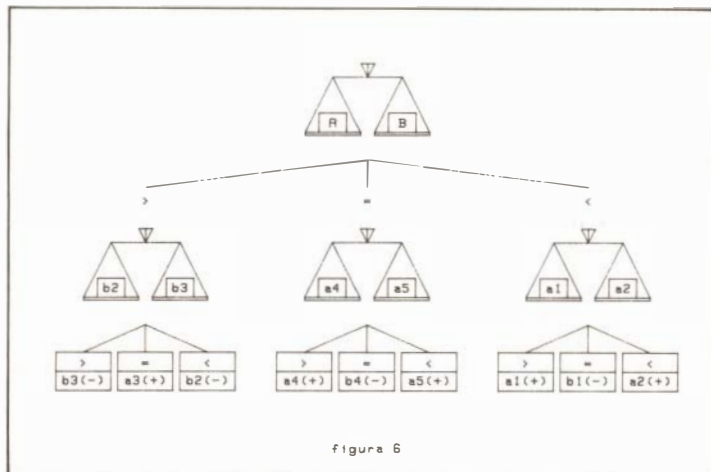


figura 6

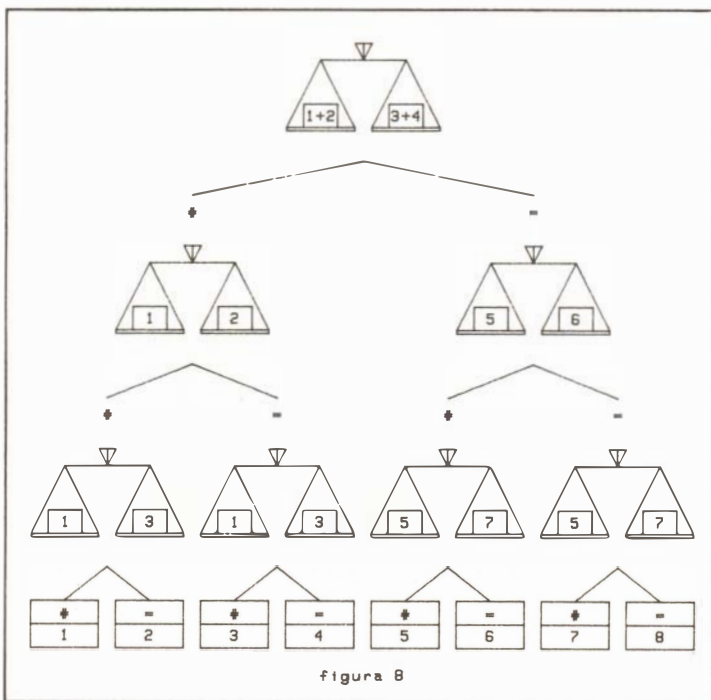


figura 8

bem en el cas (3), la primera sèrie de desigualtats. Compararem  $a_4$  amb  $a_1$  i després, segons el resultat obtingut, amb  $a_2$  o  $a_3$ : així trobarem el seu lloc definitiu.

L'única precaució que hem de tenir és fer les comparacions de forma que ens permetin utilitzar el màxim d'informació. El lector podrà observar que pesar  $a_4$  amb  $a_1$  (3) pot portar a situacions on la informació restant sigui insuficient.

## ALTRES TEMPS, ALTRES BALANCES

Fins aquí hem tractat exclusivament amb balances de dos plats i sense escala, que ens hem imaginat amb braços iguals i plats sospesos dels extrems d'aquests braços: un dels tipus més antics de balances. Però és clar que tot el que s'ha dit fins ara pot aplicar-se

1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
4	1	0	0
5	1	0	1
6	1	1	0
7	1	1	1
8	0	0	0

figura 7

igualment a la balança de plats muntats sobre el braç, dita de Roberval (científic que va inventar el mecanisme el segle XVII), que podíem veure fins no fa gaire a les botigues. Encara que la desviació de l'agulla podria indicar la diferència de pes, la pràctica consistia a equilibrar la balança col·locant a l'altre plat els pesos necessaris.

Però un bon dia, la balança automàtica, ja pensada (inevitablement!) per Leonardo da Vinci, fa la seva aparició a les botigues, i les Roberval s'amaguen sota el taulell. La balança automàtica, amb el seu contrapes fix, no necessita el segon plat i substitueix l'equilibri de contrapesos per una escala ampliada i vistosa. També aquesta balança dona origen a alguns problemes del tipus que comentem, tal com el que presentem a continuació, abandonant un moment les monedes per donar-lo en la versió en què el vàrem recollir, fa ja una colla d'anys:

Tenim 10 caps de formatgetes, deu a cada caps. Cada formatget pesa 10 grams, excepte els d'una caps, que pesen diferent, amb una desviació d'un gram (en més o en menys). Es demana trobar la caps defectuosa en una sola pesada. La versió original deia que els formatgetes diferents pesaven 11 grams, però el mètode de solució, que donem al final, detecta la diferència per excés i per defecte.

No cal dir que aquestes balances són, pels efectes que estudiem, equivalents a les de molla i a qualsevol altra d'un sol plat i escala (bàscules, romanes, etc.). Tornarem a parlar-ne, però de moment presentem-ne un nou tipus, probablement imaginari (almenys en aquesta forma simple): una balança de dos plats que no fa més que delatar la presència o absència d'equilibri; per aquesta característica la denominarem *binària* i, en aquest sentit, podem dir que la informació que en traiem conté només zeros (equilibri) i uns (desequilibri).

Provem, amb una balança així, de solucionar el següent problema, variació del que va ser resolt per C. Michael Melas a la "Revue Française de Recherche Opéra-



tionnelle", n.º 38: descobrir quina és la peça que pesa diferent en un grup de vuit (set en el problema original), mitjançant tres d'aquestes pesades binàries.

A desafiament binari, oposarem resposta binària, i escriurem els números 1 a 8 en base 2 (vegeu figura 7. Cal observar que al número 8 li correspon el 1.000 en base 2, però només fem aparèixer els tres zeros finals). Cada una de les tres columnes servirà per formar una pesada, prenent només les peces que hi tenen un 1, col·locant-ne dues a cada plat, i anotant com a resultat de l'operació zero si es produeix equilibri, i 1 en cas contrari. En acabar les tres pesades, els tres resultats ens determinaran de forma unívoca un nombre binari que correspondrà a la moneda de pes diferent, que ha estat la causa de la combi-

nació d'equilibris/desequilibris registrada.

## UN REPERTORI DE ZEROS I UNS

Resulta fàcil veure que aquest problema podia també ser resolt amb un procediment anàleg al que hem utilitzat amb les balances de dos plats (vegeu fig. 8), però la transformació binària ens ha servit per introduir aquest nou mètode, que ara podrem aplicar al següent cas:

Amb tres pesades d'una balança d'un sol plat amb escala, trobar la moneda més pesant que les altres (dins d'un grup de set).

Passem a base 2 els números 1 a 7 (vegeu fig. 7, ignorant la darrera fila). Farem les tres pesades pre-

nent per a cada una les monedes que tenen un 1 a la columna corresponent dels nombres binaris, és a dir, per a la primera pesada, les monedes 4, 5, 6 i 7; per a la segona, les 2, 3, 6 i 7, i per a la tercera, les 1, 3, 5 i 7. Registrem els resultats de les pesades assignant un 1 al pes major i un 0 al menor, i adjudicant la combinació 1, 1, 1 al cas de tres pesades iguals (veiem per què no podem ampliar la solució a vuit monedes: seriem incapaços de diferenciar 000 de 111, perquè no tenim punt de referència).

El resultat de les tres pesades ens dona un nombre binari, que correspon al de la moneda defectuosa.

Abans d'acabar, donem el resultat del problema dels formatgets: pesarem junts un de la primera capsa, dos de la segona...

deu de la desena. Si tots pesessin igual, el pes total seria de  $10 + 20 + 30 + \dots + 100 = 550$  grams. La desviació en grams (en més o en menys) ens dona el número de la capsa defectuosa.

Finalment, per als lectors que vulguin dedicar-hi la seva atenció, proposem un problema que es deu al matemàtic francès Claude Berge:

"Disposem d'una balança de molla, molt sensible, i d'un lot de 31 peces, entre les quals n'hi ha 30 de bones i una de dolenta. Se sap que la dolenta té un pes diferent del de les bones, però no se sap si és més pesant o més lleugera. Es pot descobrir la dolenta amb tan sols cinc pesades?"

( Josep M. Massó i Aguiló )

# ( lectures )

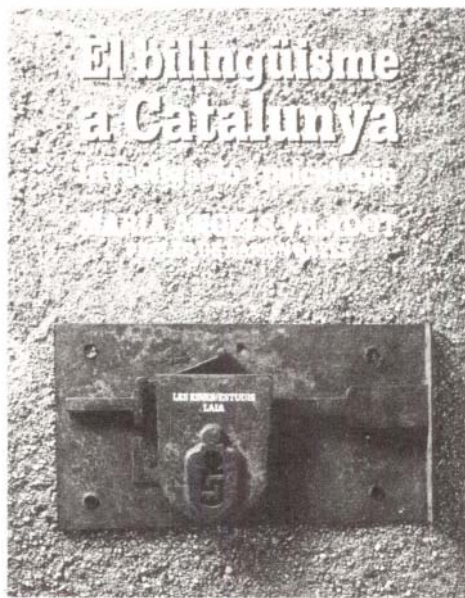
## SOBRE EL BILINGÜISME A CATALUNYA

VILADOT, A., 1982, *EL BILINGÜISME A CATALUNYA. INVESTIGACIÓ I PSICOLOGIA*. Laia, Barcelona, 1982.

● La publicació d'aquest treball, que va mereixer el dinovè premi Martí i Julià de l'Institut d'Estudis Catalans, és un encert i una satisfacció per als qui ens dediquem, d'una forma o altra, a la psicolingüística o al llenguatge. És un dels primers exponents de treball rigorós que es comença a fer en les nostres facultats, on amb les dificultats per tots conegudes i sense una tradició de psicologia experimental es duen a terme projectes de gran mèrit i bon nivell.

Deixant a part la tasca de Pere Barnils (de qui aquest any hauríem de celebrar el centenari) al nostre país, l'única tradició està en la vessant pedagògica del llenguatge, i per tant costa, i encara costarà, que pugui apreciar-se en el que val la investigació de base. I això encara és més clar en un àmbit com el bilingüisme, tan punyent però alhora tan esmunyedit a qualsevol control i predicció. Tots voldríem poder respondre preguntes tan simples com quin és l'efecte dels diferents bilingüismes en el llenguatge i el pensament de la persona. Malauradament, els mètodes dels quals disposa la psicologia sols ens permeten anar molt més lentament del que la societat ens demana.

El llibre que comentem, tant en la informació que ofereix com en el seu objectiu de recerca, palesa i ofereix alguna solució en la manca d'índex i mesures que hi ha i que permetin identificar el grau, tipus i ús de llengües per tal de, posteriorment, poder anar més a fons en l'estudi de les



condicions d'aprenentatge, tant socials com neuropsicològiques. La doble vessant informativa i de recerca d'índex i mesures d'aquest llibre ha de ser coneguda pel lector, altrament l'obra podria ser menystinguda. Cadascuna de les seves parts compleix una funció diferent i important, i requereix una lectura especial. En la primera s'agraeix la síntesi actual de les diferents recerques tot tenint en compte els diversos objectius socials, pedagògics o psicolingüístics. Serà de gran utilitat per a qui vulgui una revisió ràpida. Sabem que l'autora avui hi afegiria alguns treballs nous, cosa que ja fa en la seva tesi a punt d'enllestir. En la segona part, ens presenta la validació d'unes mesures per tal de determinar el

tipus de bilingüisme arran de les hipòtesis de Weinreich i d'Osgood, repeses per Garcia Sevilla, on es posa en relació el grau i ús (competència?) de llengua i reacció de temps en tasques d'associació de mots (en i entre les dues llengües). També, i seguint Lambert, estudia el grau de dominança, o tipus de relació entre les llengües mitjançant un índex de verbalització (nombre de mots associats en temps fix), de canvis de llengua i de traduccions. Per tal de tenir una validació externa d'aquestes dades, va fer un qüestionari molt complet sobre l'activitat verbal ( escoltar, parlar, llegir i escriure ) en diverses situacions. Així ha sigut possible establir grups i observar la seva relació amb els índexs. En els resultats ha trobat que tant la reacció de temps com l'índex d'associació donaven correlacions ben significatives amb els grups ( català, intermedi i castellà ), i es mostren com a bones les mesures de dominança. Finalment, els canvis de llengua i les traduccions que van fer els subjectes han fet pensar a l'experimentadora que la mostra amb la qual ha treballat té un tipus de bilingüisme compost de diferent grau de dominança d'una llengua envers l'altra. No crec que sigui oportú aquí assenyalar alguns dels límits del treball que comentem, ja que quasi tots, com el del nombre de subjectes, són aliens del tot a la intenció de l'autora. Valgui, doncs, aquesta ressenya per donar a conèixer des de (ciència) un treball i una àrea de recerca que sortosament cada dia va tenint més embranzida en el nostre país.

( Miquel Serra i Raventós )