

LA TEORIA DE LES

per Josep Ferrer

34 (666/Volum 2/novembre 1982

CIÈNCIA 21)

La teoria de catàstrofes proporciona models matemàtics simples per a fenòmens discontinus ("catastròfics"), en àmbits molt diversos. Els models essencials són les dites "set catàstrofes elementals", presentades per R. Thom a principi de la dècada dels 60.

Jospe Ferrer i Llop (Barcelona, 1949) és enginyer industrial per l'ETSEIB de la Universitat Politècnica de Barcelona des de l'any 1971. És professor del departament de Matemàtiques I de l'ETSEIB. Ha fet nombrosos cursos, notablement aquest any un curs de doctorat sobre teoria de catàstrofes.

Probablement la teoria de catàstrofes sigui una de les teories matemàtiques que més expectació ha despertat en el món no matemàtic. N'assenyalem dos elements demostratius: — en la dècada dels 70 s'han fet centenars d'aplicacions en molt diverses disciplines: mecànica, economia, sociologia, filosofia, lingüística,...

— paral·lelament, s'ha desfermat una intensa polèmica en què els detractors de la teoria ataquen el seu contingut matemàtic, i sobretot el valor de les aplicacions fetes (falta de fonamentació, inutilitat, etc.)

Un enunciat sensacionalista del seu principal resultat podria ser el següent:

"Tot fenomen catastròfic natural, dependent de quatre o menys paràmetres, es regeix essencialment per les set catàstrofes elementals".

O també:

"Essencialment, només hi ha set catàstrofes naturals possibles, si ens limitem a fenòmens dependents de quatre o menys variables".

Si tenim present que les fórmules de les set catàstrofes elementals són ben senzilles ($x^3 + tx$, $x^4 + sx^2 + tx$,...) són palesos els elements que justifiquen la referida expectació:

1) possibilitat d'aplicació a fenòmens discontinus (o catastròfics).

2) simplicitat i claredat dels models matemàtics.

3) àmbit universal d'aplicació.

Obviament, cal precisar i matisar els anteriors enunciat, cosa que farem en els successius apartats. Tot i que un d'ells està dedicat a precisar el sentit de "fenomen catastròfic", cal assenyalar d'antuvi que, en el marc d'aquesta teoria, una "catàstrofe" no és una calamitat, sinó una discontinuïtat, és a dir, un canvi gran en els efectes provocat per una lleugera variació de les causes.

El creador de la teoria, a principi de la dècada dels 60, és el matemàtic francès René Thom,⁴ a qui l'any 1958 li havia estat concedida la medalla Fields, equivalent al premi Nobel en l'àrea de les matemàtiques. Els últims apartats contenen una sinopsi històrica, el punt de vista original del creador (actualment minoritari) i la controvèrsia suscitada.

El primer apartat és un exemple, degut a Zeeman,⁶ il·lustratiu de la forma d'utilització de la teoria de catàstrofes.

UN EXEMPLE: UN MODEL PER AL FUNCIONAMENT DEL COR

Naturalment, no es tracta de fer aportacions a l'estudi del comportament del cor, sinó de representar alguns fenòmens coneguts mitjançant catàstrofes elementals (la *cúspide*, en aquest cas). És clar que el funcionament normal del ventricle és discontinu: té essencialment dos estats possibles (sístole i diàstole), i passa alternativament de l'un a l'altre de forma brusca.

Dos paràmetres són essencials en la regulació del seu funcionament: els impulsos

nerviosos que l'exciten i la pressió intraventricular de la sang. Així, l'acció de bombeig desapareix si aquesta és massa alta o massa baixa; però en el primer cas el bombeig pot restituir-se variant l'excitació nerviosa, mentre que per a pressions baixes no hi ha aquesta possibilitat de recuperació. És, doncs, una típica situació d'aplicació de la teoria de catàstrofes: funcionament discontinu, dos paràmetres de control. Veurem, en efecte, que la cúspide (Fig. 1) representa adequadament la incidència d'aquests dos paràmetres. En la figura, l'estat ventricular es representa verticalment mitjançant l'adopció com a cota vertical de la llargària d'una fibra muscular: cotes elevades corresponen a la fibra en repòs (diàstole); cotes petites, a la contracció (sístole). En els eixos horitzontals es representa l'excitació nerviosa u sobre la fibra, i la pressió intraventricular p , essent u_0 i p_0 els valors normals de referència. Per a cada punt del pla horitzontal (és a dir, per a cada parell de valors de u i de p), els possibles estats de la fibra són representats pels punts de la superfície situats en la vertical corresponent (tret dels del full intermedi del plec, que representen estats inestables que no considerem). Així:

—per a (u_0 , p_0) l'únic estat possible és P_1 (diàstole)

—per a (u_4 , p_0) l'únic estat possible és P_6 (sístole)

—per a (u_2 , p_0) són possibles P_3 (diàstole) i P_7 (sístole)

La figura 2 representa en primer lloc el cicle donat pel model en funcionament normal: mantenint la pressió p_0 , un impuls nerviós fa passar l'excitació de u_0 a u_4 , per immediatament retornar a u_0 en desaparèixer l'impuls. L'augment de l'excitació provoca inicialment un lleuger escurçament de la fibra (de P_1 a P_2 , P_3 i

CATÀSTROFES

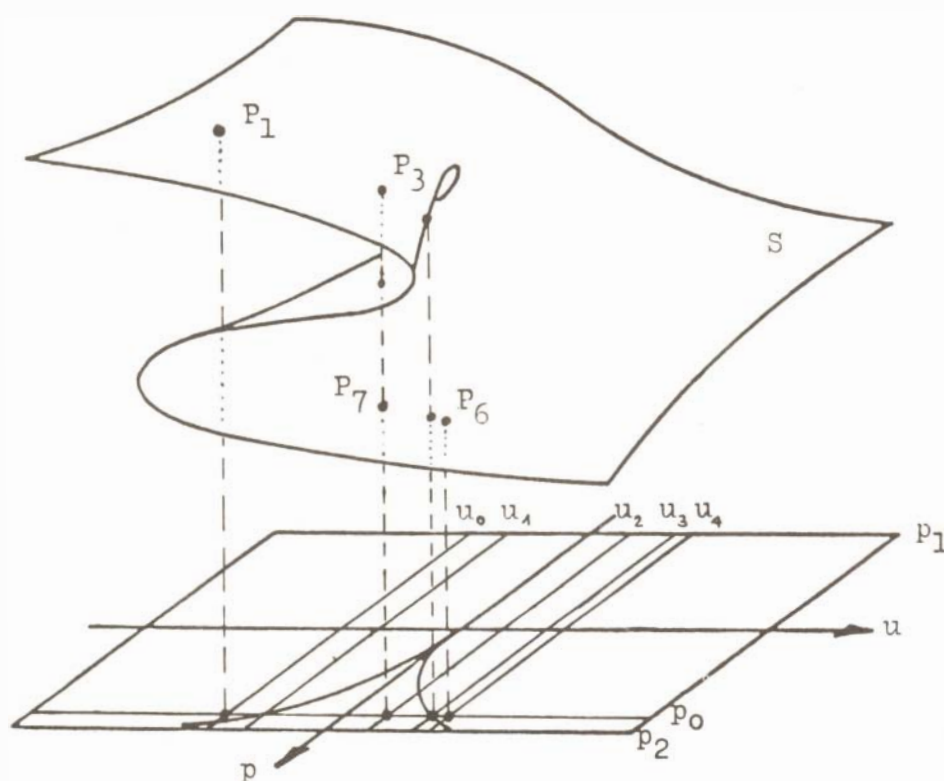
Fig. 1.— Representació gràfica de la cúspide, catàstrofe elemental que es presenta en fenòmens dependents de dos paràmetres. En el model del funcionament del cor, els paràmetres de control són l'excitació nerviosa (u) i la pressió intraventricular (p), i la cota vertical (x) és la llargària d'una fibra ventricular (variable d'estat). Considerant la família de funcions potencials parametritzada per p i u :

$$f_{p,u}(x) = x^4 - px^2 + ux$$

la superfície representada és la de punts d'equilibri

$$S = \{(x;p,u) \mid f_{p,u}(x) = 0\}$$

(on ' designa derivació respecte a x).



P_4), tot mantenint l'estat diastòlic, fins que en superar l'excitació u_3 passa bruscament a P_1 (sístole), és a dir, es produeix la contracció ràpida de la fibra; posteriorment, la fibra es contrau encara una mica més, fins a P_6 . En cessar l'impuls addicional i disminuir l'excitació, la fibra inicia la distensió; però la sístole no cessa en el valor u_3 on havia començat, sinó que es manté al llarg de P_5 , P_7 i P_8 , fins a l'excitació u_1 on es produeix el pas brusc a l'estat de diàstole en P_2 . Finalment, una distensió addicional retorna la fibra a l'estat P_1 de repòs.

Una primera anomalia de funcionament es pot observar immediatament sobre el model: l'efecte de bombeig desapareix si l'impuls nerviós és insuficient. En efecte, si l'excitació augmenta només fins a u_2 , no provoca la contracció sistòlica.

Igualment queden ben representades les anomalies esmentades abans (Fig. 2). Si

la pressió intraventricular és baixa, com p_1 , tot i que l'impuls nerviós sigui normal, es produeix el cicle $P_1' - P_2' - P_1'$, sense efecte de bombeig. És clar que no pot provocar-se augmentant l'impuls nerviós. Al contrari, una pressió excessiva, com p_2 , dona un cicle $P_1'' - P_2'' - P_1''$, també sense bombeig; però ara aquest pot restituir-se amb un augment adequat de l'impuls nerviós...

Altres anomalies queden també reflectides en el model, com per exemple les derivades de fluctuacions en l'excitació u_0 de referència.

FENÒMENS CATASTRÒFICS

L'exemple que acabem d'examinar presenta les propietats típiques dels fenò-

mens als quals s'aplica la teoria de catàstrofes. Es distingeixen dos grups de variables:

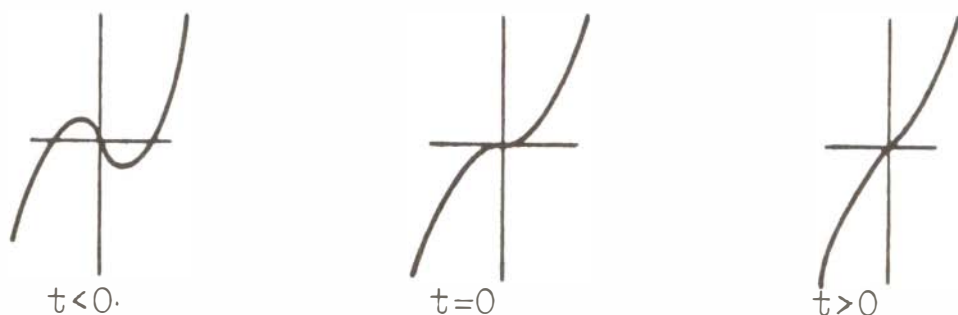
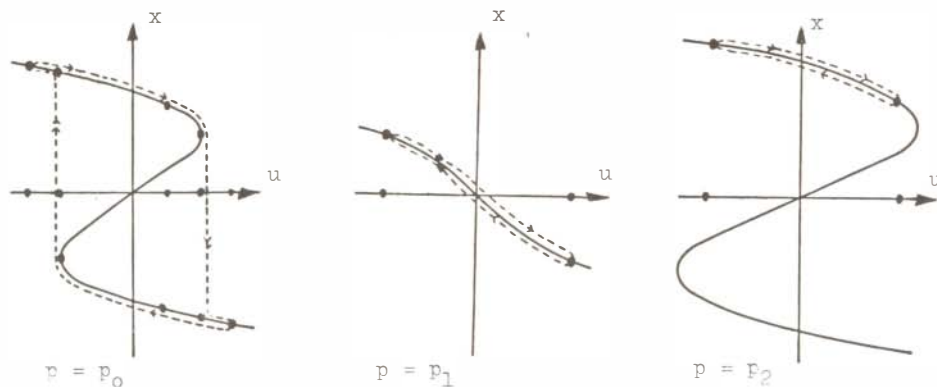
—les *variables internes, o d'estat*, que defineixen l'estat efectiu del sistema: la llargària de la fibra ventricular.

—les *variables externes, o de control*, sobre les quals és possible una acció directa, i que en certa manera controlen el sistema: l'excitació nerviosa, la pressió intraventricular.

Per a un valor determinat de les variables de control, poden ser possibles diversos estats. A l'exemple anterior, un per a (u_0 , p_0), però dos per a (u_3 , p_0). Característica essencial dels fenòmens catastròfics és que, com a l'exemple anterior, *el nombre d'estats possibles varia segons els valors de les variables de control*.

Per fixar les idees, suposem que es compleix l'anomenada "convenció del màxim retard": en variar les variables de control, el sistema tendeix a una mínima variació de l'estat. A l'exemple anterior, en passar de (u_0 , p_0) a (u_2 , p_0) es manté l'estat diastòlic, tot i que per a aquests valors de control l'estat sistòlic és també possible; el pas a sístole es retarda tant com és possible: fins a (u_3 , p_0). Igualment, un cop produïda la sístole, aquesta es manté mentre és possible, fins a excitacions molt inferiors a la que l'havien provocat. En aquesta situació, un canvi brusc d'un estat a un altre es produirà només quan "desaparegui" el primer. És a dir, precisament en els punts de control on varia el nombre d'estats possibles, anomenats *punts de bifurcació*. A l'exemple anterior, el conjunt de bifurcació és la corba dibuixada en el pla de control de la fig. 1. Un tal canvi sobtat en l'estat, provocat per una lleugera variació de les variables de control, és el que s'anomena una *catàstrofe*. Ben entès, com dèiem a la introducció, que en general no té per què ser calamitosa, tot i que, efectivament, les catàstrofes en sentit habitual acostumen a comportar canvis sobtats en l'estat del sistema.

Més en general, es consideren punts de bifurcació aquells en els quals es produeixen canvis qualitius en el conjunt d'es-



tats possibles, bé sigui en el nombre, bé sigui en la qualitat (estable o inestable, etc.).

Es clar que els fenòmens catastròfics són ben diferents dels que clàssicament eren objecte d'aplicació de les matemàtiques. En efecte, en els fenòmens tradicionalment considerats, per a cada valor de les variables de control hi ha un sol valor possible de les variables d'estat (o, com a molt, un nombre constant), i petites variacions de les primeres provoquen variacions també petites d'aquestes. En definitiva, es tracta de models continus, on la relació control/estat es representa per una funció contínua (generalment diferenciable, analítica, etc.).

UNIVERSALITAT DE LA TEORIA

Però, si com dèiem al principi, la possibilitat d'estudiar fenòmens discontinus i la simplicitat dels models són motius d'interès de la teoria, potser la seva característica més sorprenent sigui la universalitat. Característica que és la que fa

desvetllar, ahora, més interès i més mal-fiança. En efecte, el model de l'exemple anterior, la cúspide, s'aplica també a molts altres fenòmens, com la flexió d'una biga carregada, o el comportament d'un gos⁶. En el primer cas, sobre l'eix vertical es representa la fletxa de la biga, i sobre els horitzontals, la càrrega que suporta i la desviació del punt d'aplicació d'aquesta respecte al centre de la biga. En el segon cas, sobre l'eix vertical es representa la variable d'estat "actitud" (variant de la fugida fins a l'atac), i sobre les bisectrius dels eixos horitzontals les variables de control "por" i "ràbia". El model reflecteix, per exemple, que:

- ràbia, sense por, comporta necessàriament atac.
- por, sense ràbia, comporta necessàriament fugida.
- por i ràbia simultàniament possibiliten les dues actituds, que es poden canviar sobtadament de l'una a l'altra per lleugeres variacions dels estímuls.

Aquesta coincidència de models per a fenòmens ben diferents no és una casualitat, sinó un aspecte de la referida universalitat de la teoria de catàstrofes. En efecte, els exemples presentats tenen la característica comuna de dependre de

dues variables de control. I, reprenent els enunciats de la introducció, la teoria de catàstrofes afirma que la cúspide representa qualitativament qualsevol fenomen catastròfic natural dependent de dos paràmetres, en qualsevol àmbit (mecànica, biologia, sociologia, etc.).

Tanmateix, per tal de palesar el sensacionalisme d'aquesta mena d'enunciats, cal dir immediatament les hipòtesis que implícitament comporten.

ESTABILITAT ESTRUCTURAL I MINIMITZACIÓ DE POTENCIALS

Aquestes hipòtesis són essencialment dues:

- a) Els fenòmens que efectivament es donen a la natura són tals que *el conjunt de les configuracions possibles és "estructuralment estable"*. Això implica que el seu comportament qualitatiu control/estat no resulta alterat per petites fluctuacions o desviacions d'altres paràmetres.
- b) Els fenòmens naturals evolucionen es-

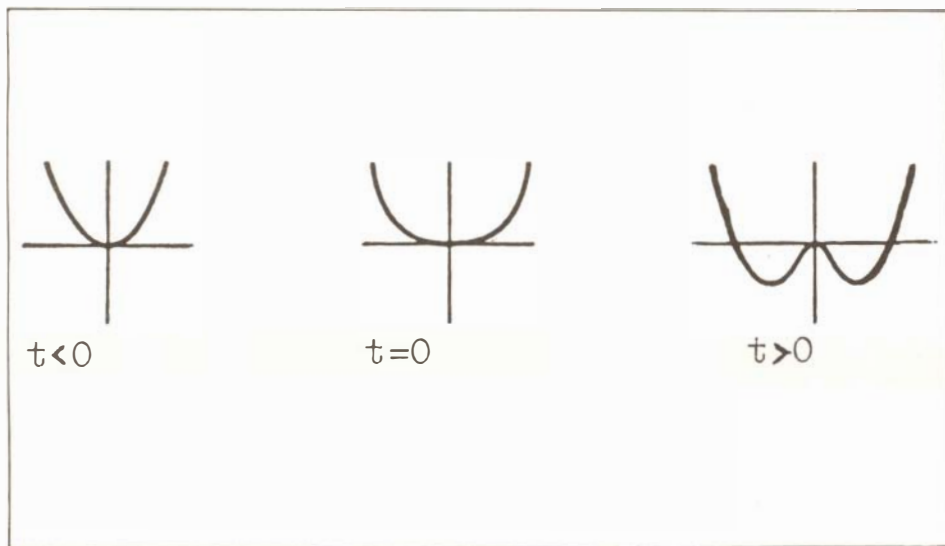


Fig. 2.- Cicles de funcionament del ventricle per a diferents valors de la pressió intraventricular (Fig. 1).

Fig. 3.- Grafiques, per a diferents valors de t , de la familia parametrizada de funcions potencials: $f_t(x) = x^3 + tx$.

Fig. 4.- Grafiques, per a diferents valors de t , de la familia parametrizada de funcions potencials: $f_t(x) = x^4 - tx^2$.

combinen diverses.

3) Les referides resulten de considerar iguals les qualitativament equivalents. Així, es considera plegament la $4x^3 + 5tx$ i altres

(Vegeu, per exemple, ², com a introducció general i recull d'aplicacions.)

SINOPSI HISTÒRICA

Referirem a la introducció l'expectació que sobre la teoria de catàstrofes va haver-hi al principi de la dècada dels 60, quan va anunciar-la el seu creador, R. Thom.

Durant aquesta dècada, l'atenció va centrar-se essencialment en dos aspectes. D'una banda, en els continguts matemàtics de la teoria, per tal de precisar les formulacions i les demostracions dels anuncis inicials. D'una altra, en les aplicacions que el mateix R. Thom feia (principalment en l'embriologia i la lingüística) emprant un punt de vista fenomenològic que serà comentat en el pròxim apartat.

En el primer aspecte, Malgrange, Mather i altres van fer avenços importants en l'estudi de les singularitats reals, de forma que al final de la dècada es disposava d'una teoria matemàtica de la teoria de catàstrofes. El seu aprofundiment i generalització continuen avui dia.

Per contra, i en relació amb el segon aspecte assenyalat, el mateix R. Thom reconeix no haver reeixit en el seu intent d'incorporar la teoria de catàstrofes com a eina habitual de la bioquímica, la lingüística, la filosofia, etc., disciplines en les quals preveia les aplicacions més interessants. En general, no ha aconseguit popularitzar el seu punt de vista fenomenològic de les aplicacions.

En canvi, durant la dècada dels 70 es produeix una extraordinària proliferació de les seves aplicacions a ciències físiques (hidrodinàmica, elasticitat, termodinàmica, etc.) i humanes (economia, sociologia, etc.) des d'un punt de vista sistematològic, en el qual domina la visió control/estat de la teoria de sistemes. El seu principal impulsor ha estat E.C. Zeeman.

pontàniament tendint a *minimitzar una certa "funció potencial"*, és a dir, els seus estats possibles corresponen a mínims relatius d'aquesta funció. Per exemple, en molt fenòmens mecànics les configuracions d'equilibri estable corresponen a mínims relatius de l'energia total.

Les afirmacions de l'apartat anterior sobre la universalitat de la teoria són vàlides mentre es compleixin aquestes hipòtesis.

Vegem quins són els enuncis matemàtics de la teoria de catàstrofes, al marge de les anteriors hipòtesis d'aplicació.

L'ENUNCIAT MATEMÀTIC

Considerem, per exemple, el cas de fenòmens dependents d'un sol paràmetre de control, que per a una millor comprensió suposarem el temps. Des d'un punt de vista matemàtic, la teoria de catàstrofes tracta de determinar quines són les evolucions estructuralment estables, entre totes les que comporten variacions en el nombre o la qualitat dels mínims relatius d'una funció potencial (sense fer distinció entre les evolucions qualitativament equivalents). La conclusió és que: "entre les evolucions temporals catastròfiques d'una funció potencial, qualitativament n'hi ha només una d'estructuralment estable, que és la donada per la fórmula $x^3 + tx$ ".

Es l'anomenat *plegament*, i representa la desaparició d'un mínim relatiu per a $t = 0$ (Fig. 3).

Així, no és estructuralment estable la $x^4 - tx^2$, que presenta la bifurcació, per a $t = 0$, d'un mínim relatiu en dos (Fig. 4). És a partir d'aquest resultat, i de les dues hipòtesis de l'apartat anterior, que s'obté el corresponent enunciat sensacionalista:

"l'única catàstrofe natural dependent d'un paràmetre és el plegament"; o "tot fenomen catastròfic natural que depengui d'un sol paràmetre respon al model del plegament".

LES SET CATÀSTROFES ELEMENTALS

És en aquest sentit que es pot afirmar que la teoria de catàstrofes demostra que, per a quatre o menys paràmetres de control, les catàstrofes possibles són set, tal com presentem a la següent taula:

paràmetres de control	catàstrofes possibles
1	1 (plegament)
2	2 (anterior, més cúspide)
3	5 (anterior, més cua d'ocell, umbilical el·líptic, umbilical hiperbòlic)
4	7 (anteriors, més papallona, umbilical parabòlic)

Aquestes són les famoses "set catàstrofes elementals", les presentades inicialment per R. Thom, que prenien com a paràmetres de control les tres coordenades espacials i el temps.

Per a cinc paràmetres de control, n'apareixen quatre més, i infinites per a sis o més paràmetres.

Per donar una idea precisa de la teoria cal afegir encara tres comentaris:

1) Les referides són les catàstrofes essencials, però n'hi ha altres de derivades (duals, amb simetria, etc.)

2) Les referides són les elementals, en el sentit que en els fenòmens reals se'n

Actualment aquest punt de vista és àmpliament majoritari en les aplicacions, i és per això que l'hem emprat en aquesta presentació. Vegem, tanmateix, el punt de vista original de R. Thom.

EL PUNT DE VISTA FENOMENOLÒGIC DEL SEU CREADOR: UNA TEORIA DE MORFOGÈNESI

R. Thom manifesta que en crear la teoria de catàstrofes pretenia una eina per estudiar les formes que d'una manera espontània apareixen a la natura, la seva estabilitat, formació i evolució. És a dir, una teoria de morfogènesi. És així que el títol del seu llibre cabdal és *Estabilitat estructural i morfogènesi*⁴, on reuneix els dos conceptes clau. I és així que escriu que és el seu interès entendre la forma de l'escuma de cervesa, dels núvols o de les esquerdes del fang ressec.

Demostratiu d'això són els orígens mateixos dels seus treballs: l'estudi de les càustiques òptiques, formades per reflexió de la llum sobre superfícies no planes. Ell mateix assenyala que tradicionalment la principal preocupació havia estat precisament evitar la formació de les càustiques, que interferien en el funcionament dels aparells òptics. Al contrari, R. Thom va interessar-se en la seva estabilitat, cosa que li va donar uns primers exemples de gènesi i evolució de formes naturals.

En el mateix sentit, l'embriologia va ser un dels seus principals àmbits d'aplicació. En aquest model, Thom prenia com a variables externes l'espai i el temps (quatre paràmetres en total), i com a internes, els tipus de teixit cel·lular. Les catàstrofes són, doncs, els canvis de teixit (en l'espai o el temps), i en particular la superfície exterior de l'embrió (trànsit espacial de teixit a no teixit). Les catàstrofes elemen-

tals donen representacions de les evolucions de les formes dels teixits de l'embrió.

Completem aquesta perspectiva del punt de vista de R. Thom amb alguns altres trets característics:

1) Major interès per les aplicacions que pel mateix contingut matemàtic de la teoria de catàstrofes. Ja que, en frase del mateix R. Thom, es tracta d'"una teoria matemàtica, però no de la matemàtica".

2) Consideració de la teoria de catàstrofes més com a eina per a la comprensió de fenòmens que per a l'actuació sobre ells. En particular, per a l'estudi qualitatiu, més que per al quantitatiu.

3) Interès principal en l'aplicació a fenòmens dels quals es desconeixen els mecanismes interns. De forma més precisa, fenòmens dels quals sigui versemblant la hipòtesi de dependència d'una funció potencial, però sense possibilitat real de determinar-la. Per exemple, els processos bioquímics. En aquest sentit considera que quan el potencial és conegut, la teoria de catàstrofes no pot millorar els resultats clàssics. Si de cas, en proporciona una presentació ràpida i clara.

En particular, creu més interessants les aplicacions a ciències humanes que no pas a les ciències físiques.

Demostratiu d'aquests punts de vista és el fet que consideri les aplicacions a la lingüística com les més importants de les per ell realitzades.

Insistim que aquest punt de vista és actualment minoritari en les aplicacions.

LA CONTROVÈRSIA

Paral·lelament a l'esmentada proliferació d'aplicacions sistematològiques, es desenvolupa una intensa polèmica, com a exponent de la qual podem citar les crítiques presentades per Sussmann i Zahler.^{3,5} Una visió global d'aquesta polèmica es troba, per exemple, a¹.

Els detractors de la teoria de catàstrofes ataquen principalment les seves formes d'aplicació, tot i que també s'han fet crítiques al seu contingut matemàtic (la ma-

jor part fruit d'una inadequada anàlisi dels resultats). Afecten principalment dos aspectes: insuficient fonamentació, i inutilitat. En el primer aspecte, i principalment tractant-se de ciències humanes, es critica l'elecció de les variables, les escales numèriques que les representen, la poca aproximació dels models matemàtics al núvol de punts experimentals, la insuficient verificació de les hipòtesis d'estabilitat estructural i d'existència de potencials, etc. Crítiques freqüents en el segon aspecte, particularment en el cas de les ciències físiques, són les escasses millores respecte als resultats obtinguts pels mètodes clàssics, o les dificultats per obtenir prediccions i resultats quantitius. No és el cas d'intervenir des d'aquí en la polèmica. Assenyalem tanmateix que, cosa que no sorprendrà ningú, entre les múltiples aplicacions de la teoria n'hi ha que mereixen crítiques molt severes, mentre d'altres suposen aportacions rigoroses a fenòmens poc coneguts.

És d'esperar que aquesta situació es clarifiqui en els pròxims anys, i que quedi així justificada l'expectació que la teoria de catàstrofes ha suscitat.

(Josep Ferrer Llop)

Material de lectura

1. J. Guckenheimer: *The Catastrophe Controversy*; "Math. Intelligencer" (1), n.º 1, 1978.
2. T. Poston i I. Stewart: *Catastrophe Theory and its Applications*; Pitman, Londres, 1978.
3. H.J. Sussmann i R.S. Zahler: *Catastrophe Theory: a critique*; "Synthese" 37, n.º 2, 1978.
4. R. Thom: *Stabilité structurelle et morphogènesi*; Benjamin, Nova York, 1972.
5. R.S. Zahler i H.J. Sussmann: *Claims and accomplishments of applied Catastrophe Theory*; "Nature" n.º 269, oct. 1977.
6. E.C. Zeeman: *Catastrophe Theory*; Addison-Wesley, Londres, 1977.