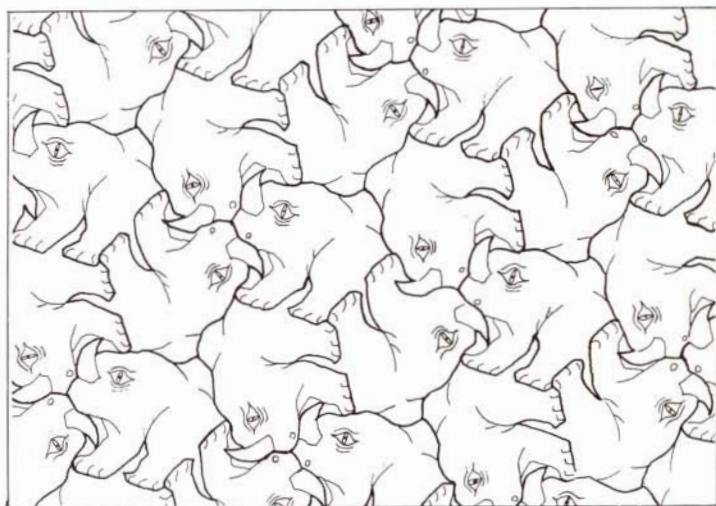
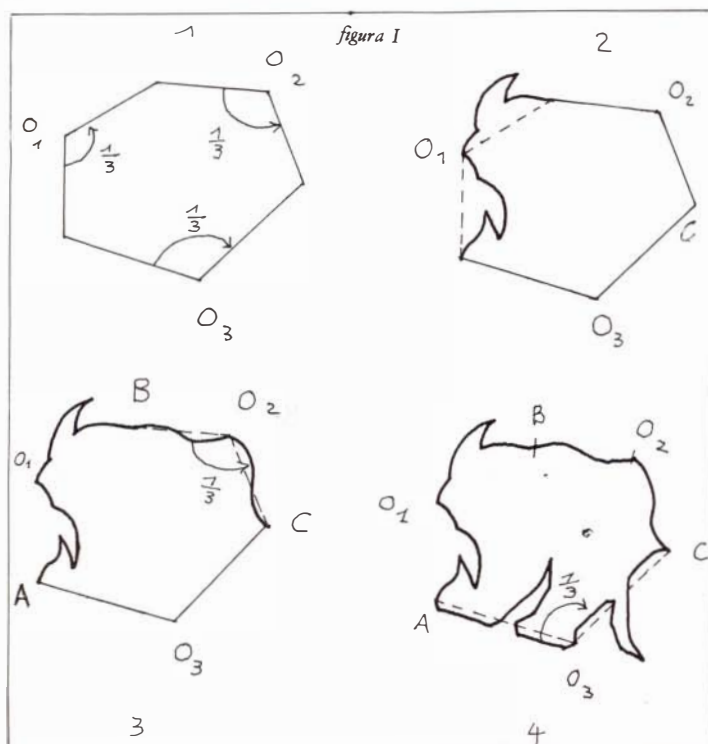


# (jocs i entreteniments científics)

## EL SECRET D'ESCHER

per Philippe Butzbach

Des d'aquest número de (ciència) comptem amb la col·laboració de Philippe Butzbach, professor de la Universitat de Grenoble que, arran de les seves freqüents estades a Barcelona, ens ha ofert els seus treballs. La secció a partir d'ara pretén acollir jocs i entreteniments relacionats amb tots els camps de la ciència, fet que contribuirà a augmentar-ne l'interès.



Philippe Butzbach (Epinay/Orge, França, 1941) estudià matemàtiques a Estrasburg i Grenoble. Es doctorà en informàtica teòrica l'any 1968.

Actualment és *maitre-assistant* en matemàtiques de la Universitat de Grenoble. El seu camp de treball són els problemes matemàtics implicats

en la lingüística estructural i més concretament els problemes de l'equivalència de gramàtiques i automats.

sempre una ocupació que demana un gran esforç, una veritable "mania", una veritable droga de la qual em sostrec difícilment." És clar que les qüestions matemàtiques implicades per l'obra d'Escher i pels enllosats de l'Alhambra són completament resoltes (per exemple, en l'article aparegut el 1977 de Grunbaum i Shepard). Dit això, qualsevol persona que observi atentament els enllosats d'Escher no podrà deixar de sentir-se temptat a dedicar-se a aquesta "mania".

Demostrem que el coneixement sistemàtic de les regles del joc és l'únic recurs de l'enllosador *amateur*, el qual, així, no haurà, com Escher amb els seus primers intents, d'exasperar-se perquè la meitat de les bestioles s'obstinen a voler caminar cap per avall, si no és que això és el que hom vol, és clar (figura II).

Hem de precisar l'objecte d'aquest tractat: la construcció d'un enllosament en el qual, segons l'expressió d'Escher en persona, el constructor pugui reconèixer els seus propis "patrons", com poden ésser una forma animal, humana, realista o fantàstica. Ací intervé la matemàtica. Havent escollit un dels disset grups possibles (per exemple, si hom

vol files d'animals evolucionant en sentit invers l'una de l'altra, caldrà escollir el grup  $pg$  de la nomenclatura dels cristal·lògrafs, engendrat per dos girs d'eix paral·lel), hom pot començar la construcció de l'enllosament dament el qual operarà el grup en qüestió, amb l'ajuda de les consideracions següents:

La vora de l'enllosat conté tots els elements que permeten preveure amb quins tipus de desplaçaments hom omplirà tot el pla. Més precisament, els constituents essencials de la vora de l'enllosament són els cims —punts comuns a tres tipus d'enllosats o més—, i els costats segments de la vora comuns a dos enllosats contigus. Aleshores, hom pot mirar la vora de l'enllosament com un polígon amb  $r$  costats i  $r$  cims, essent  $r$  el nombre de veïns amb els quals comparteix un tros de vora no reduït a un punt. El nombre  $r$  és superior a tres i inferior a sis per raons que seria massa llag d'exposar ací. Cada costat de la vora de l'enllosat és la imatge d'un altre costat o d'ell mateix per un dels desplaçaments que pertanyen al grup escollit, i el conjunt dels desplaçaments que fan que els costats es corresponguin és suficient per a engendrar el grup escollit.



Es sorprenent que els enllosadors de l'Alhambra de Granada trobessin les anomenades tècniques de replació del pla sense forat amb una única figura. És igualment sorprenent que M.C. Escher (1898-1971), gravador holandès, descobrís totes les possibilitats de la replació periòdica del pla, tot i que li mancaven els coneixements matemàtics d'aquestes qüestions. El caràcter obsessiu d'aquesta activitat (l'enllosament) en Escher, el qual va permetre que n'elaborés les lleis en intents successius sense cap guia, tot i desatendre la mate-

màtica subjacent, és ben il·lustrat pels propòsits de l'artista mateix: "Molt abans de descobrir en els enllosats de l'Alhambra una afinitat amb la replació periòdica d'un pla, jo ja l'havia reconeguda en mi mateix. Al principi, no tenia cap idea de les possibilitats ofertes per a la construcció sistemàtica de les meves figures. No coneixia les regles del joc i intentava, pràcticament sense saber gaire bé el que feia, d'encaixar, els uns dins els altres, els petits plans congruents als quals jo tractava de donar una forma animal... més tard, la creació de nous motius fou menys laboriosa que al principi, però és

Els desplaçaments possibles amb els quals hom ha de tractar són dels tres tipus següents:

—Translacions

—Rotacions de mitja volta, d'un quart, d'un terç i d'un sisè de volta.

—Lliscaments: es componen d'una translació i d'un giravolt, l'eix del qual té la mateixa direcció que la translació.

Les translacions apareixen de la manera següent: dos costats disjunts de la vora de l'enllosat són imatge l'un de l'altre per translació. Quant a les rotacions, si es tracta d'un quart o d'un terç o fins d'un sisè de volta, són dos costats adjacents, separats per un cim que porta el centre de la rotació, els quals són imatge l'un de l'altre per rotació; si es tracta d'una mitja volta, un costat és la seva pròpia imatge i el centre de la rotació és "al mig" del costat. Pel que fa als lliscaments, hi ha dos costats que es corresponen per una relliscada, l'eix de la qual talla l'enllosat. Il·lustro aquesta qüestió amb la construcció efectiva de dos enllosaments originals, sobre l'un dels quals opera el grup engendrat per una rotació d'un terç de volta, i en l'altre, el grup que hi opera és engendrat per dues translacions no paral·leles.

Tractarem de la situació més rica en possibilitats: la vora de l'enllosat és un polígon de sis costats;

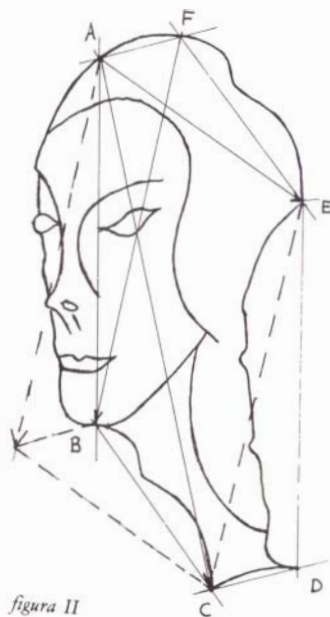


figura II

per a cada parell de costats adjacents —n'hi ha tres— cada costat del parell es dedueix de l'altre amb una rotació d'un terç, el centre de la qual és el cim que les separa. La construcció es descriu en tres etapes, cada una referint-se a un parell de costats. Una vegada efectuada la repleció periòdica, hom podrà veure que els animals de l'enllosament es dedueixen els uns dels altres, sigui per translacions, sigui per rotacions d'un terç o de dos (figura I).

Les dues translacions generatrius han de figurar en l'estructura de la vora de l'enllosat. També pot



figurar-hi una translació composta per les dues translacions generatrius. La situació més interessant es materialitza amb un hexàgon, els costats oposats paral·lels del qual es dedueixen de dos en dos per les translacions citades anteriorment: el costat ED és la imatge de l'AB per la translació del vector AE; BC és la imatge de FE per la translació del vector FB; CD és la imatge d'AF per la translació del vector AC composta per les dues precedents, que correspon a la suma vectorial d'AE i FB.

A la figura II hom observa el resultat previsible: les cares que

constitueixen l'enllosat es dedueixen les unes de les altres per translacions que són, bé les de tipus generatriu o bé les engendrades per aquestes.

Espero, a mena de conclusió, que el lector estigui àmpliament convençut que les joies de la repleció periòdica no estan pas reservades per als qui, com Escher, posseeixen una mestria perfecta del dibuix i que hom pot, sense haver dibuixat mai abans (com en el meu cas), obtenir resultats d'un interès plàstic evident, encara que en l'obra no s'apliqui res més que una matemàtica força rudimentària. Per a acabar, una darrera citació d'Escher:

"És la font més rica que mai he sondat i continua gens espatllada".

#### Materials de lectura

Berger, *Geometrie 1/Action de Groupes, Espaces affins et projectifs*; Cedic/Fernand Nathan, Paris 1977.

Grunbaum i Shepard, *The eighty-one types of isohedral fillings in the plane*; Math-Proc. Camb. Phil. Soc. 1977

Jullien, *Dessins, Groupes et Ordinateurs*; IREM de Grenoble, maig 1978.

ERNST, *Le Miroir Magique de M. C. Escher*; Editions du Chêne, Paris 1976.

# ( bibliografia científica )

## CRÍTQUES

# LA CARTOGRAFIA AL SERVEI DE LES AUTONOMIES



Aquesta obra<sup>1</sup> és el recull de les ponències —i dels col·loquis conseqüents— presentades a les Jornades de Cartografia Temàtica que se celebraren a Barcelona, en el marc de les activitats de l'Associació Catalana de Ciència Regional, l'octubre del 1979. Es tracta d'una publicació recent, feta per aquesta associació amb el suport del servei d'estudis del Banc Occidental.

L'aspecte més notable de la publicació ressenyada és el seu caràcter pluridisciplinar, que deriva tant de la diversitat de camps d'especialització dels ponents com de la varietat dels temes abordats, no sols a les ponències, sinó també en els debats que les segueixen. Aquest caràcter pluridisciplinar, d'altra banda, ve

condicionat per la naturalesa mateixa de la cartografia temàtica, la qual —com M. Ribas i Piera fa notar en la presentació— és eina de treball i de presentació d'aquest treball de moltes branques d'activitat i de moltes disciplines científiques.

L'obra recull les setze ponències presentades a les jornades, la primera de les quals té per objecte la cartografia de base, i les restants la cartografia temàtica pròpiament dita.

En relació amb la primera ponència —que pel seu caràcter general mereix una atenció especial—, suposa una valoració del material cartogràfic amb què es compta a Catalunya actualment. En aquest sentit, la ponència constata la manca d'actualitat de gran part de l'estoc existent: la cobertura parcial del territori a

escala 1:10.000 i 1:5.000, i la cobertura encara més escassa a escala 1:2.000, i una certa abundància, en canvi, de documents fotogràfics fets a diferents escales de vol. L'origen d'aquest material, d'altra banda, determina les limitacions que el seu ús presenta per a qual·sevol·l usuari: l'obsolescència, en molts casos, del que procedeix de l'empresa privada, que respon generalment a uns interessos massa concrets. Acaba assenyalant els déficits cartogràfics i marcant algunes línies per a millorar la situació cartogràfica actual.

De les aportacions fetes al col·loqui destaquen les necessitats d'establir una col·laboració estreta entre les universitats catalanes i els altres sectors interessats en matèria cartogràfica —i s'esmenta com un bon exemple la