

# (jocs i entreteniments científics)

## L'HEX, UN JOC D'ESTRATÈGIA COMPLEXA

Els jocs "tornen". La crisi i l'oci ens hi aboquen, ens llancen a jugar. Des de sempre, el joc ha tingut interès per als científics i, viceversa, els jugadors han demanat sovint als científics estudis per a descobrir estratègies guanyadores. Molts jocs tenen un pur interès d'entreteniment. Molts d'ells subministren noves idees i bons models per als científics.

El present article vol iniciar els nostres lectors (els iniciats que tinguin paciència) a un "nou" joc de tauler, l'Hex, l'anàlisi del qual trobareu a continuació.

Una part important de l'entreteniment matemàtic està constituïda pels jocs de tauler i especialment pels que anomenem *jocs bipersonals d'informació completa*, és a dir, aquells en què dues persones tracten de guanyar una partida sense la intervenció de l'atzar. L'anàlisi de les possibilitats del joc, la resolució de problemes relacionats amb aquest, així com la determinació de l'existència d'una estratègia guanyadora per a un dels dos jugadors i, si és possible, la seva construcció, constitueixen una font d'entreteniments molt àmplia que va des de la simple realització d'una partida fins a l'estudi exhaustiu del joc, un estudi que a vegades requereix profunds coneixements matemàtics. La majoria d'aquests jocs, almenys els més interessants, tenen uns orígens molt antics: es fan conjectures, barrejant llegendes i mitologia, sobre el naixement dels escacs, el Go o el Wari (per citar tres jocs importants a Occident, Orient i a l'Àfrica, respectivament). També hi ha jocs de creació recent però molt pocs poden situar-se a l'alçada dels primers. En realitat un bon joc és aquell que amb unes regles senzilles dona lloc a estudis estratègics diversos i, sobretot, a una difícil determinació de la seva solució.

Entre els jocs ideats modernament l'Hex ocupa un lloc important per diverses raons: simplicitat de regles, originalitat de l'espai del joc, dificultat estratègica i relació amb aspectes matemàtics.

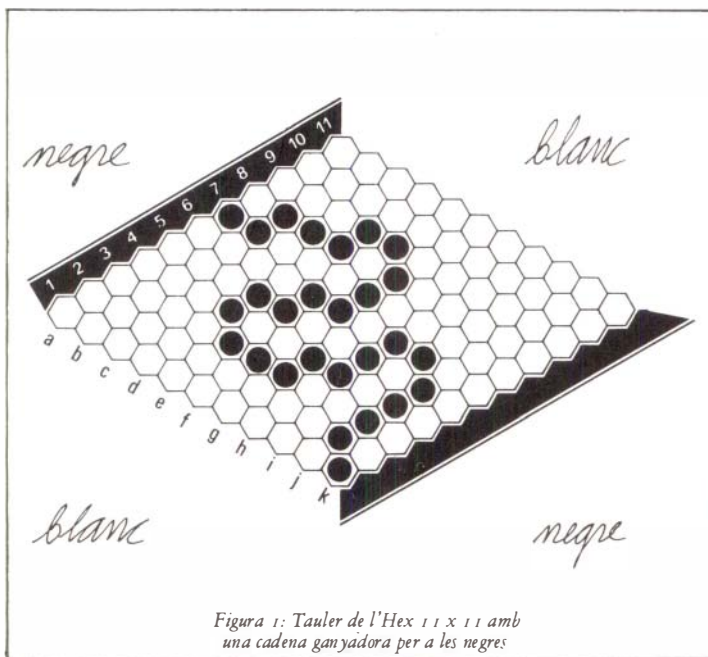


Figura 1: Tauler de l'Hex 11 x 11 amb una cadena guanyadora per a les negres

Fou ideat l'any 1942 pel danès Piet Hein i fou difós pel diari "Politiken" amb el nom de Polygon. Paral·lelament, l'any 1948, l'estudiant de Princeton John Nash el va reinventar, i li foren dedicats diversos estudis durant aquells anys als Estats Units. Finalment, l'any 1952, s'acceptà el nom d'Hex, abreviació de la paraula hexàgon, per destacar una de les característiques principals del joc.

### DESCRIPCIÓ DEL JOC

Es practica en un tauler format

per onze files d'onze hexàgons cadascuna que formen un mosaic romboïdal, i cada jugador disposa de seixanta fitxes. Dos costats oposats del tauler corresponen a un jugador i els altres dos a l'altre. Les regles, molt elementals, es redueixen al fet que cada jugador al seu torn col·loca una fitxa sobre una qualsevol de les caselles, tenint en compte que no pot ocupar-se un hexàgon ocupat per una altra fitxa ni pot moure's mai una fitxa ja col·locada (figura 1).

### OBJECTIU DEL JOC

Per a guanyar una partida un ju-

gador ha d'aconseguir fer una cadena contínua de fitxes del seu color que enllacin els dos costats oposats que li corresponen. (Dues caselles veïnes són aquelles que tenen un costat en comú. Es considera una cadena contínua la formada per caselles veïnes.) Emprarem una notació algebraica per a anotar les partides. Cada hexàgon queda determinat per una lletra i un nombre. Les caselles (a,1), (a,11), (k,1) i (k,11), és a dir, els quatre vèrtexs, pertanyen a ambdós jugadors.

### ANÀLISI DEL JOC

L'interès del joc prové principalment de l'estructura hexagonal. Una fitxa situada en una casella central té 6 lligams possibles (seguint la terminologia del Go diríem 6 graus de llibertat) i això fa que sigui difícil interceptar una línia. Pot practicar-se també en un tauler topològicament equivalent al descrit, format per triangles equilàters, col·locant les fitxes en els vèrtexs dels triangles i considerant que dues fitxes són veïnes si estan unides per un costat. Així ha estat comercialitzat al nostre país (la construcció del tauler és més senzilla) però considerem que té major interès jugar-hi sobre un full amb l'hexagonat dibuixat i enlloc de fitxes senyalant amb llapis les tirades, numerant-les per fer possible l'anàlisi de certes posicions de la partida.

# TRES PROBLEMES EN TAULERS REDUÏTS

Un dels mètodes més emprats per a familiaritzar-se amb l'estructura hexagonal i conèixer els principis estratègics de l'Hex és la reducció de les mesures del tauler. Aquest és un mètode interessant en jocs on el principal és la col·locació de fitxes (Hex, Go, Reversi, etc...). Les primeres reduccions són excessivament elementals. En efecte, en el cas 2 x 2 el primer jugador guanya amb qualsevol obertura, mentre que en el 3 x 3 guanya tirant al mig. En aquest tauler podem fer-nos ja algunes preguntes: si el primer jugador no tira al mig, perd la partida o bé depèn del lloc on tiri? El creador del joc, Hein, va plantejar un senzill problema en el qual s'observa la importància de l'hexàgon central (figura 2). En el tauler 4 x 4 les coses es compliquen una mica: si el primer jugador tira a (b,3) o (c,2), és a dir, als hexàgons centrals, guanya amb facilitat i si ho fa a (a,4) o (d,1) també pot guanyar. En qualsevol altre cas el segon té una bona defensa. Trobeu la jugada que han de fer les blanques per a guanyar en la següent posició? (figura 3)

Arribem al tauler 5 x 5 anomenat mini-Hex, on podem observar ja alguns principis estratègics. L'obertura a l'hexàgon central continua essent la millor i dona en aquest cas la victòria al primer jugador amb set moviments. En qualsevol tauler aquesta sortida és la millor i dona un avantatge important, que es va reduint a mesura que augmenten les dimensions del tauler. Trobem partides interessants imposant la condició que el primer jugador no pot fer la sortida al mig. Pot amb aquestes condicions guanyar la partida, o bé perd tota possibilitat? Plantejem dos problemes al mini-Hex en les figures 4 i 5. El primer mostra un tipus d'atac anomenat de doble amenaça per part de les blanques, que en un moviment precís guanyen i el segon, obra també de Hein, presenta una complicada situació que té una única solució per a les blanques. Sabríeu trobar-la?

Amb el mini-Hex s'acaben els estudis exhaustius del joc. A partir del tauler 7 x 7 esdevenen massa llargs i cal llavors fixar-se en posicions concretes reslitzant el que anomenem estudis locals del joc, vàlids per a qualsevol dimensió. Observem una partida sencera on les blanques s'imposen amb 13 moviments emprant el mètode de doble amenaça. Observeu el blo-

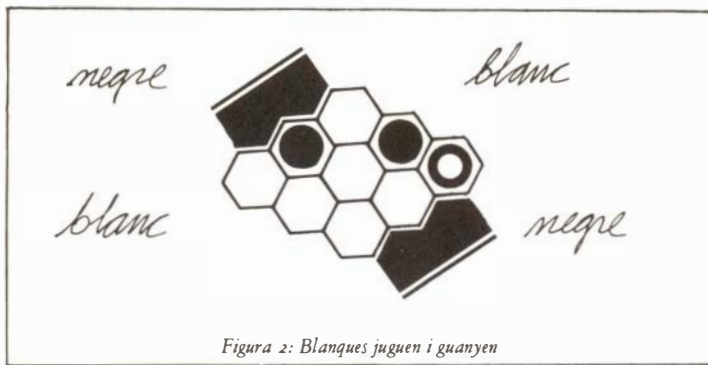


Figura 2: Blanques juguen i guanyen

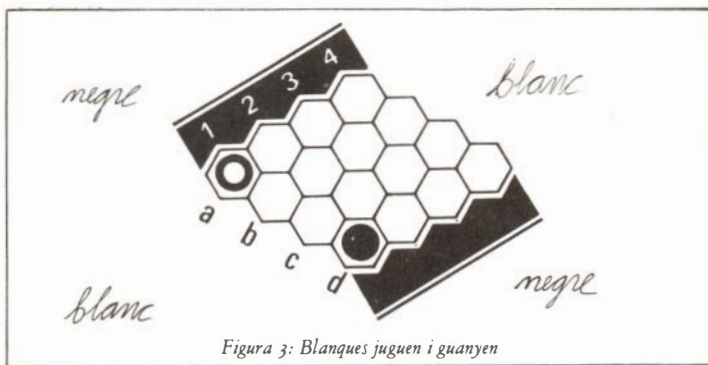


Figura 3: Blanques juguen i guanyen

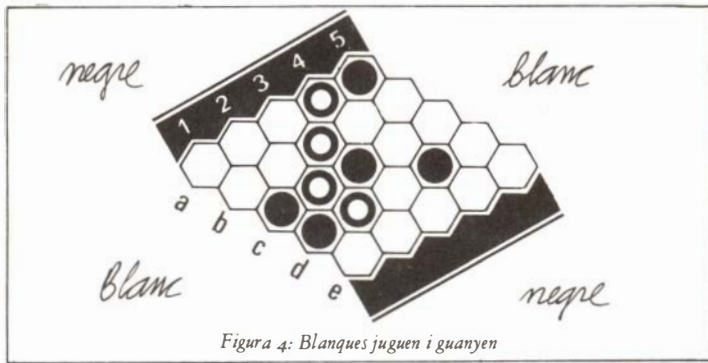


Figura 4: Blanques juguen i guanyen

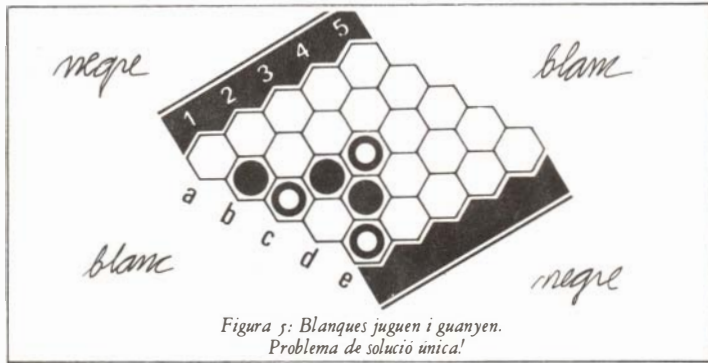


Figura 5: Blanques juguen i guanyen. Problema de solució única!

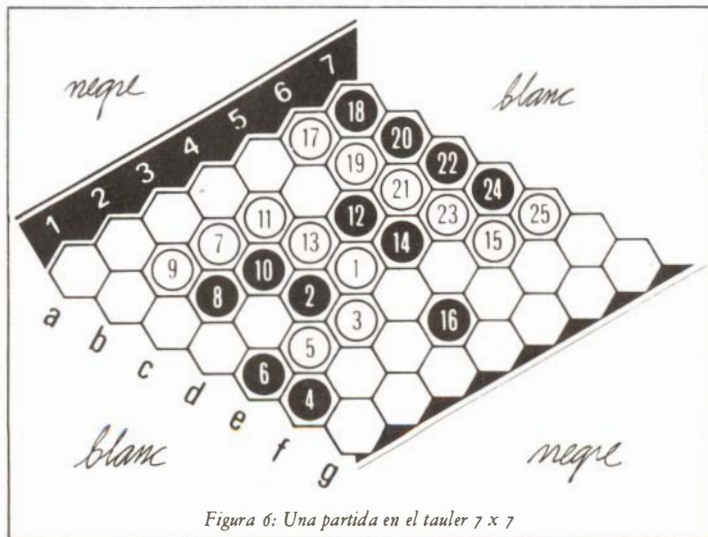


Figura 6: Una partida en el tauler 7 x 7

queig inicial de les negres i sobretot el moviment 15è. de les blanques a l'hexàgon (e,6) (figura 6):

# LES MATEMÀTIQUES I L'EXISTÈNCIA D'UNA ESTRATÈGIA GUANYADORA

Totes les anàlisis estratègiques s'han emprats basant-se en el fet que tota partida té forçosament un guanyador, és a dir, les taules no són possibles! En efecte, no és possible omplir totalment un tauler amb fitxes blanques i negres sense que hi hagi una cadena contínua d'un dels dos colors. Per altra part és evident que si un dels dos jugadors construeix una tal cadena talla tota possible solució de l'adversari. En realitat defensa i atac són una mateixa cosa. Això fa suposar l'existència d'una estratègia guanyadora per a un dels dos jugadors. En treballar les reduccions hem vist l'avantatge del primer jugador amb una sortida convenient. L'any 1949 John Nash va donar una curiosa demostració de l'existència d'una estratègia guanyadora per al primer jugador. És una demostració per reducció a l'absurd que s'ha utilitzat altres vegades en teoria de jocs. En síntesi es redueix als següents punts:

1. Suposem que existeix una estratègia guanyadora per al segon jugador.
  2. El primer jugador fa la primera jugada arbitràriament i després de la tirada del segon segueix l'estratègia d'aquest.
  3. Si en qualsevol moment ha de tirar a una casella ocupada per la primera fitxa, tira novament a qualsevol lloc possible.
  4. El fet de tenir una fitxa de més sobre el tauler mai no pot ser un inconvenient sinó en tot cas un avantatge. Per tant no interfereix en l'ús d'aquesta estratègia per part del primer jugador, que d'aquesta manera pot guanyar la partida.
  5. Hem arribat a un absurd ja que partint de l'existència d'una estratègia guanyadora per al segon jugador hem vist que el primer pot guanyar. Per tant la hipòtesi inicial és falsa, i com que ha d'existir una estratègia per a un dels dos aquesta ha de ser forçosament per al primer.
- Amb tot això no fem més que confirmar la impressió que hom té després de fer unes quantes partides, però som molt lluny encara de la construcció real de tal

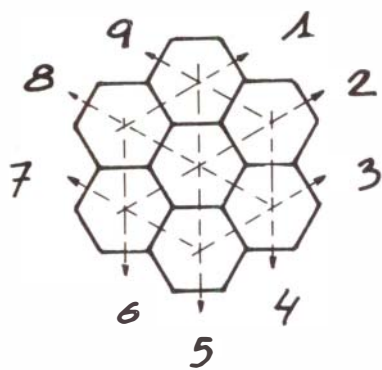


Figura 7: Els set hexàgons que formen l'hexàgon d'ordre dos

estratègia, que en realitat escapa de les nostres possibilitats i ens permet continuar prenent l'Hex com un autèntic joc!

No entrarem a explicar les nombroses qüestions tècniques locals que presenta el joc ja que som partidars que cada jugador les vagi descobrint. Si que voldríem remarcar, però, quines són les caselles "lligades" a un costat per senyalar en quins casos tota defensa és inútil. Situem-nos al costat blanc corresponent a la línia (a,1) - (k,1). Evidentment, qualsevol peó situat en aquesta línia està en contacte amb el costat. També estan lligats a aquest tots els peons situats en la línia (a,2) - (k,2), excepte el situat en aquesta darrera casella. En la tercera línia són dues les excepcions, (j,3) i (k,3), mentre que a la quarta cal fer ja petits estudis per a veure que a més del quatre últims tampoc el primer (a,4) no està lligat al costat. Observeu que a mesura que ens allunyem del costat van quedant només els peons centrals. Aquest és el fonament pel qual la millor obertura és a l'hexàgon del mig.

A aquells que tinguin ja un do-

mini del joc proposem per un costat l'ampliació del tauler i per l'altre la prohibició de col·locar el primer peó en la línia (a,1)-(k,1). Ens atrevim a dir que amb aquestes condicions la incertesa del joc esdevé tan gran com ho pugui ser la des millor jocs d'estratègia.

## FIGURES MÀGIQUES HEXAGONALS: UN PROBLEMA DIFÍCIL!

Seguint amb l'estructura hexagonal però deixant el camp del joc bipersonals, en el qual existeixen altres jocs de gran interès com són l'Hexago i la Rosette, ambdós variants del Go, i entrant en un dels camps més suggestiu de les recreacions matemàtiques, voldríem plantejar dos problemes d'hexàgons màgics. Les figures màgiques han tingut una notable importància al llarg del temps, si bé la majoria d'estudis són dedi-

cats als quadrats màgics (el Lo Shu, quadrat màgic de tres per tres format amb els nou primers nombres naturals, era conegut pels xinesos fa més de dos mil anys). Es tracta d'estudiar l'existència d'hexàgons màgics formats per nombres consecutius. En primer lloc considerem l'hexàgon d'ordre dos (figura 7). És possible col·locar set nombres diferents un a cada hexàgon de manera que totes les línies possibles sumin igual? Observeu que en aquest cas es formen nou línies, sis de les quals són de dos hexàgons i les altres de tres. La pregunta equival a dir: existeixen hexàgons màgics d'ordre dos?

Considerem l'hexàgon d'ordre immediat superior. Sabríeu col·locar els nombres de l'1 al 19 als diferents hexàgons per tal que l'hexàgon d'ordre tres esdevingui màgic, és a dir, les quinze línies que es formen tinguin la mateixa suma. D'aquestes línies sis tenen tres hexàgons, sis en tenen quatre i tres en tene cinc, però totes han de sumar igual. En aquest cas us assegurem l'existència d'una solució, certament difícil de trobar (figura 8). El que no presenta di-

ficultat és el càlcul de la suma de cada línia. En efecte, cada nombre pertany exactament a tres línies, per tant la suma de les 15 línies serà  $3 \times (1 + \dots + 19) = 570$  i la d'una línia 38.

Hi ha encara altres problemes per resoldre en aquest ordre, així com en ordres superiors, però la seva complicació és enorme si tenim en compte el gran nombre de combinacions possibles i la dificultat de trobar un mètode per a resoldre'ls. Concretament l'últim problema que us hem proposat es tracta d'un autèntic trencaclosques!

### Materials de lectura

Francis Gutmacher: *Le jeu d'Hex*. Flammarion, 1977.

Claude Berger: *L'art subtil du Hex*. Article a la revista "Pentamino", núm. 3, 1977.

M. Gardner: *Mathematical Puzzles and diversions*. Penguin Books, 1965.

M. Gardner: *Jeux mathématiques du "Scientific American"*. CEDIC. París, 1979.

(Jordi Achon i Jordi Deulofeu)

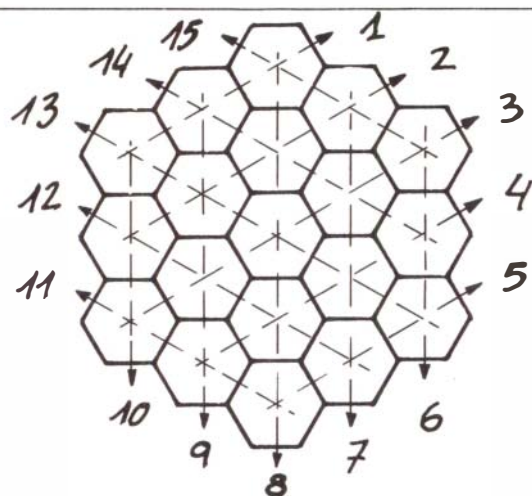


Figura 8: Els 19 hexàgons que formen l'hexàgon de tercer ordre. Observeu les quinze línies que han de sumar 38

# ONA VERDA

El Mussol surt de la seva estranya i involuntària letargia hivernal en plena forma. Potser que les letargies serveixen per a ressuscitar fort i amb les plomes més brillants i els ulls més oberts. O potser és que avui és un dia particularment desgraciat quant a embussos, però el cas és que el Mussol s'ha trobat amb la conjunció de la disponibilitat de forces i la vocació crítica per atacar un dels mites més arrelats a la nostra ciutat: la famosíssima "ona verda" dels semàfors locals; és a dir, el principi pel qual s'ha de regir la circulació de la ciutat. Si tenim present que les ciutats han estat pensades a la mida dels cotxes en lloc de les persones, veurem la importància del principi o axioma que

## (el mussol)

regeix la llei dels cotxes.

La idea de l'ona verda, si més no, és temptadora. Es tracta només que els semàfors es tanquin i s'obrin a la mateixa velocitat que els cotxes. Al límit de la perfecció, si els conductors no badessin, si es té en compte la correcció per l'acceleració i altres hipòtesis impracticables, s'aconseguiria la circulació perfecta.

El Mussol no estarà d'acord fins que el codi de la circulació no prohibeixi, taxativament, tot canvi de la direcció del vehicle, o sigui: que estigui sempre prohibit girar, a dreta o a esquerra, sense manies. Llavors sí que l'ona verda seria teòricament possible. Sinó, no.

Que quedi ben clar que el Mussol no es disposa a donar cap alternativa a l'ona verda. En primer lloc, perquè no la té, i després (i potser és més important) perquè si la tingués no la publicaria aquí, a (ciència), a tan poc l'hollandès. El Mussol només demostrarà la impossibilitat teòrica de l'ona verda. La impossibilitat pràctica la demostra, des de fa molts anys i cada dia, la mateixa ona verda. I així sí que és un fet comprovable. Els embussos són fets