# (jocs i entreteniments científics)

## MONEDES I BALANCES

**Els problemes de pesades constitueixen una classe definida i amb una bona tradició dins de la literatura matemàtica recreativa. Generalment, el problema es planteja així: donat un conjunt de *M* elements (quasi sempre monedes), es demana descobrir, en *n* pesades, alguna característica referent al seu pes: per exemple, quin o quins dels elements pesen diferent dels altres.**

Ens proposem aquí analitzar alguns casos dels més coneguts. Per poder treballar amb més facilitat, convindrà acceptar unes definicions prèvies:

*a*) Prendrem com a mesura de la *indeterminació* del *sistema* (o conjunt de monedes) el nombre de casos possibles que poden donar-se (és a dir, l'invers de la probabilitat *a priori* d'encertar la solució sense cap informació prèvia). Així, si se'ns demana quina és la peça que pesa menys d'un grup de set monedes, sabent que les altres pesen totes igual, la indeterminació serà de 7. Però si només se'ns diu que de les set monedes n'hi ha una que no pesa igual que les altres, i hem d'esbrinar quina és, i si pesa més o menys, la indeterminació serà de $7 \cdot 2 = 14$.

*b*) Definirem també la *informació* donada per cada pesada com el nombre de resultats diferents que pot produir aquesta pesada. Exemple: en una balança de dos plats, i sense escala, podem obtenir tres resultats: que quedi en equilibri o que es decanti cap a un dels dos costats. Es pot veure que, com passa amb les probabilitats, aquesta mesura de la informació es multiplica a cada prova, i així la informació que donen dues pesades en una balança d'aquest tipus és de $3 \cdot 3 = 9$. En general, per a *n* pesades la informació recollida serà de $3^n$, si és que es poden aprofitar tots els resultats, cosa que, com veurem aviat, no sempre succeeix.

Les fórmules de mesura que acabem de definir tenen la virtut de fer fàcil la notació, tot i que l'habitual és servir-se del *bit* (= $\log_2 2$).

Il·lustrarem aquestes nocions amb dos casos senzills:

1.– Donades tres monedes, detectar en una pesada quina és la que pesa menys que les altres.

2.– Determinar quantes pesades són necessàries per resoldre el problema anterior, si no sabem si la peça defectuosa pesa més o menys que les altres.

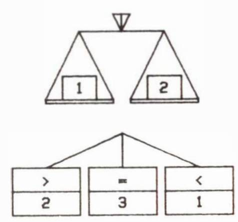


figura 1

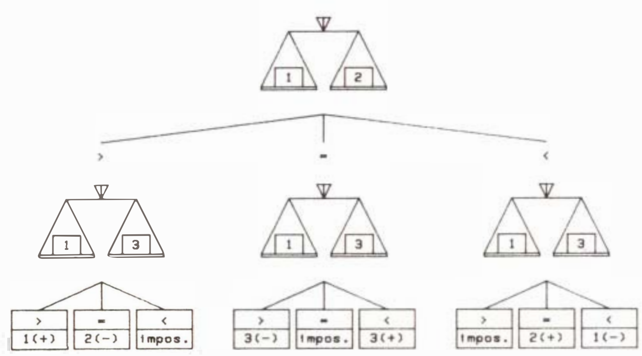


figura 2

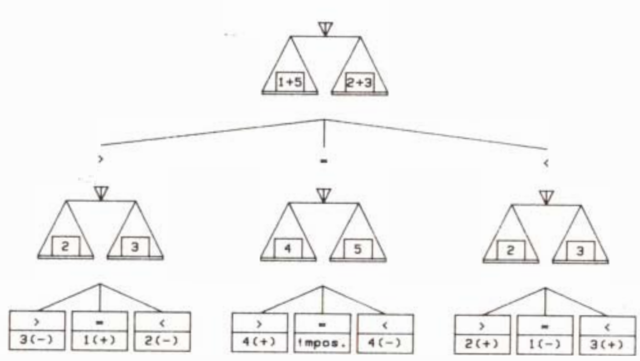


figura 3

### TENIM PROU INFORMACIÓ?

Si hem de resoldre els problemes, és evident que la quantitat d'informació ha de ser igual o superior a la d'indeterminació. Però cal també tenir en compte que les condicions del problema, el tipus de balança o la característica a descobrir poden motivar de vegades que no tota la informació sigui utilitzable. Hem de considerar que aquesta informació no se'ns dóna de forma contínua, sinó discreta, en blocs de dos, tres o més unitats, que són els diferents resultats de les pesades; i, per altra banda, hi ha casos en què amb cada moneda hi ha associada més d'una unitat d'indeterminació, com en el segon problema, on cada una de les monedes pot ser la dolenta, però pot ser-ho per defecte o per excés de pes.

Per poder aprofitar tota la informació que ens donen les pesades, caldria que cada una d'elles dividís les monedes en grups de manera que les pesades encara no utilitzades fossin suficients per discriminar dins de cada grup la moneda buscada. Això és el que no sempre podrem assolir.

En el primer problema que ens hem posat, la indeterminació és de 3 (tres casos possibles), i la informació és també de 3. Com que cada moneda només té associada una unitat d'indeterminació, tota la informació és utilitzable, i una pesada serà suficient. En general, caldrà que $3^n \geqslant M$.

Quant al segon problema, cada moneda conté dues unitats d'indeterminació, com hem vist més amunt, i part de la informació es perdrà en el procés. La fórmula que permet calcular el nombre de pesades necessàries és:

$$3^n > 2(M+1) \qquad (1)$$

és a dir, que haurem de fer un nombre de pesades que seria teòricament suficient per resoldre la indeterminació d'un sistema que contingués una moneda més.

No donem la demostració de (1), que és una mica llarga, però facilitarem informació al lector que hi estigui interessat.

Ens cal, doncs, determinar el valor mínim de *n* que compleixi:

$$n > \frac{\log [2(M+1)]}{\log 3}$$

El cas que estudiem és tan senzill que el càlcul pot fer-se directament, per tempteig, a partir de (1):

$$3^n > 8 \longrightarrow n = 2$$

és a dir, que dues pesades són suficients.

Un cop hem demostrat la possibilitat de resolució, queda la tasca de dissenyar el model d'experiment, la successió concreta de pesades que ens ha de portar a la solució. Això no és sempre fàcil, i el lector que hagi afrontat o afronti alguns casos més complexos ens donarà la raó.

La solució dels problemes plantejats més amunt s'il·lustra a les figures 1 i 2. Cada balança simbo-

| M | M! | n | $2^n$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 6 | 3 | 8 |
| 4 | 24 | 5 | 32 |
| 5 | 120 | 7 | 128 |
| 6 | 720 | 10 | 1024 |
| 7 | 5040 | 13 | 8192 |
| 8 | 40320 | 16 | 65536 |
| 9 | 362880 | 19 | 524288 |
| 10 | 3628800 | 22 | 4194304 |

figura 4

litza una pesada que dóna lloc a tres resultats diferents. Els rectangles terminals representen els diversos finals que pot tenir l'experiment. Com ja esperàvem, la diferència entre indeterminació i informació correspon exactament al nombre de terminals *buits* (resultats *impossibles* o informació no aprofitable).

## LES DOTZE MONEDES I ALTRES TEMES

Considerem una de les formes més conegudes del problema: descobrir, entre dotze monedes i amb tres pesades, una peça que pesa diferent (per excés o per defecte). Sabem que la solució existeix, perquè la fórmula (1) ens dóna: $3^3 = 27 > 2(12+1) = 25$, però trobar la manera de fer-la efectiva pot ser una mica laboriós Ho deixem com a exercici al lector, recordant-li que és fonamental vigilar que cada partició deixi la indeterminació distribuïda de manera que la informació restant sigui suficient per discriminar cada un dels grups.

Aquest és un principi que cal tenir present sempre, perquè moltes vegades l'enunciat del problema pot introduir condicions que facin difícil arribar a una fórmula equivalent a (1) que determini *a priori* si se'ns dóna prou informació.

S'han ideat moltes variacions a partir del planteig bàsic. Per exemple, sabem que no és possible resoldre un problema de l'estil del n.º 2 si se'ns donen quatre monedes i disposem només de tres pesades, perquè la fórmula (1) demana que sigui n = 3 si volem que

$$3^n > 2 \cdot 5 = 10$$

Què passa, però, si, a més de les quatre monedes, en tenim una altra que sabem de cert que és bona? L'anàlisi d'aquest cas demostra que, més que la informació addicional que tenim, el que és decisiu és el fet que una moneda més ens permet repartir la indeterminació de manera més adequada (figura 3).

Proposem també al lector dissenyar un procediment per detectar la moneda diferent entre tretze, amb l'ajut d'una catorzena que sabem que és bona.

## POSEM-HI UNA MICA D'ORDRE

Consideració a part mereixen els problemes en què el que se'ns demana és ordenar per pes diverses monedes. En el cas més corrent, en què no hi ha dues monedes del mateix pes, la informació que obtenim de cada pesada és només de 2, i cada vegada es perd el tercer resultat (igualtat), que esdevé impossible. Pel que fa a la indeterminació, serà igual a M! = 1.2.3.4. ...M, el nombre de permutacions d'*M* elements. La figura 4 és una taula on pot veure's que el nombre de pesades necessàries creix ràpidament.

Provem de resoldre el cas M = 5 que, com veiem a la taula, demanarà no menys de set pesades. Agafem dues monedes qualssevol i comparem-ne el pes. Prenem-ne unes altres dues i fem la mateixa operació. Confrontem ara el pes de les dues monedes que han resultat més pesants en les dues proves i podrem establir aquestes relacions:

$$a_1 > a_2 > a_3$$
$$a_1 > a_4$$

Examinem ara la relació entre el pes de la segona moneda i el de la cinquena, la que encara no hem fet servir: això ens portarà, després de la quarta pesada, a una de les dues situacions següents:

$$(1) \qquad \begin{array}{l} a_1 > a_4 \\ a_1 > a_2 > a_3 \\ a_5 > a_2 \end{array}$$

o bé

$$\begin{array}{l} a_1 > a_4 \\ a_1 > a_2 > a_3 \\ a_2 > a_5 \end{array}$$

amb una informació de reserva de 3 pesades.

És fàcil veure que els dos sistemes d'inequacions són similars i que n'hi ha prou de discutir-ne un. feina que deixem al lector després de donar-li unes petites pistes: el proper pas serà ampliar la desigualtat de tres o quatre termes. Per fer això, podem triar entre ordenar $a_4$ o $a_5$; en fer l'elecció, però, haurem de recordar el nostre principi bàsic, i escollir el camí que ens deixi informació suficient per resoldre qualsevol de les diferents alternatives que es produeixin.

Deixarem per a una altra ocasió l'examen dels problemes derivats de la utilització de balances amb escala o d'altres tipus, com la balança *binària,* que només dóna notícia de si es produeix o no equilibri, sense precisar, en aquest darrer cas, quin dels dos plats és el que pesa més.

Voldríem animar el lector a escriure'ns fent-nos arribar els seus comentaris. En la propera edició de (ciència) publicarem les solucions dels problemes que hem plantejat, i tot allò que ens hagin comunicat els lectors i que pugui ser d'interès general, com mètodes més fàcils, ràpids o enginyosos, casos extrems o curiosos, i d'altres.

Com a acabament, oferim un problema una mica més difícil: es tenen dos grups de tres monedes cada un, fetes d'aliatges diferents, de manera que, encara que externament les sis són idèntiques, els seus pesos són 1, 3 i 5 les d'un grup, i 2, 4, 6, les de l'altre, sense que se sàpiga quin és cada grup. Disposem d'una balança de dos plats sense escala, de les que hem utilitzat abans, i volem saber quin és el nombre mínim de pesades que ens permetrà identificar totes les monedes. I també, naturalment, voldríem saber com fer-ho.

(Josep M. Massó)

## SOLUCIÓ AL "JOC DE LA TAULA PERIÒDICA"

| Grup<br>Període | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i | d | | | | | | | m |
| 2 | b | X | D | Q | h | H | M | o |
| 3 | e | W | A | T | j | J | N | p |
| 4 | a | U | C | P | i | G | K | l |
| 5 | f | Z | B | R | k | F | L | q |
| 6 | c | Y | E | S | g | I | O | n |