ENTREVISTA AMB

Alguns han arribat a dir que aquest any és el de la revitalització de la vida matemàtica barcelonina. Si fem cas a les visites que hem rebut, ha de ser veritat. A la nostra revista ens hem fet ressò de l'estada de René Thom. Ara us presetem una entrevista amb Peter Hilton, els treballs del qual tant en el camp investigador com pedagògic tenen prou ressò internacional. La entrevista ha estat feta pel nostre col·laborador Jaume Puigbò.

INTRODUCCIÓ

Peter Hilton, nascut a Londres el 1923, va estudiar en una de les famoses "public Schools" angleses, St. Paul's. Poc després d'esclatar la guerra va ser destinat al servei de criptografia de la British Military Intelligence on va treballar amb el famós matemàtic Henry Whitehead (no confongueu amb Alfred Whitehead, el col·laborador de Russell), que després, el va invitar a estudiar amb ell a Oxford i el va introduir en el món de la topologia algebraica. Professor de les universitats de Manchester, Cambridge i Birminghan (on era cap del departament de matemàtiques), va emigrar als EUA el 1962. Durant nou anys va ésser a la universitat de Cornell, i després es va traslladar a la de Washington, a la ciutat de Seattle, on també va treballar per a l'important Institut de Recerca Battelle (on es va inventar la xerocopiadora i és actualment el propietari del 49% de les accions de la Xerox Corporation). Des del 1973 és el primer ocupant d'una nova "chair" del Case Institute of Technology de Cleveland. Els Hilton tenen dues cases (una a Seattle i una altra a Cleveland), encara que Mrs. Hilton viu la major part del seu temps a Nova York, perquè és actriu de teatre. Precisament, mentre el seu marit passa el seu any sabàtic a Zuric, la senyora Hilton representa *Arms and the Man* de Bernard Shaw en un teatre de Princeton. Hilton és ben conegut pels estudiants que han cursat la carrera de matemàtiques a la Universitat de Barcelona pel seu llibre *Homology Theory,* que durant anys ha estat llibre de text o de consulta de l'assignatura de cinquè. Autor de més de doscents articles de recerca sobre teoria d'homotopia, àlgebra homològica, etc. s'ha interessat des de fa molt de temps en problemes d'ensenyament de les matemàtiques a tots els nivells, des del parvulari fins al postgrau. Ha escrit llibres de text per a nens i per a cursos de reciclatge d'adults (en col·laboració amb altres autors) i ha estat membre de diversos comitès d'ensenyament de matemàtiques. Per exemple, va presidir el National Research Council Committee on Applied Mathematics Training. Segurament varen ser aquestes credencials que varen portar l'ICE i la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències a aprofitar la seva estada entre nosaltres per invitar-lo a pronunciar tres conferències sobre els nous mètodes d'ensenyament de la matemàtica. El motiu de la seva visita a la nostra ciutat va ser, però, participar en unes jornades sobre topologia algebraica organitzades per la Universitat Autònoma (amb la col·laboració de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències). Quan li vàrem preguntar quina impressió n'havia tret de la seva curta estada entre nosaltres només es va queixar del temps (era a finals de març) que li havia impedit fer una petita excursió a la Costa Brava.
Jaume Puigbó

(ciència): *–Podríeu definir la topologia algebraica per als nostres lectors? Quins són els seus problemes centrals?*

P. Hilton: –Bé, permeteu-me que descrigui el mètode. Potser els vostres lectors estan familiaritzats amb la geometria analítica, és a dir amb el fet que associant coordenades als punts del pla o de l'espai tridimensional, hom pot convertir problemes geomètrics en problemes algèbrics i d'aquesta manera resoldre'ls en forma sistemàtica. Aleshores, jo diria que el que fa la topologia algebraica és anar molt, molt més lluny. Hom construeix, a partir de configuracions geomètriques, certs sistemes algèbrics associats i, analitzant aquests sistemes, espera trobar informació sobre aquelles configuracions geomètriques subjacents. Els tipus de sistemes algèbrics que hom utilitza generalment són grups, anells, etc. Jo m'he interessat en aquesta classe de problemes que condueixen, en darrer terme, al problema de la classificació de les configuracions geomètriques mitjançant aquests invariants algèbrics. Una qüestió típica, que és de gran importància en diverses branques de la matemàtica, és si una funció contínua d'un espai en ell mateix té un punt fix. Molts problemes de matemàtiques poden ésser formulats d'aquesta manera. Ara bé, per investigar l'existència de punts fixs, gairebé sembre s'utilitzen mètodes de topologia algebraica. Una altra qüestió que sorgeix sovint és si dues configuracions poden deformar-se l'una en l'altra (mitjançant una deformació contínua) o bé si dues funcions contínues d'una configuració a una altra poden "deformar-se" l'una en l'altra. Aquests problemes pertanyen al que anomenem teoria d'homotopia. Novament, els mitjans més efectius de què disposem per respondre a aquestes qüestions són els algebraics.

PETER HILTON

L'enfocament algebraic de les matemàtiques és, potser, el més sistemàtic. Sovint els problemes algebraics són decidibles, mentre que els problemes geomètrics subjacents semblen no ser-ho.

(ciència): *—Diríeu que l'algebraïtzació de la matemàtica és la meta final?*

P. Hilton: —No, no sempre. Però és natural amb certs tipus de dades de definir i estudiar aquests invariants algebraics. En altres casos, el mètode seria més analític, aquest és un altre enfocament possible. Però per utilitzar aquest segon tipus de mètodes, el sistema ha de tenir una estructura molt rica, s'ha de poder derivar, integrar, etc. i tractant amb aquests objectes geomètrics hom troba més aviat estructura combinatòrica que no pas estructura analítica. Per tant, jo afirmaria que els problemes combinatòrics acostumen a tenir solucions algèbriques mentre que els problemes en què es pot disposar del càlcul infinitesimal solen tenir solució analítica. Voldria afegir-hi que m'he sentit, com penso que ens passa sovint als matemàtics, atret per les eines en elles mateixes. Arribat a un cert punt hom comença a fascinar-se pels mètodes en ells mateixos, perquè funcionen, què hi ha al darrera d'ells? De fet, la vostra mateixa pregunta mostra que, en pocs minuts de conversació, ja us he començat a interessar en les eines, heu preguntat si era natural algebraïtzar les matemàtiques. De manera que jo he treballat molt en el que podríem anomenar àlgebra pura, però en tot cas en l'àlgebra que ha estat desenvolupada com a resposta a aquestes qüestions geomètriques: teoria de grups, àlgebra homològica, etc.

(ciència): *—Una de les vostres conferències aquí a Barcelona es titulava "El nou èmfasi en les aplicacions". M'agradaria preguntar-vos quines són les aplicacions de la topologia algebraica.*

P. Hilton: —Aquesta pregunta incideix en el que acabo de dir, ja que he afirmat que la topologia algebraica s'aplica a la geometria. Encara que jo podria contestar-vos, per impressionar els lectors, que la topologia algebraica s'aplica, per exemple, als circuits elèctrics, em penso que aquesta resposta no seria honesta perquè aquesta no és la raó per la qual, ni jo ni els meus col·legues, estem ficats en aquest camp. Per aquest motiu prefereixo donar-vos la resposta següent: quan es parla d'aplicar les matemàtiques, normalment, es té en la ment una porció de les matemàtiques, un problema del món físic i la possibilitat de demostrar que mitjançant aquesta porció de matemàtiques es pot resoldre el problema o almenys obtenir unes certes respostes que ens permetin aprofundir-hi. Però aquest punt de vista és simplista perquè suggereix que el procés d'aplicar les matemàtiques és un procés en el qual només hi ha una etapa. I això no és veritat perquè cal entendre aquest model matemàtic, que sovint és un model geomètric, i aquí és on entra la topologia algebraica, per ajudar-nos a estudiar el model matemàtic. És a dir hom utilitza un model del model. En aquest sentit, la topologia algebraica és veritablement part de la matemàtica aplicada. Per exemple, serveix per estudiar certs tipus de qüestions relacionades amb operadors diferencials i aquests són, a la vegada, aplicats a problemes del món físic.

(ciència): *—Podríem dir que la topologia algebraica estudia l'estructura global dels espais de qualsevol dimensió (en contrast amb altres branques de la matemàtica que s'ocupen de l'estructura local). Hom pensaria que com més gran és la dimensió, més complicat és l'espai. És cert això? Quines són les dimensions difícils i quines la típica i la fàcil? Té això alguna cosa a veure amb la dimensió del nostre univers?*

P. Hilton: —Oh, quina pregunta tan interessant! És un fet que en molts aspectes les dimensions elevades són més fàcils, senzillament perquè hom disposa de més lloc per fer coses. Per exemple, tenim aquest concepte de nus, és a dir, un fil enredat tant com volgueu, els dos extrems del qual estan units. Doncs bé, l'existència de nusos és una peculiaritat del nostre espai de dimensió tres. En dimensions més grans o iguals que quatre qualsevol nus pot ésser desenredat fins a convertir-lo en una circumferència. Això es deu al fet que el nus és un objecte unidimensional i, per tant, la dimensió complementària en el nostre espai és dos. És aquesta la dificultat. En dimensió quatre podem definir una noció anàloga, un nus bidimensional, que no es podria desfer en l'espai de quatre dimensions, però sí en el de cinc.

(ciència): *—Creieu que, per què els nostres lectors ho entenguin, una analogia vàlida seria la d'un ésser bidimensional tancat dins d'un cercle del qual nosaltres el podríem ajudar a escapar, sense necessitat de forçar les parets que l'envolten, a través de la tercera dimensió?*

P. Hilton: —Sí, penso que és una bona analogia. I tornant al que us deia, incrementant la dimensió, en general, les coses se simplifiquen perquè disposem de lloc per prescindir de les característiques accidentals dels objectes. Tenim aquesta conjectura famosa, la conjectura de Poincaré, que afirma que tota varietat tridimensional compacta, connexa i simplement connexa és topològicament equivalent a l'esfera de dimensió 3. Una varietat és un objecte que localment és com un tros d'espai ordinari, compacta ve a significar que les distàncies entre dos qualssevol dels seus punts són menors que una certa constant K, connexa vol dir que és d'una sola peça i simplement connexa que qualsevol camí tancat dins de la varietat pot ésser deformat de forma contínua en un punt. L'esfera S^3 és el conjunt de punts de l'espai de quatre dimensions que estan a distància 1 de l'origen.

(ciència): *—En dimensió 2, per a l'esfera ordinària, la conjectura és veritat, no és cert?*

P. Hilton: —Efectivament ho és, i també en dimensió 1, però aleshores hem de suprimir el que fa referència a simplement connexa de l'enunciat. Des de fa

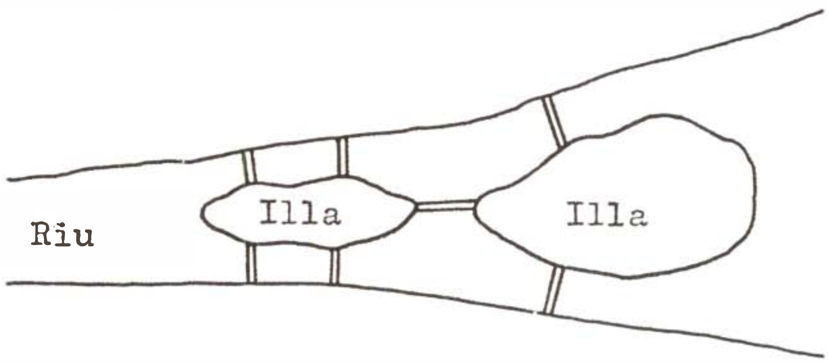


Fig. 1.– Un dels problemes històrics de la topologia algebraica, el problema dels set ponts de Königsberg proposat per Euler: ¿pot una persona passar pels set ponts sense repetir-ne cap? La resposta negativa la va donar Euler mitjançant un teorema general que avui dia s'emmarca dins la teoria de grafos, teoria de múltiple aplicacions, per exemple, en informàtica.

Fig. 2.– Tota funció contínua de [0, 1] en [0, 1] té un punt fix "a", punt de tall de la gràfica de la funció amb la diagonal del quadrat. La demostració rigorosa d'aquest teorema elemental es basa en el teorema de Bolzano, conegut per qualsevol (??) estudiant de COU.

temps els matemàtics han intentat provar, sense aconseguir-ho, la conjectura. En un cert moment hom va decidir generalitzar-la a dimensió n. No fa gaire temps es va provar la conjectura per a dimensions més grans o iguals a 5. Molt recentment, fa cosa de mesos, la resposta positiva per a dimensió 4 ha estat anunciada. És un treball de gran bellesa fet essencialment per un topòleg anglès i un jove matemàtic americà i, actualment, es troba en la fase de revisió per part dels experts. El que és extraordinari és que l'únic cas que resta és el de la conjectura original. Em sembla que podem afirmar que des del punt de vista de les configuracions geomètriques, de les seves relacions i classificació, les dimensions més difícils són, sens dubte, 3 i 4. Molts dels teoremes de la topologia comencen dient: "Per a dimensions més grans o iguals que cinc..." i aleshores segueix: "tal cosa es compleix".

Hi ha també una sèrie de problemes anomenats "problemes d'estabilització", en els quals algunes coses estranyes succeeixen en dimensions baixes, i, en incrementar la dimensió, s'arriba a una situació estable, a partir de la qual res no canvia.

(ciència): *–Quines són les dimensions més usuals en què s'assoleix aquesta estabilitat?*

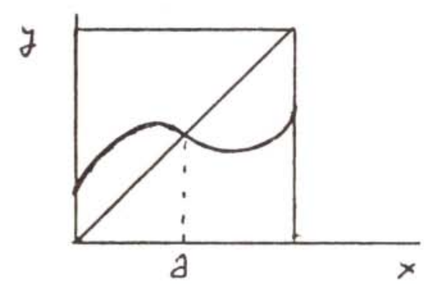
P. Hilton: –Varia amb el problema, però per a un tipus de problema donat, es pot preveure en quina dimensió s'estabilitzarà, la qual cosa no vol dir que es pugui anticipar en *quina situació* s'estabilitzarà. Per exemple, si considerem les funcions contínues de S^n (l'esfera n-dimensional) en S^{n-1} tenim la situació següent:

De S^2 a S^1, qualsevol funció és equivalent a una funció constant.

De S^3 a S^2, n'hi ha infinites de no equivalents.

De S^4 a S^3 n'hi ha només de dues classes, i a partir d'aquí s'estabilitza:

de S^5 a S^4 també n'hi ha dues, etc. I de fet les dues classes en una dimensió provenen, mitjançant un procés perfectament definit, de la dimensió una unitat



inferior. Fenòmens d'aquesta classe són molt comuns, i molt valuosos, naturalment, en topologia.

(ciència): *–Què se sap sobre l'estructra global del nostre univers? Localment és un espai euclidià, però els angles de triangles extremament grans sumen 180 graus?*

P. Hilton: –Efectivament, sabem que la suma dels angles d'un triangle de grans dimensions no és exactament 180°, però sabem molt poca cosa més sobre això. Per exemple, no sabem si existeixen realment nusos en el nostre univers i, que jo sàpiga, es desconeix si és simplement connex (és a dir, si qualsevol camí tancat, per gran que sigui, es pot contraure fins a convertir-lo en un punt). Hem acumulat gran quantitat de coneixements sobre l'esfera en la qual vivim, però moltes de les qüestions sobre les característiques topològiques del nostre univers són obertes.

(ciència): *–Estic pensant en aquesta petita obra de ciencia-ficció d'Abbott,* Flatland. *És possible que el nostre univers no sigui més que un de molts i que existeixin éssers de 4 dimensions que visquin en un continu espaitemporal de dimensió 5? Ens podria ajudar la topologia a investigar aquesta qüestió?*

P. Hilton: –Aquesta és una pregunta apropiada per després d'un sopar com el que m'heu ofert, en un moment en què, acompanyats per una copa d'aquest espumós català, tot invita a l'especulació. Matemàticament, podem descriure un cub en quatre dimensions, l'hipercub, per exemple. Seria el conjunt de punts (x, y, z, t) tals que $0 \leqslant x, y, z, t, \leqslant 1$. Com que en els vèrtexs totes les coordenades són zeros o uns, tindrà 16 vèrtexs (des del (0, 0, 0, 0) al (1, 1, 1, 1). També podem comptar les cares (que seran cubs de tres dimensions), etc. Nosaltres no podem veure aquest cub en dimensió quatre, però sí les projeccions en dimensió 3 o bé 2. És a dir, el que podem percebre són "les ombres" dels objectes pluridimensionals. Per exemple, perquè els vostres lectors ho entenguin, si us dibuixo un hexàgon regular amb certes línies interiors, immediatament reconeixereu que és un cub, però una persona bidimensional (sense educació matemàtica) només hi veuria un hexàgon. Aquesta és la millor resposta que us puc donar, ja que la vostra pregunta està molt lluny del camp en el qual em considero un expert.

(ciència): *–¿Què penseu d'aquest nou tipus de demostracions matemàtiques en els quals és absolutament necessari utilitzar l'ajuda d'un ordinador, com per exemple la famosa demostració d'Appel i Haken segons la qual la conjectura dels quatre colors és certa? ¿Podrem obtenir algun dia una demostració més clàssica (sense l'ordinador) o estem davant d'una nova classe de teoremes, que només es poden provar amb màquines?*

P. Hilton: –És precisament això el que penso. Crec que hem d'afrontar la possibilitat esbalaïdora que existeixin teoremes la veritat dels quals pugui ésser establerta per l'ordinador, però que no puguem "provar". No em sento gaire satisfet per aquesta situació, suposo que és perquè m'agraden tant les matemàtiques humanes que no em sembla bé que l'ordinador prengui el lloc a l'home. En el cas del teorema d'Haken i Appel que heu esmentat, vaig examinar el seu raonament amb cura i estic convençut que no obtindrem mai una demostració essencialment diferent. Per tant, seria ridícul i una mala

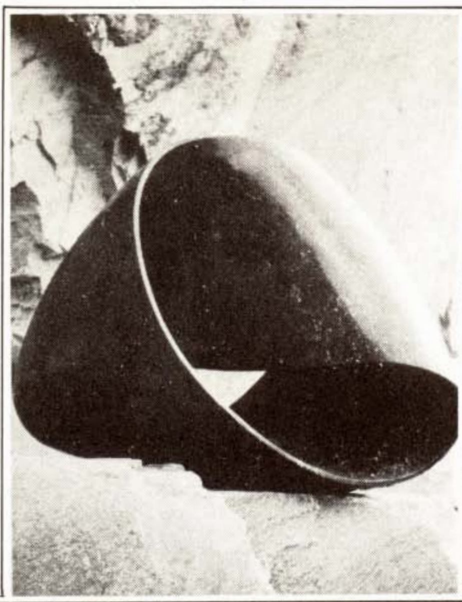


Fig. 3.– La banda de Möbius, en versió de l'escultor Max Bill, il·lustra la diferència entre estructura local i estructura global d'una varietat (en aquest cas una varietat amb vora). L'estructura local d'aquesta cinta amb un doblec i la d'una cinta cilíndrica (sense doblecs) són indistingibles (des del punt de vista topològic). L'estructura global és ben diferent com pot comprovar el lector si en construeix una i tracta de dividir-la en dues meitats tallant per la línia central equidistant de les "dues" vores.

utilització de l'intel·lecte humà que ens proposéssim repassar "manualment" el que ha fet l'ordinador. Però és una situació incòmoda aquesta d'haver d'acceptar raonaments que cap ésser humà no ha verificat.

(ciència): *–Tornant a la conjectura de Poincaré, si aquest resultat fos cert, equivaldria a dir que el nombre de varietats (amb certes restriccions) és molt petit. La simplicitat és un dels principis directors del nostre univers (o de l'univers platònic de les idees), o bé és un dels principis que regeixen la nostra ment?*

P. Hilton: –Jo opino que és un dels principis que guien les nostres ments. La tasca d'entendre consisteix, en gran mesura, a buscar patrons, la qual cosa vol dir buscar alguns tipus d'equivalència. Quan tractem d'organitzar els nostres coneixements sobre el món que ens rodeja, intentem de fer una classificació en la qual hi hagi tan poques classes com sigui possible, és a dir, tants objectes equivalents en una mateixa classe com ho permetin les circumstàncies. Per tant, crec que aquest és un principi director de la nostra manera de pensar. Per altra banda, hi ha certament resultats totalment inesperats, que diuen que existeixen tan sols uns pocs objectes que compleixin una certa propietat.

(ciència): *–Com per exemple, el cas de l'existència d'un producte sense divisors de zero a R^n només per les dimensions = 1, 2, 4, 8 (L'anomenat teorema de Frobenius)?*

P. Hilton: –Efectivament, o per posar un altre exemple, el fet que hi hagi només 5 poliedres regulars, contràriament al que passa en dimensió 2 en la qual existeixen polígons regulars de qualsevol nombre de costats. El descobriment del fet que les restriccions tan naturals que imposem a les nostres matemàtiques tenen unes conseqüències tan insospitades, la qual cosa vol dir que aquestes restriccions són molt més fortes del que havíem pensat, és un fet altament remarcable.

(ciència): *–Vós sou autor d'un llibre sobre categories (traduït al castellà). Segons Federer, les categories són el llenguatge natural de la topologia algebraica i el que ha permès el desenvolupament d'aquesta disciplina. Esteu d'acord amb aquest punt de vista? Quina importància té per a una teoria trobar un llenguatge apropiat en el qual pugui ésser expressada? Podríeu explicar per als nostres lectors què és una categoria?*

P. Hilton: –Sí que m'agradaria intentar explicar als vostres lectors què és una categoria. La definiria com un domini del discurs matemàtic. Les matemàtiques estan impregnades simultàniament d'unitat i diversitat. Tenim totes aquestes àrees en què treballen els especialistes: –l'anàlisi, la geometria, l'àlgebra, etc. Si, per exemple, vós dieu: "Estic interessat en geometria", això significaria que us interesseu en l'estudi dels espais euclidians, o parts d'aquests espais, transformacions lineals, etc. És a dir, per explicar-ho a algú descriuríeu els objectes que desitgeu considerar i les transformacions entre ells. Això és el que constitueix una categoria. La topologia algebraica és un mitjà per reflectir categories geomètriques en categories algèbriques, per traduir de forma imperfecta, per descomptat, els problemes d'una categoria a l'altra. En aquest sentit hom entén el que diu Federer que la topologia algebraica està lligada naturalment a les categories. Però aquestes són alguna cosa més que un llenguatge, ja que ens ajuden a fer les preguntes correctes. Pel que fa a la vostra pregunta sobre la importància de la selecció d'un llenguatge apropiat per fer matemàtiques, penso que aquesta elecció és cabdal, però aquí hi hauríem d'incloure també la notació. Ho és perquè simplifica enormement el problema de la conceptualització. Només cal recordar els diferents sistemes de numeració emprats per la humanitat fins a adoptar el sistema sofisticat utilitzat en l'actualitat. Imagineu-vos quin problema seria calcular el quadrat de 49 en xifres romanes, per exemple!

(ciència): *–Thom ens va dir, en la seva entrevista, que els anys daurats de la matemàtica contemporània van ser els dos lustres de l'any 1945 al 1955, quan es van fer*

Fig. 4.– Paradoxes de la geometria pluridimensional. En un quadrat de costat 4 construïm 4 cercles tangents de radi 1. El cercle interior tangent als quatre té radi $\sqrt{2} - 1$. Podem repetir la construcció amb un cub de costat 4 i 8 esferes tangents de radi 1. L'esfera interior té radi $\sqrt{3} - 1$. En dimensió n la hiperesfera interior té radi $\sqrt{n} - 1$. Ara bé si agafem $n = 10$, la hiperesfera interior té radi $\sqrt{10} - 1 = 2,16$... Però aleshores l'esfera interior *té un diàmetre superior a la longitud del costat de l'hipercub!*

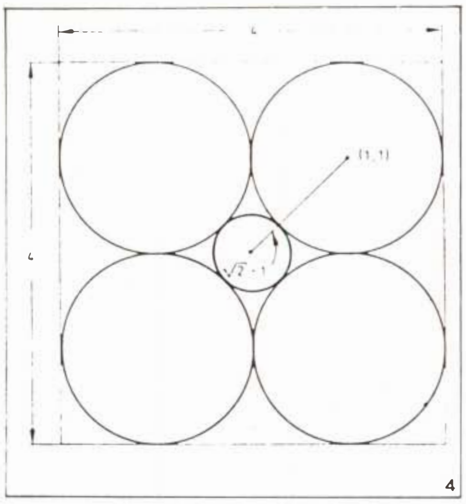
Fig. 5.– Dos nusos en forma de fulla de trevol, imatges especulars l'un de l'altre. Max Dehn va provar que no eren equivalents, és a dir que no podem deformar continuament l'un en l'altre (mitjançant una isotopia de tot l'espai, terme massa tècnic per descriure aquí; el lector pot imaginar que els nusos són construïts d'un material, tal com plàstic, flexible, extensible, etc. però que té un cert gruix; *aleshores el sentit tècnic en que volen utilitzar la paraula deformar coincideix amb el sentit intuïtiu).*

Fig. 6.– El torus, una superfície en forma d'anella, en la qual hi ha dibuixats dos camins tancats, un que es pot contraure en un punt i un altre que no es pot contraure. El torus és una varietat no simplement connexa.

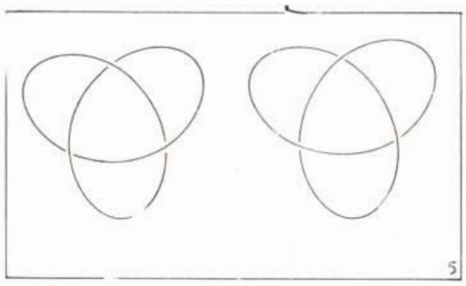
importants avenços en topologia algebraica. Hi esteu d'acord? Quins són, per a vós, els cinc teoremes més sobresortints del segle XX?

P. Hilton: –Una pregunta difícil. Tinc un gran respecte per René Thom, però jo no hauria afirmat que el període més brillant de les matemàtiques va acabar el 1955. Com a mínim diria que va continuar un xic més. Entre els grans teoremes jo inclouria la versió Hirzebruch-Grothendieck del teorema de Riemann-Roch, el teorema de l'índex d'Atiyah-Singer, la classificació dels grups finits esporàdics, la demostració de la conjectura de Poincaré generalitzada, el teorema de Roth sobre aproximació de nombres reals per nombres algèbrics i la teoria del cobordisme de Thom, encara que no es tracta d'un gran teorema, però sí d'un instrument fantàstic, elemental i profund alhora. Finalment també hi inclouria la demostració d'Adams del teorema sobre la no existència d'elements que tenen invariant de Hopf igual a u, teorema que marca el començament d'una tremenda onada d'activitat posterior al 1955. Penso que el que ara passa en matemàtiques avui dia és altament estimulant. Thom ha expressat les seves opinions sobre el declivi de la topologia, però jo no vull limitar-me solament a la topologia. El que més em fascina de les matemàtiques actuals és que les barreres entre les diferents disciplines s'estan esfondrant. De fet, els teoremes dels quals he parlat no pertanyen només a una de les múltiples branques de la matemàtica. El que succeeix ara és que la gent utilitza mètodes d'una disciplina en una altra i es descobreixen connexions del tipus analògic, però connexions orgàniques entre les diferents parts de la nostra ciència. Penso que podríem ser en el llindar d'una nova era daurada.

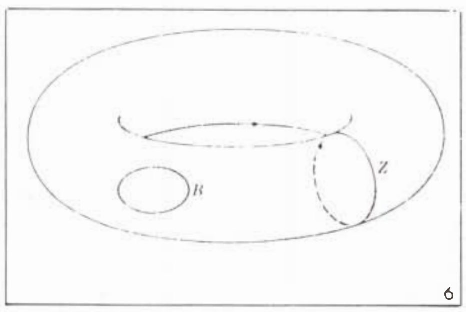
(ciència): –*Vos esteu interessat en la millora dels aspectes pedagògics de l'ensenyament de les matemàtiques. ¿Quan s'escriuran els llibres i els articles de recerca d'una manera menys formal i l'autor explicarà les idees que hi ha darrera de la seva teoria o la seva*



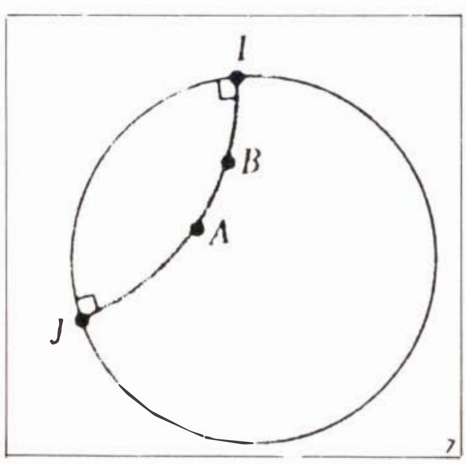
4



5



6



7

demostració?

P. Hilton: –En aquest aspecte sóc un pessimista. De fet jo he treballat amb totes les meves forces per assolir els objectius que heu esmentat, però pel que veig nedo contra corrent. Certament, als EUA, la tendència és la contrària de la que jo defenso. Una de les tasques més grans que tenim és la de comprometre els matemàtics en temes educatius, a tots els nivells. No vull dir que altres persones no s'hagin també d'interessar en els aspectes pedagògics relacionats amb la nostra ciència. Els mestres ho han de fer. Els matemàtics es queixen molt de la qualitat de l'ensenyament i de la capacitat de comprensió dels seus estudiants quan arriben a la universitat, però fan molt poca cosa per millorar aquesta capacitat.

Fig. 7 i 8.– Model de la geometria (bidimensional) de Lobachevsky, la geometria que es creu que més s'adapta al nostre univers. Els angles coincideixen amb els usuals, però la distància entre dos punts A, B ve donada per Ln (IA . JB/ IB . JA). El pla de Lobachevsky és l'interior del cercle de radi 1 i les rectes els arcs de cercle que tallen el cercle de radi 1 en angles de 90°. Aquesta fórmula de la distància fa que objectes de dimensions euclidianes diferents tinguin les mateixes dimensions en el sentit de Lobachevski (tal com indica aquest dibuix d'Escher).

Hem de desfer la creença, que sostenen alguns educadors, que hom pot ésser un expert en pedagogia de qualsevol matèria. Crec que això és un engany. Jo, per exemple, no em sento preparat per dir com s'hauria d'explicar la història o una llengua extrangera. Penso que els experts en educació no existeixen. Jo ni tan sols no em considero un expert en l'ensenyament de les matemàtiques. El millor que podem fer és tenir gent amb experiència, que entenguin realment la seva matèria i que tinguin ganes de treballar en el camp educatiu. Pel que fa als llibres i als articles de recerca veig difícil de canviar la tendència actual, deguda en part a la preocupació pels costos d'impressió. I és una llàstima perquè això no succeïa al segle XIX. Els matemàtics del segle passat, quan escrivien articles, revelaven les idees subjacents. Avui en dia escrivim en aquest estil tan concís que difícilment podem entendre un article si no som especialistes en la disciplina en qüestió.

(ciència): –*Vos heu ensenyat en diferents universitats, angleses i americanes, i coneixeu moltes altres universitats europees. Quines són les diferències entre elles? De quina manera es practica, es valora i s'enfoca la matemàtica en totes elles?*

P. Hilton: –La diferència més important potser està en l'elecció del moment en què l'estudiant s'especialitza. En el sistema americà els alumnes segueixen cursos de contingut ampli durant l'ensenyament secundari i aquesta tendència continua durant els dos primers anys d'universitat. És en el tercer any quan l'estudiant comença a especialitzar-se i, de fet, només assoleix el grau d'especialització de les universitats europees quan va a la Graduate School*.

(ciència): –*I el sistema rus?*

P. Hilton: –A Rússia existeix l'especialització com a la resta d'Europa, però allí

* Nota de l'entrevistador: Es refereix als estudis de postgrau que segueixen els estudiants que desitgen obtenir el títol de màster o el de doctor.

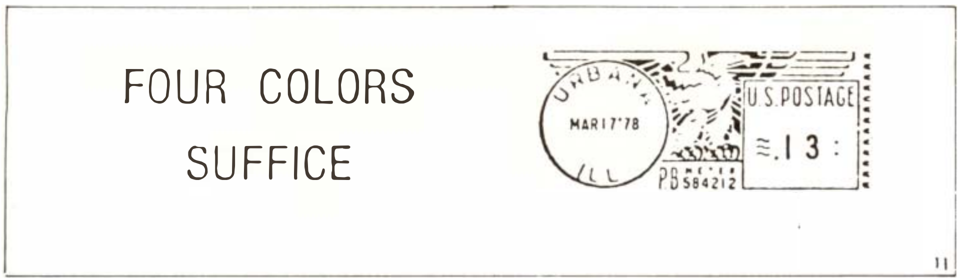
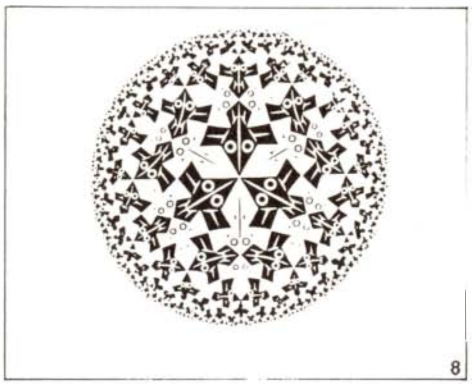


Fig. 11.– L'anunci de l'exit de la demostració del teorema dels quatre colors.



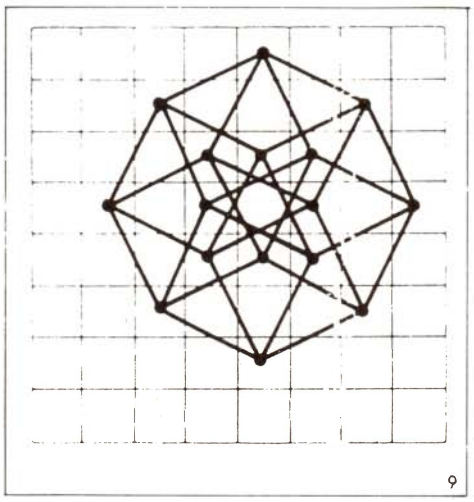


Fig. 9.– La projecció de l'hipercub de dimensió quatre en dimensió 2 dóna la solució d'un problema d'escacs: Col·locar 16 cavalls de manera que cadascun d'ells n'amenaci quatre.

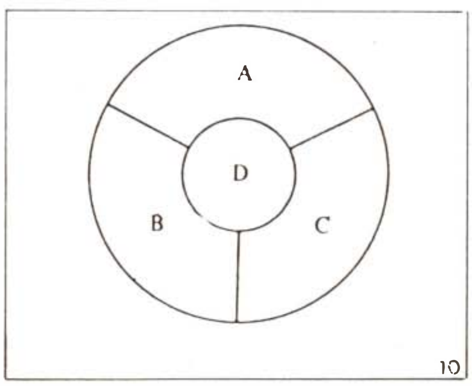


Fig. 10.– Un mapa amb només quatre països, però que requereix ja quatre colors perquè cap parella de països fronterers no tingui el mateix color.

els estudis de matemàtiques hi inclourien la física. El seu sistema educatiu és molt bo i l'alumne aprèn quantitats enormes de matemàtiques en els seus primers anys d'universitat, però es tracta de matemàtiques clàssiques, amb molt poca àlgebra lineal, per exemple. El gran avantatge del sistema americà, al meu entendre, és que ofereix a l'estudiant la possibilitat de postposar la decisió, que finalment haurà de fer, sobre la branca del saber en què vol especialitzar-se. És a dir, l'estudiant ha assolit un cert nivell de maduresa quan se li demana que faci la decisió. Aquest sistema té alguns desavantatges, és clar, però es porta a terme amb una gran flexibilitat (en les bones universitats) i això permet a l'estudiant brillant seguir una ruta més directa. Una altra diferència, i aquest és un aspecte en el qual els Estats Units estan molt endarrerits, és el dels idiomes estrangers, la negligència en l'estudi dels quals resta a l'estudiant americà oportunitats de beneficiar-se de la cultura europea. Finalment, alguns dels cursos que es donen a les universitats americanes, particularment en el camp de les ciències socials, no tenen el nivell que aquí, a Europa, es considera que ha de tenir una assignatura universitària. La raó d'això és l'idealisme americà que estableix que qualsevol persona que desitgi anar a la universitat ho ha de poder fer, la qual cosa significa que certs estudiants, no gaire preparats, segueixin estudis superiors.

(ciència): —*M'atreviria a dir que les formes d'ensenyament gairebé no han canviat en els darrers cinquanta anys. Com veieu l'ensenyament d'aquí a una cinquantena d'anys?*

P. Hilton: —En primer lloc refuso totalment la idea que hom podrà prescindir del mestre. L'ordinador formarà part de l'escena, però, en la meva opinió, ajudarà el mestre i no el suplantarà, entre altres raons, perquè les màquines no seran mai tan flexibles com ho és un ésser humà sensible. Però ens trobem en una situació delicada, perquè l'ordinador no serà mai tan bo com el bon mestre, però tampoc no serà tan dolent com el mal mestre. Em penso que molta part de l'educació tindrà lloc fora de les aules, sobre el terreny. L'alumne tindrà més experiències directes i això serà de gran valor, perquè crec que el nen tendeix a creure que existeixen dos mons separats: el de les aules i el món exterior. Per últim, em preocupa el fet que l'educació serà més llarga. Per arribar a l'estat en què l'individu pugui ésser útil a la societat s'haurà d'estudiar cada vegada més.

(ciència): —*Potser la solució és fer compatible l'estudi amb un treball a temps parcial?*

P. Hilton: —Sí, crec que aquesta és la resposta del problema i psicològicament serà beneficiós.

(ciència): —*Matemàtics com Morris Kline, Saunders McLane, Halmos, etc. han escrit recentment llibres o articles sobre importants aspectes no-matemàtics de la matemàtica. Estem en via de crear una filosofia de les matemàtiques?*

P. Hilton: —El que necessitem és una afirmació clara, i accessible a la persona intel·ligent no especialista, dels objectius pels quals cal estudiar matemàtiques. Crec que tant Saunders McLane com Halmos han fet contribucions importants en aquest aspecte. Respecte a Morris Kline no n'estic tan segur. Penso que cal que els matemàtics venguem el nostre producte al mercat. Per regla general, els matemàtics preferim quedar-nos dins la nostra comunitat, fer la nostra feina, agafar els nostres estudiants, després que per ells mateixos ja han decidit estudiar matemàtiques, com a deixebles als quals modelar segons la nostra imatge. Però crec que hem de fer alguna cosa més, ja que, com he dit abans, tenim aquesta situació anòmala en la qual l'estat de la matemàtica és molt saludable, però la comprensió de les matemàtiques per part de la societat és tan dolenta. Hem de dirigir-nos a l'adult (almenys fins que no aconseguim arreglar les coses des de l'ensenyament bàsic) i convencer-lo que les matemàtiques són útils i també són accessibles.

(ciència): —*La idea que vàreu exposar en una de les vostres conferències que no s'ha de separar la matemàtica aplicada de la pura em recorda el que va defensar un conegut artista el qual els organitzadors d'unes jornades matemàtiques van invitar a parlar: la unitat de l'art i la ciència. Ens dirigim cap a un nou Renaixement, una era nova de síntesi del saber, després de tanta especialització?*

P. Hilton: —Sí, com ja he dit, crec que en matemàtiques estem a punt d'entrar en una edat daurada, però això contrasta amb la possibilitat que en el camp educatiu entrem en un període negre, durant el qual un grup selecte de matemàtics man-

tindrien la flama encesa. Però a mi no m'agrada aquesta perspectiva. Fa un moment parlàvem de la necessitat de convèncer el públic de la utilitat de les matemàtiques i de la possibilitat d'aprendre-les sense sofriment i disgust. I aleshores convèncer les persones que calguin del fet que s'ha de donar suport econòmic a l'educació.
Crec que la unificació de la matemàtica pura i l'aplicada pot estar en la línia de la unificació de l'art i la ciència de la qual parlàveu. Però no hem de pensar que la matemàtica pura és l'art i l'aplicada la ciència. És el treball sistemàtic dins la matemàtica el que constitueix la ciència i les conjectures, els salts en el buit, les especulacions imaginatives d'una part de les matemàtiques humanes són l'art. Jo espero que ens puguem treure de sobre aquesta distinció entre matemàtica pura i aplicada i que d'ací a vint anys hom parli només de matemàtiques i de matemàtics sense adjectius, perquè això és molt restrictiu i fins i tot avui en dia hi ha molts matemàtics que no poden ser classificats tan simplement. I al mateix temps és font de males interpretacions que marquen, per exemple, polítiques de contractació del professorat en les universitats. Hi ha universitats que diuen: "Necessitem un matemàtic aplicat", en lloc de dir: "Tractem de buscar la persona més capacitada i preguntem-li si estaria interessat a fer cursos de matemàtiques aplicades (o cursos més orientats a les aplicacions)".

(ciència): *—Per acabar, després d'haver parlat sobre els problemes centrals de la topologia, us demanaria que ens diguéssiu quins són, segons la vostra opinió, els problemes centrals de la nostra societat occidental.*

P. Hilton: —Penso que el problema central de la nostra societat és la restauració dels ideals, de manera que un individu no se senti passat de moda pel fet de parlar en aquests termes. També cal reafirmar la noció de servei a la comunitat. Nosaltres estem deixant en les mans dels polítics la conducció dels nostres assumptes, i jo crec que, per regla general, en el món occidental no tenim ara les persones que caldria tenir per polítics, perquè, les que jo anomeraria persones adequades prefereixen quedar-se en la seva petita comunitat fent el que desitgen fer: ciència, matemàtiques, art, arquitectura, etc. Penso que aquestes persones intel·ligents i sensibles haurien de dedicar part del seu temps al servei de la comunitat. No crec que els problemes que tenim provinguin de la Unió Soviètica i menys del comunisme soviètic, que manca del més mínim atractiu, és ineficient, corrupte i ningú no desitja imitar. El que ha fet la Unió Soviètica a Afganistan és moralment indefensable, però des d'un punt de vista pràctic també és un error.

(ciència): *—Si ho entenc bé, esteu dient que la política no hauria d'ésser una professió, que els polítics haurien d'ésser persones íntegres i capacitades amb ganes de servir la comunitat.*

P. Hilton: —Això és precisament el que crec. En la meva experiència en la universitat, he vist que la persona que es posa com a meta obtenir un càrrec no té cap interès ni en el saber ni en l'ensenyament: l'única cosa que l'interessa és el poder. Seria desitjable que en el futur els individus arribéssin a la política després d'un llarg període (uns vint anys, per exemple) de dedicació a altres tasques comunitàries.

Material de lectura

(Hi ha versió castellana: *Planilandia,* Guadarrama, 1975)
E. A. Abbott, Flatland, Dover Publications, Inc., Nova York 1952
D.W. Blackett, Elementary Topology, Academic Press, Nova York 1967
W.G. Chinn i N.E. Steenrod, Topologie élémentaire, Dumod, París 1970
Martin Gardner, Mathematical Games, Scientific American, Agost 1978 i febrer 1980
P. Hilton, Lenguaje de categorías, Tecnos, Madrid 1975
P. Hilton i altres, The Role of Applications in the Undergraduate Mathematics Curriculum, Office of Mathematical Sciences, National Research Council, Washington D.C., 1979
P. Hilton i G.S. Young, New Directions in Applied Mathematics, Springer-Verlag, Nova York 1981
L. Neuwirth, The Theory of Knots, Scientific American, June 1979
L.A. Steen, Mathematics Today, Springer-Verlag, Nova York, 1978
Pel·lícula *The Fourth Dimension,* Banchoff-Strauss Productions
(És possible que una còpia d'aquesta pel·lícula sigui adquirida aviat per l'ICE de la UPB)